

13.192-16/16

中学数学基础电视讲座

北京市工农教育研究室 编

¹²
解析几何

辅导资料

中学数学基础电视讲座

解析几何辅导资料

北京市工农教育研究室 编

地质出版社

内 容 提 要

本辅导资料是为了配合教育部、中央广播事业局举办的中学数学基础电视讲座解析几何课的教学而编写的，目的在于帮助收看电视课的同志进行预习和复习，掌握课程要点和进度，以及补充有关材料。本书共包括平面直角坐标系、直线、二次曲线、极坐标和参数方程等四章。

本书主要读者对象为：中学数学基础电视讲座的收看者，职工业余学校的学员和老师，各类中等学校的师生，以及广大自学青年和数学爱好者。

中学数学基础电视讲座 解析几何辅导资料

北京市工农教育研究室 编

地质部书刊编辑室编辑

责任编辑 张 珊

地质出版社出版

(北京西四)

沧州地区印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经销

开本：787×1092 1/32 印张：5 5/16 字数：115,000
1982年3月北京第一版·1982年3月北京第一次印刷

印数1—66,296册·定价0.58元

统一书号：7038·新21

前 言

为了配合教育部、中央广播事业管理局举办的中学数学基础电视讲座解析几何课的教学，向参加学习的同志提供便于预习、听课和复习的条件，同时向辅导这一课程的教师提供教学参考资料，我们根据目前采用的电视讲座课本组织编写了《中学数学基础电视讲座解析几何辅导资料》，由这一讲座解析几何课主讲教师刘增贤副教授和林向岩讲师执笔。

在资料的编写过程中，我们结合中学数学基础解析几何课的教学，把重点放在平面解析几何部分。本书内容与讲座采用的课本密切配合，亦分为平面直角坐标系、直线、二次曲线、极坐标和参数方程四章。考虑到在职青年的实际情况和电视教学的特点，我们注意了各个教学单元之间的衔接，对内容提要、课程进度、章节基本要求、各讲内容、典型例题和作业等都作了明确的说明。为了帮助收看讲座的同志们提高学习效果和扩大知识面，我们还补充了一些有关的内容和例题。

由于编写时间仓促和编者水平所限，资料中不当之处，恳请读者批评指正。

北京市工农教育研究室

一九八一年九月

目 录

第一章 平面直角坐标系

一、内容提要	(1)
1. 基本概念	(1)
2. 基本公式	(1)
3. 曲线与方程	(3)
二、目的和要求	(4)
三、讲次及主要内容	(4)
第一讲 引言、有向线段	(4)
第二讲 平面直角坐标系、距离公式	(6)
第三讲 定比分点(一)	(6)
第四讲 定比分点(二)、三角形的面积	(8)
第五讲 练习课	(10)
第六讲 曲线与方程	(14)
第七讲 方程的图形	(15)
第八讲 几种特殊的方程、两曲线的交点	(19)
第九讲 练习课	(19)

第二章 直 线

一、内容提要	(23)
1. 直线方程的各种形式	(23)
2. 直线的基本问题	(23)

3. 直线系	(24)
二、目的和要求	(24)
三、讲次及主要内容	(25)
第十讲 直线的斜率、直线方程的点斜式	(25)
第十一讲 直线的方程	(26)
第十二讲 直线的一般方程	(28)
第十三讲 两直线的交点	(30)
第十四讲 两直线的夹角	(31)
第十五讲 两直线平行、垂直的条件	(33)
第十六讲 直线的法线式方程	(34)
第十七讲 点到直线的距离	(36)
第十八讲 直线系 (一)	(37)
第十九讲 直线系 (二)	(39)
第二十讲 练习课	(41)

第三章 二次曲线

一、内容提要	(47)
1. 关于圆	(47)
2. 关于椭圆	(47)
3. 关于双曲线	(48)
4. 关于抛物线与二次曲线的统一定义	(48)
5. 关于二次曲线的切线与法线	(48)
6. 关于一般二次方程的化简	(49)
二、目的和要求	(49)
三、讲次及主要内容	(50)
第二十一讲 圆 (一)	(50)
第二十二讲 圆 (二)	(51)

第二十三讲	圆 (三)	(54)
第二十四讲	椭圆 (一)	(56)
第二十五讲	椭圆 (二)	(58)
第二十六讲	椭圆 (三)	(61)
第二十七讲	椭圆 (四)	(63)
第二十八讲	椭圆 (五)	(65)
第二十九讲	双曲线 (一)	(67)
第三十讲	双曲线 (二)	(71)
第三十一讲	双曲线 (三)	(73)
第三十二讲	双曲线 (四)	(76)
第三十三讲	抛物线 (一)	(79)
第三十四讲	抛物线 (二)	(81)
第三十五讲	抛物线 (三)	(82)
第三十六讲	二次曲线的切线 (一)	(85)
第三十七讲	二次曲线的切线 (二)	(87)
第三十八讲	二次曲线的切线 (三)	(90)
第三十九讲	二次曲线的切线 (四)	(94)
第四十讲	二次曲线的切线 (五)	(96)
第四十一讲	平移变换 (一)	(99)
第四十二讲	平移变换 (二)	(101)
第四十三讲	旋转变换 (一)	(102)
第四十四讲	旋转变换 (二)	(104)
第四十五讲	旋转变换 (三)	(106)
第四十六讲	二次方程的化简复习	(108)
第四十七讲	二次曲线复习 (一)	(113)
第四十八讲	二次曲线复习 (二)	(116)

第四章 极坐标和参数方程

一、内容提要	(118)
1. 基本概念	(118)
2. 基本公式及几条特殊曲线的 极坐标方程和图形	(119)
3. 在生产中常用的几种曲线的 极坐标方程和图形	(119)
4. 几种常见曲线的参数方程	(119)
5. 参数方程与普通方程的互化	(119)
二、目的和要求	(119)
三、讲次及主要内容	(120)
第四十九讲 极坐标系、极坐标和 直角坐标的互化	(120)
第五十讲 曲线的极坐标方程	(121)
第五十一讲 极坐标方程的图形	(122)
第五十二讲 螺线	(124)
第五十三讲 圆锥曲线的极坐标方程	(124)
第五十四讲 练习课	(125)
第五十五讲 参数方程 (一)	(129)
第五十六讲 参数方程 (二)	(132)
第五十七讲 旋轮线	(135)
第五十八讲 渐伸线	(138)
第五十九讲 练习课	(139)
第六十讲 总复习	(145)
平面解析几何总结	(162)

第一章 平面直角坐标系

解析几何是用代数的方法研究几何问题的一门数学，所以研究解析几何首先是使形与数建立对应关系。这一章的目的是将平面上的点与一对实数以及曲线与方程的对应关系建立起来，从而进一步用代数方法研究几何图形的性质。

本章的主要内容包括两部分：第一部分是介绍平面直角坐标系和几个基本问题；第二部分是介绍曲线与方程的概念。内容（尤其是第一部分）均比较简单。有些内容，例如平面上的直角坐标系，学员已在代数中接触过。但为了系统学习解析几何，我们将这些材料系统化并提出一些新的概念和问题是非常必要的，应该予以足够的重视。

一、内容提要

1. 基本概念

(1) 有向直线、有向线段、有向线段的长度、有向线段的数量(值)。

(2) 平面直角坐标系、横轴、纵轴、坐标轴、横标、纵标、点的平面坐标、象限。

(3) 线段的定比分点、内分点、外分点。

(4) 曲线的方程(方程的曲线)、曲线在坐标轴上的截距。

2. 基本公式

(1) 有向线段的加法公式 (沙尔公式)

设 A 、 B 、 C 为轴上三点,

则 $AB + BC = AC$.

沙尔公式的推广: 设 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 为轴上任意
个点, 则有: $AB + BC + CD + DE + EF = AF$.

(2) 有向线段的数量 (值) 用坐标表示

设 $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$ 为轴上两点,

则 $P_1P_2 = x_2 - x_1$.

(3) 平面上两点间的距离公式

设 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 为平面上两点,

则 $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

(4) 平面上有向线段的定比分点公式

设 $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_2(x_2, y_2)$ 、 $P(x, y)$ 三点共线,

且 $\frac{P_1P}{PP_2} = \lambda$ ($\lambda \neq -1$),

$$\text{则 } \begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

特别地, 当 P 为 P_1P_2 之中点时,

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \end{cases}$$

(5) 三角形的面积公式

设 $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$ 、 $M_3(x_3, y_3)$ 为平面上三

点,

$$\text{则 } S_{\triangle M_1 M_2 M_3} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \right|.$$

(6) 平面上三点 $M_1(x_1, y_1)$ 、 $M_2(x_2, y_2)$ 、 $M_3(x_3, y_3)$ 共线之充要条件为:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. 曲线与方程

(1) 求曲线方程的步骤

i 选定坐标系(如题目已给出坐标系, 则不能再任选坐标系);

ii 在曲线上任取一点 $P(x, y)$;

iii 根据曲线上的点的共同特性, 写出关系式;

iv 把这个关系式用 x 、 y 之间的方程表示, 并化为最简形式;

v 证明所得方程就是曲线的方程(如果化简的过程都是同解变形, 则不必要再加证明).

(2) 方程的曲线作图步骤

i 讨论曲线的对称性;

ii 讨论曲线的存在范围;

iii 求曲线在坐标轴上的截距;

iv 求 x 、 y 的某些对应值, 列表;

v 描点、作图.

(3) 求两曲线的交点: 求两曲线方程的公共解.

二、目的和要求

通过这一章的学习，学员首先要掌握这一章所讲的基本概念，牢记基本公式，培养形与数结合的思想方法，为进一步学习打下良好的基础；同时要能利用解析方法证明简单的平面几何图形性质的问题，会求一般的轨迹方程，并能正确地作出方程的图形。

本章的重点是：有向线段的概念、平面直角坐标系、曲线与方程的概念，已知轨迹条件求方程和已知方程作出曲线的图形。

本章的难点是：建立数形结合的思想方法，培养用代数法证明几何问题的能力，理解曲线方程的概念。求曲线的方程虽有一定步骤，但解题时还要作具体分析，必需多作练习，才能逐步掌握熟练的技巧。

三、讲次及主要内容

第一讲 引言、有向线段

主要内容

1. 引言

什么是解析几何，解析几何的形成与发展。

解析几何研究的主要问题为：

- (1) 利用坐标证明平面几何图形的性质；
- (2) 根据已知条件，求出曲线的方程；
- (3) 通过方程研究曲线的性质，并作出曲线的图形。

学习解析几何的重要意义。

2. 有向线段

有向直线、有向线段、有向线段的长度和有向线段的数量。

零线段：当有向线段的两个端点重合时称为零线段，零线段的数量为0。

有向线段的运算：轴上有向线段的加法，用坐标表示有向线段的数量。

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为同一轴上的几个点。

则 $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0$ 。

3. 例题

(1) 课本第5页例题。

(2) 补充例题：

已知：A、B、C、D 为直线上四个不同点，

试证： $BC \cdot AD + CA \cdot BD + AB \cdot CD = 0$ 。

证明： $\because AD = AB + BC + CD,$

$$BD = BC + CD,$$

$$AC = AB + BC,$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{左边} &= BC \cdot (AB + BC + CD) - (AB + BC) \cdot (BC + CD) + AB \cdot CD \\ &= BC \cdot AB + (BC)^2 + BC \cdot CD - AB \cdot BC \\ &\quad - AB \cdot CD - (BC)^2 - BC \cdot CD + AB \cdot CD \\ &= 0. \end{aligned}$$

重点要求

1. 了解解析几何研究的对象和方法。

2. 掌握有向线段的概念及运算，分清有向线段的长度

与数量（值）的区别。

复习和作业：

课本1—5页；5页练习第1，2，3，4题。

第二讲 平面直角坐标系、距离公式

主要内容

1. 平面直角坐标系。
2. 课本第8页例1，2。
3. 平面上两点间的距离公式。

4. 结合课本10页例2介绍解析法。解析法就是利用代数方法证明几何问题的方法。证明时，首先要选取适当的直角坐标系，在所选的坐标系下，根据已知图形的性质设定已知点的坐标；再利用解析几何的基本公式推证几何定理，或计算几何问题。平面几何的某些定理和计算题，有时用解析法证明，是比较简单的。在以后的内容里，将会遇到许多这方面的例子。

复习和作业

课本6—11页；18页第1，2，3(1)、(2)，5，8，9题。

第三讲 定比分点（一）

主要内容

1. 定比分点的定义。
2. 求定比分点的公式。
3. 课本13页例题1—3。

注意：共线三点中，已知其中任两点的坐标及其中两条

不同的有向线段的数量之比时，均可求出第三点的坐标。
例如，如图1—1，课本例2也可采取如下解法。

$$\text{解：} \because \frac{|P_2P|}{|P_1P_2|} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{|P_1P_2|}{|P_2P|} = 3.$$

又 P_1P_2 与 P_2P 之方向相同，

$$\therefore \frac{P_1P_2}{P_2P} = 3.$$

又 P_2 为分点，

$$\therefore 3 = \frac{-1+3x}{1+3}, \quad x = \frac{13}{3},$$

$$0 = \frac{-6+3y}{1+3}, \quad y = 2.$$

$$\therefore P \text{ 点的坐标是 } \left(\frac{13}{3}, 2 \right).$$

又例如，如图1—2，已知 A 点的坐标为 $(3, 7)$ ， M 点的坐标为 $(4, 3)$ ， M 为 AB 线段的中点，求 B 点的坐标。

解：设 B 点的坐标为

$$(x, y),$$

$$\text{则 } 4 = \frac{3+x}{2},$$

$$3 = \frac{7+y}{2}.$$

解之， $x = 5, y = -1$ 。

$\therefore B$ 点的坐标为 $(5, -1)$ 。

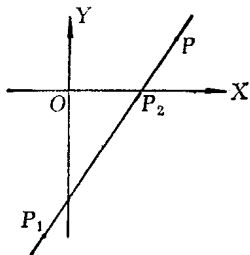


图 1—1

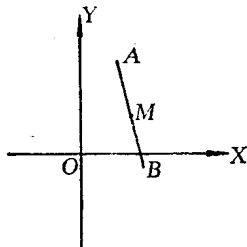


图 1—2

复习和作业

课本11—14页；19页第11，12，13题。

第四讲 定比分点(二)、三角形的面积

主要内容

1. 复习定比分点公式，求质点重心的坐标，课本14页例题4,5.

2. 三角形面积公式，课本17页例1、2.

说明：

1. 利用定比分点公式可以证明三角形三条中线交于一点。

证明：如图1—3，设三角形的顶点是 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ 、 $C(c_1, c_2)$ ；则三边 BC 、 CA 、 AB

之中点为 $M_1\left(\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}\right)$ 、 $M_2\left(\frac{c_1+a_1}{2}, \frac{c_2+a_2}{2}\right)$ 、

$$M_3\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

在 AM_1 上取 P_1 ，使 $\frac{AP_1}{P_1M_1} = 2$ ，

则 P_1 之坐标为 $\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ 。

在 BM_2 上取点 P_2 ，使 $\frac{BP_2}{P_2M_2} = 2$ ，

则 P_2 之坐标亦为 $\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$ 。

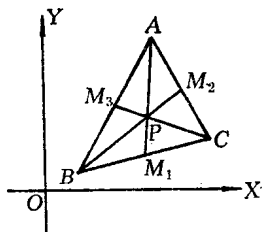


图 1—3

同理在 CM_3 上取 P_3 , 使 $\frac{CP_3}{P_3M_3}=2$.

则 P_3 之坐标仍为 $(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3})$.

$\therefore P_1, P_2, P_3$ 重合, 设为 P ,

即 AM_1, BM_2, CM_3 交于一点 P , 亦即三角形三中线交于一点(重心), 且交点之坐标为

$$(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}, \frac{a_2+b_2+c_2}{3}).$$

2. 由三角形的面积公式可以推广到计算四边形的面积以至凸 n 边形的面积.

例如有四边形 $ABCD$ (图1-4), 顶点的坐标为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ 、 $D(x_4, y_4)$, 连结 BD , 分四边形为二个三角形, 即 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$.

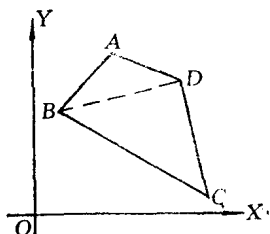


图 1-4

$$\text{则 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_4 - x_4 y_2) + (x_4 y_1 - x_1 y_4)],$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + (x_4 y_2 - x_2 y_4)].$$