研入学试题精选详解

（上册）

吉林大学高等数学教研室编

研究生入学考试数学

试题精选详解

（上）

吉林大学高等数学教研室　编

吉林科学技术出版社

研究生入学考试数学试题精选详解
（上）
吉林大学高等数学教研室　编
●
吉林科学技术出版社出版　吉林省新华书店发行
磐石县印刷厂印刷
●
787×1092毫米16开本　23印张　564,000字
1986年8月第1版　　1987年6月第2次印刷
印数：3540—10720册
统一书号：13376·48　　定价：4.70元
ISBN　7-5384-0030-3/N·2

出 版 说 明

1981年以来，我社相继编辑出版了全国硕士学位研究生入学试题选解（数学、物理、化学化工、力学、电学共五册）．此书问世后，颇受广大读者的欢迎和青睐，溢美之言，希冀之情，不乏篇篇．

为适应我国研究生教育发展的需要，我们在总结以前组编工作的基础上，又广泛听取了部分高等院校、研究生院教师、研究生和考生的意见．特邀请吉林大学研究生院、天津大学研究生院、大连工学院研究生院的历届考生复习指导教师和试卷命题教师，编纂了《研究生入学考试试题精选详解》．本书共六分册，即数学、物理、化学（含化工）、力学、电学、英语等．

由于诸多高等院校和科研院（所）鼎力相助和各位编作者历时一年时间的精心遴选、悉心编纂，使这套书具有如下特点：

1．时间跨度大．这套书主要选集1981年以后的试题，有的分册还增选了1981年前历年中较好的试题．

2．覆盖面积大．其一，它囊括了理工科（含师范）各类院校的基础课、主要专业基础课和部分专业课的内容；其二，每门课程的内容，试题均有涉足；其三，各种形式、各种类型题目齐全；其四，既有考察考生基础知识和基础理论方面的试题，又有考察考生分析问题、解决问题能力方面的试题等等，可以说是汇一帙而无遗．

3．针对性强．由于考生和招生单位条件各异，情况不尽相同．因此，本书既选集了重点高等院校的试题，又选集了一般院校的试题，还选集了中国科学院属部分院（所）的试题；难易程度不同的试题比例得当，较准确地反映出各类学校、各类专业的不同要求，考生可以量体裁衣，各得其所．

4．试题精炼，解题准确．每册书中各类试题都是从百余所院校、科研院（所）数以千计的试题中筛选的，可堪称是精华荟萃．解题准确、详略得当，对某些要点还给出恰到好处的解析或提示．

“贵于意在言外，使人思而得之．”纵览全书后，读者可以把握重点，掌握解题思路和方法，达到事半功倍的复习效果．

数学分册包括高等数学、线性代数两门课程，1200多道试题．参加本书编写的人员有：欧维义（第一部分—第七部分）、陈维钧（第八部分—第十部分）．

尽管我们和作者都有良好的愿望，试图编好、出好这套书，以飨读者．但是由于编选工作量大，还会有纰漏和谬误之处，敬希读者指正．

藉此机会，我们谨向热情关心、支持编写出版这套书的高等院校、科研院（所）、作者以及广大读者表示谢忱．

目　　录

第一部分　极　　限

1　数列极限的计算

1　设$|x|<1$，　求　$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$。

$\frac{1-x}{1-x}$

（国防科学技术大学　1979年）

解　因为　$(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$

$$=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=(1-x^4)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=(1-x^{2^{n+1}})$$

所以当$|x|<1$时，有

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x}\left(1-x^{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{1-x}$$

2　求极限　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$。　　　　（南开大学　1979年）

解　根据两个已知的结果：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

（2）若　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，　则　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$。

则有　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

3　求　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$。　　　　（上海机械学院　1980年）

解　因为　$\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$$

则有　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$

4　求极限　$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$，　$(x\neq0)$。　　　　（西安光机所　1980年）

解　应用公式　$\sin2x=2\sin x\cos x$，有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin x}{x}$$

5 设 $0<x<\pi$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sec\frac{x}{2}\sec\frac{x}{2^2}\cdots\sec\frac{x}{2^n}=x\csc x$。 （四川大学 1980年）

证 应用公式，$\sec x=\frac{1}{\cos x}$，有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}=\frac{x}{\sin x}=x\csc x$$

6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$ （山东工学院 1980年）

解 根据 $\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\right]^{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}\right\}$$

$$=e。$$

7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}$。 （上海海运学院 1980年）

解 所求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right]^{\frac{2nx+x^2}{2n^2}(-n)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left[-\frac{2n^2x+nx^2}{2n^2}\ln\left(1+\frac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{\frac{2n^2}{2nx+x^2}}\right]$$

$$=e^{-x}。$$

8 求 $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^m$。 （山东大学 1981

解 所求极限 $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}}\right]^{-\frac{n^2}{m^2}m}=\lim\limits_{m\to\infty}\exp\left[-\frac{n^2}{m}\ln\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{-\frac{m^2}{n^2}}\right]=e^0=1。$

—

9 设λ，k为定数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$。 （沈阳机电学院 1981年）

解 所求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\frac{\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\frac{\lambda}{n}n}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$

$1+\frac{n+1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}\exp\left\{-\lambda\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right\}$$

$$=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$

10 ~~计~~算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits^{n}C_n^k\frac{1}{4^n}$。 （北京工业大学 1981年）

解 根据二项式定理，有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$$

11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\operatorname{arctg}nx}{\sqrt{n^2+n}}$。 （西安冶金建筑学院 1982年）

解 根据极限运算性质，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\operatorname{arctg}nx}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg}nx=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & 当x<0\\ 0, & 当x=0\\ \frac{\pi}{2}, & 当x>0\end{cases}$$

12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$。 （北京师范学院 1982年）

解 根据 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

13 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$。 （鞍山钢铁学院 1982年）

解 因为 $1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2=1^2+2^2+\cdots+(2n)^2-\sum\limits_{k=1}^{n}(2k)^2$

$$=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6n^3}-4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right]$$

$$=\frac{16}{6}-\frac{8}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

14 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$。 （昆明工学院 982年）

解 我们来研究以$u_n=\dfrac{2^n n!}{n^n}$为一般项的正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^k k!}{k^k}$。因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1$$

根据比值判别法，知级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2^k k!}{k^k}$收敛。因此，它的一般项以零为极限。即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}=0$。

15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\alpha+\dfrac{k\beta}{n}\right)\right]$。 $=\int_0^1 \alpha+x\beta\,dx$ $\alpha+\frac{\beta}{2}$ （上海机械学院 1982年）

解 应用等差级数求和公式，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n-1}\left(\alpha+\frac{k\beta}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-1}{n}\alpha+\frac{n-1}{2n}\beta\right]=\alpha+\frac{\beta}{2}$$

16 设 $x_0=a$，$x_1=b$ $x_n=\dfrac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}$ $(n\geqslant2)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

$2x_n=$ ℓ $=$ $\cancel{x_{n-2}}$

（湖南大学 1982年）

解 根据假设，有

$$x_n-x_{n-1}=\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}-x_{n-1}=-\frac{x_{n-1}-x_{n-2}}{2}$$

由此推出

$$x_1-x_0=b-a;$$

$$x_2-x_1=-\frac{x_1-x_0}{2}=-\frac{b-a}{2};$$

$$x_3-x_2=-\frac{x_2-x_1}{2}=(-1)^2\frac{b-a}{2^2};$$

$$\cdots$$

$$x_n-x_{n-1}=(-1)^{n-1}\frac{b-a}{2^{n-1}}$$

把它们相加，得

$$x_n-x_0=(b-a)\left[1+\frac{(-1)}{2}+\frac{(-1)^2}{2^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right].$$

$$=(b-c)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[x_0+(b-a)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}\right]=a+\frac{2}{3}(b-a)$$

17 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$。 （西北电讯工程学院 1982年）

解 由等差级数求和公式，有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}$$

$$=1+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\frac{2}{4\cdot5}+\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2-\frac{2}{n+1}$$

因此 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{n+1}\right)=2$$

18 设n为正整数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$. （南京工学院 1982年）

解法一 对任意给定的$\varepsilon>0$，取$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$，并将积分拆成下面的形式：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}(\sin x)^n dx+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx$$

注意到，当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\delta\right]$时有

$$0\leqslant(\sin x)^n\leqslant\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right)^n$$

于是有 $$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}(\sin x)^n dx\leqslant\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$$

$$0<\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx<\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}dx=\delta=\frac{\varepsilon}{2}$$

从而 $$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$$

由此便知 $$0\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

注意到$\varepsilon>0$的任意性，即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx=0$$

解法二 若记：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n dx$

则显然有 $I_n\geqslant I_{n+1}\geqslant0$，因此极限$\lim\limits_{n\to\infty}I_n$存在。自然有$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=\lim\limits_{m\to\infty}I_{2m-1}$

应用分部积分公式，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x d(\cos x)$$

$$=-\sin^{2n}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2n\sin^{2n-1}x\cos^2 x dx$$

$$=2n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x(1-\sin^2x)dx$$

移项即知 $$I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}I_1=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

但应用数学归纳法不难证明

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0$。

19 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-1}\right)^n$ （山东海洋学院 1984年）

解[*]

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{x+1}}\right]^{\frac{n}{n-1}(x+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{n}{n-1}(x+1)\ln\left(1+\frac{x+1}{n+1}\right)^{\frac{n-1}{x+1}}\right\}$$

$$=e^{x+1}$$

20 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n-1)-\ln n]\}$ （华东师范大学 1984年）

解

$$\text{原式}=-\lim_{n\to\infty}\{n[\ln n-\ln(n-1)]\}$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=-1$$

21 试用等价无穷小代替和式中的每项，以求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\operatorname{arctg}\frac{1^2}{n^3}+\frac{2}{n}\operatorname{arctg}\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n}{n}\operatorname{arctg}\frac{n^2}{n^3}\right)$ （长沙铁道学院 1984年）

解 因为当$k=1，2，\cdots,n$时，有

$$\frac{k}{n}\operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^3}=\frac{\operatorname{arctg}\frac{k^2}{n^3}}{\frac{k^2}{n^3}}\cdot\frac{k^3}{n^4}=\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{k^3}{n^4}$$

又 $$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

所以，有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{n^4}\left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}$$

---

*) 这里自然只考虑$x\neq-1$的情形

22 设 $S_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$；$k_n$表示满足$S_k\geqslant n$的最小整数（例如$k_1=1$，$k_2=4$），求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n}$。 （华中工学院 1984年）

解 根据 $S_k=\ln k+c+\varepsilon_k$

若$S_k\geqslant n$，则

$$\ln k+c+\varepsilon_k\geqslant n,\qquad \ln k_n+c+\varepsilon_{k_n}\geqslant n$$

$$k_n\geqslant e^{n-c-\varepsilon_{k_n}}$$

按k_n的定义还应有 $k_n\leqslant e^{n-c-\varepsilon_{k_n}}+1$

于是 $\dfrac{e^{n+1-c-\varepsilon_{k_{n+1}}}}{e^{n-c-\varepsilon_{k_n}}+1}\leqslant\dfrac{k_{n+1}}{k_n}\leqslant\dfrac{e^{n+1-c-\varepsilon_{k_{n+1}}}+1}{e^{n-c-\varepsilon_{k_n}}}$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_{k_n}=0$，在上式两端令$n\to\infty$，则知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n}=e$$

23 设 $f_n(x)=\dfrac{n+x}{1+nx^2}+n^2\cos\dfrac{x-1}{n}$，$n=1,2,\cdots$。求 $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)$。

（中国科学院 1984年）

解 因为 $f'_n(x)=\dfrac{1+nx^2-2nx(n+x)}{(1+nx^2)^2}-n\sin\dfrac{x-1}{n}$

$$=\frac{1-2n^2x-nx^2}{(1+nx^2)^2}-n\sin\frac{x-1}{n}=\frac{\frac{1}{n^2}-2x-\frac{x^2}{n}}{\left(\frac{1}{n}+x^2\right)^2}-(x-1)\frac{\sin\frac{x-1}{n}}{\frac{x-1}{n}}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f'_n(x)=-\dfrac{2}{x^3}-x+1$。

24 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)$。 （华东纺织工学院 1984年）

解 设 $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{\theta_n}{(n+1)!}$

则 $\theta_n=1+\dfrac{\theta_{n+1}}{n+1}$。 这里$1\leqslant\theta_n\leqslant e$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=1$。

从而 $n\sin(2\pi en!)=n\sin\dfrac{2\pi\theta_n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi\theta_n\cdot n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi\theta_n}{n+1}}{\frac{2\pi\theta_n}{n+1}}=2\pi$$

$A=2+\frac{1}{A}$

25　已知数列$a_1=2$，$a_2=2+\frac{1}{2}$，　$a_3=2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$，　$a_4=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}$，…

的极限存在，求此极限。　$A^2-2A+1=0$　（华中工学院　1984年）

解　如设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，显然有$A\geqslant 2$。于等式$a_n=2+\frac{1}{a_{n-1}}$

两端令$n\to\infty$，有 $A=2+\frac{1}{A}$ 解这个方程，得 $A=1+\sqrt{2}$ 和 $A=1-\sqrt{2}$。符合题意的解是

$A=1+\sqrt{2}$。即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1+\sqrt{2}$

26　设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}$（$n$为正整数），　试作出$y=f(x)$在$(-1,1]$

上的函数图形。　　　　（上海交通大学　1984年）

解　对x分情形讨论

（1）$-1<x<0$。这时因$0<1+\sin\pi x<1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi x)^n=0$

于是
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1+\sin\pi x)^n+\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n+1}=\sin\pi x$$

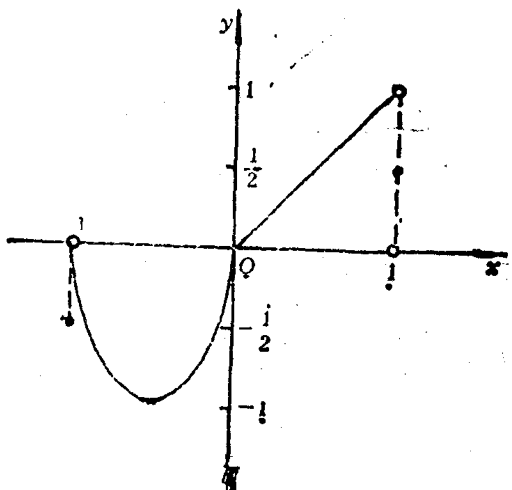
（2）$0<x<1$。这时因$1+\sin\pi x>1$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi x)^n=+\infty$

于是当$0<x<1$时，有
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{\sin\pi x}{(1+\sin\pi x)^n}}{1+\dfrac{1}{(1+\sin\pi x)^n}}=x$$

（3）$f(0)=0$；　$f(-1)=-\frac{1}{2}$，　$f(1)=\frac{1}{2}$。总结上面的讨论，我们得到

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & x=-1\\ \sin\pi x, & -1<x<0\\ 0, & x=0\\ x, & 0<x<1\\ \frac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

它的图形如26题图所示。



26题图

27. 求 $\lim\limits_{m\to+\infty}\left\{\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n\right\}$。

（华东工程学院　1984年）

解　（1）x为无理数时，因为对任何m，

恒有$\cos(m!\pi x)<1$。所以 $\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n=0$。从而

$$\lim_{m\to+\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n\right\}=0$$

（2）x为有理数时（即$x=\frac{q}{p}$），因为对于充分大的m，有$\cos(m!\pi x)=\cos 2\pi k=1$，所以

?

$$\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n=\lim_{m\to+\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos 2\pi x]^n=1$$

这样我们就得到

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}[\cos(m!\pi x)]^n\right\}=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数时}\\ 1, & x\text{ 为有理数时}\end{cases}$$

28 **计算** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}$ （$x>0$）。 （华东师范大学 1984年）

$$\boxed{\frac{1-\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=}$$

解

$$\text{原式}=\begin{cases}-1, & 0<x<1\\ 0, & x=1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

29 **证明** $\dfrac{1}{\frac{1}{1\times1986}+\frac{1}{1986\times3971}+\frac{1}{3971\times5956}+\cdots}=1985$ （北方交通大学 1985年）

证 若令 $x_1=1986$， $x_2=1986\times3971$， $x_3=3971\times5956,\cdots$

则可以验证

$$x_2=x_1(2x_1-1),\qquad x_3=(2x_1-1)(3x_1-2),\cdots,$$

$$x_n=[(n-1)x_1-(n-2)][nx_1-(n-1)]\qquad(n=2,3,\cdots)$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_1}+\left(\frac{2}{2x_1-1}-\frac{1}{x_1}\right)+\left(\frac{3}{3x_1-2}-\frac{2}{2x_1-1}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{n}{nx_1-(n-1)}-\frac{n-1}{(n-1)x_1-(n-2)}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{nx_1-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(x_1-1)n+1}=\frac{1}{x_1-1}=\frac{1}{1985}$$

所以 $\text{原式}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}=1985$

30 设a为一常数，求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}x\sin\frac{1}{x}dx$。 （西北轻工业学院 1985年）

解 应用积分中值定理，有

$$\int_n^{n+a}x\sin\frac{1}{x}dx=a\xi\sin\frac{1}{\xi}\qquad(\xi\text{ 在 }n\text{ 与 }n+a\text{ 之间})$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}x\sin\frac{1}{x}dx=\lim\limits_{\xi\to\infty}a\dfrac{\sin\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi}}=a$

31 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2+3k+1}{(k+2)!}$. （合肥工业大学 1985年）

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+2)!}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right]=\frac{3}{2}$$

32 已知数列 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

试证 $\lim\limits_{n\to\infty}F_n\Big/F_{n+1}=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ （长春光学精密机械学院 1985年）

证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+2}\right]}$$

$$=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

33 若曲线$y=x^n$上点（1，1）处的切线交 x 轴于$(\xi,0)$，试计算 $\lim\limits_{n\to\infty}y(\xi)$。

（北京邮电学院 1985年）

解 曲线 $y=x^n$ 在点（1，1）处的切线方程是

$$y=n(x-1)+1$$

它与 x 轴($y=0$) 交于点 $\xi=1-\frac{1}{n}$，于是

$0-1=n(\xi-1)$

$y=nx^{n-1}$

$$y(\xi)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

$n=\frac{1}{1-\xi}$

故 $$\lim_{n\to\infty}y(\xi)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$$

$=e$

$y-1=n(x-1)$

$y(\xi)=1$

2 不定型的数列极限

1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$. （山东海洋学院 1980年）

解 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-x^2)\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{tg}^x\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{x\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)\right\}=e^2$$

所以有
$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=e^2$$

2　求　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n$。　　（东北重型机械学院　1981年）

解　因为　$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\cos\frac{\theta}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\cos\frac{\theta}{x}}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}(-x^2)\frac{1}{\cos\frac{\theta}{x}}\left(-\sin\frac{\theta}{x}\right)\left(-\frac{\theta}{x^2}\right)$$

$$=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{\theta}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{x\ln\cos\frac{\theta}{x}\right\}=e^0=1$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n=1$$

3　求　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$　$(a>0,b>0,c>0)$。

（武汉工学院　1981年）

解　因为　$\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{3}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{3}\left(a^{\frac{1}{x}}\ln a+b^{\frac{1}{x}}\ln b+c^{\frac{1}{x}}\ln c\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{3}\ln(abc)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\exp\left\{x\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)\right\}$$