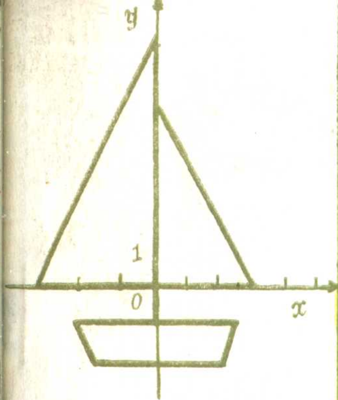
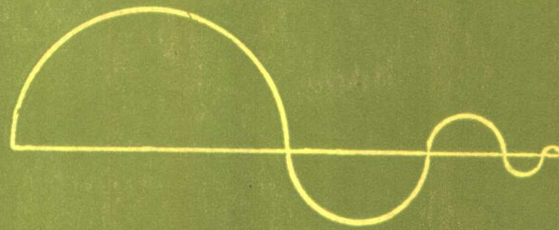
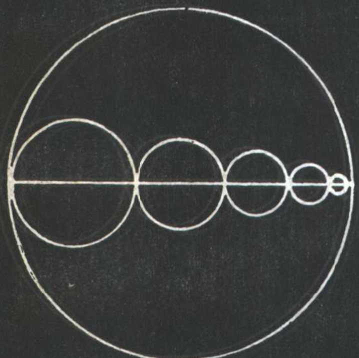
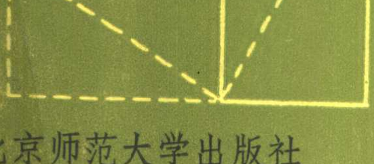


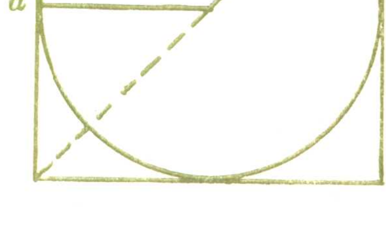




中学数学实验教材

第四册　下





北京师范大学出版社

中学数学实验教材

第四册（下）

中学数学实验教材编写组　编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

航天部五院印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：9.5　字数：206千

1985年5月第1版　　1985年5月第1次印刷

印数：1—10，300

统一书号：7243·267　　定价：1.30元

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章。尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普通实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识。对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大或没有普遍意义和实用价值或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简

或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系。灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆，基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。数学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转

折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织"中学数学实验教材编写组"，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导，在北京景山学校，北京师院附中，上海大同中学，天津南开中学，天津十六中学，广东省实验中学，华南师院附中，长春市实验中学等学校试教过两遍，在这个基础上，编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一《中学数学实验教材》，正式出版，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组

一九八一年三月

目　　录

第一章　数列和数列求和

§1　数列的概念

1.1　数列的定义

首先让我们再来看一看人类最先认识的数——自然数：

1，2，3，4，…，n，$n+1$，…，它们是一串依次排列的数，从1开始，逐次加1至无穷，这就是本节要讲的数列的一个原始的例子．下面再举几个数列的例子：

例 1　在自然数里，把被3整除，被3除余1，被3除余2的那些数，分别由小到大排列成数列．

解：被3整除的数：3，3×2，3×3，3×4，…，$3n$，$3(n+1)$ …；

被3除余1的数：$3+1$，$3\times2+1$，$3\times3+1$，$3\times4+1$，…，$3n+1$，$3(n+1)+1$，…；

被3除余2的数：$3+2$，$3\times2+2$，$3\times3+2$，$3\times4+2$，…$3n+2$，$3(n+1)+2$，…．

例 2　某人考察，一对兔子经过一年的繁殖，总共可以有多少对兔子，假设兔子的生殖力是这样的：每一对兔子每一个月可以生一对兔子，并且兔子在生出两个月以后就具有生殖后代的能力，在各月份里观察到的兔子的对数如下表所示：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

设n代表月份，u_n代表该月内兔子对数.在第一个月里，第一对兔子生了一对后代，因此$u_1=2$， 在这两对中，只有第一对能够在下一个月里生一对兔子，所以$u_2=3$，以后各月的兔子总对数除了上一个月的兔子总对数外，再加上其中能够在这个月产生后代的兔子对数，即前一个月的兔子的总对数，因此以后各月的兔子总对数可以由公式：

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2},\quad (2<n\leqslant 12)$$

计算出来.

例3 试将$\frac{1}{7}$的准确到$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，…的不足近似值和过剩近似值分别排成数列.

解：将$\frac{1}{7}$化成无限循环小数得到$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$. 如果分别按去尾法和进一法舍取近似数，就是说，取$0.\dot{1}4285\dot{7}$前n个数位上的数码而把它后面尾部数码都舍去，这样得到的有限小数u_n^-叫做$\frac{1}{7}$的准确到$\frac{1}{10^n}$的不足近似值，而把$u_n^+=u_n^-+\frac{1}{10^n}$叫做$\frac{1}{7}$的准确到$\frac{1}{10^n}$的过剩近似值.

由$\frac{1}{7}$的准确到$\frac{1}{10^n}$的不足近似值组成的数列是

0.1，0.14，0.142，0.1428，0.14285，…，

由$\frac{1}{7}$的准确到$\frac{1}{10^n}$的过剩近似值组成的数列是

$0.2，0.15，0.143，0.1429，0.14286，\cdots.$

显然有，

$$0.1<0.14<0.142<0.1428<0.14285<\cdots<\frac{1}{7}<\cdots$$

$$0.14286<0.1429<0.143<0.15<0.2,$$

并且，

$$\left|u_n^- - \frac{1}{7}\right|<\frac{1}{10^n}, \quad \left|u^+_n - \frac{1}{7}\right|<\frac{1}{10^n}.$$

现在我们可以给数列下个定义如下：

定义 一串依次排列的数a_1，$a_2,\cdots,a_n,\cdots$叫做数列。

数列中的数，叫做数列的**项**，用a_n表示，每一项的位置序数n叫做该项的**指标**，通常写在a的右下角，故也叫**下标**。数列用符号$\{a_n, n=1, 2,3,\cdots\}$表示，或简写为$\{a_n\}$。

依定义，数列就是对每一个自然数n指定一项a_n，换言之，数列就是自然数的函数。

通过前面的例子知道，我们可以用以下几种方式给出一个数列：

（1）给出一个以指标n表示数列的任意一项a_n的公式，这公式叫做数列的**通项公式**。例如在例1中，数列的通项公式分别是

$$a_n=3n,\ b_n=3n+1,\ c_n=3n+2,\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

（2）有的数列从某一项开始能够用在它前面的k个项表示出来。这个表达式，叫做**递归方程**。例如例2中的数列，由两个初始值$u_1=2,u_2=3$和一个递归方程：

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2},\quad (n=3,\ 4,\ 5,\cdots,12)$$ 给出。

（3）有的数列直接用语言描述它的a_n项，用来作一般性的讨论，如例3中的数列。

1.2 数列的种类及其定义

（1）**有穷数列和无穷数列**：有末项的数列叫做**有穷数列**，无末项的数列叫做**无穷数列**。如例2的数列是有穷数列，例1、例3的数列是无穷数列。

（2）**单调数列和摆动数列**：数列$\{a_n\}$中的项，若满足不等式

$a_{n+1}\geqslant a_n$，（$n=1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$），那么数列叫做**不减的**，

如果 $a_{n+1}>a_n$，（$n=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$），那么数列叫做**递增的**，

如果 $a_{n+1}=a_n$，（$n=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$），那么数列叫做**常数列**，

如果 $a_{n+1}\leqslant a_n$，（$n=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$），那么数列叫做**不增的**，

如果 $a_{n+1}<a_n$，（$n=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$），那么数列叫**递减的**，

以上各种数列统称为**单调数列**。

数列$\{a_n\}$中的项，如果总有一些项大于前面的项，又总有一些项小于前面的项，那么数列叫做**摆动数列**。

例如：

数列$\{(-1)^{n+1}\}$：$1, -1, 1, -1, \cdots$，

数列$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}(n\text{是奇数})\\ \dfrac{n}{n+1}(n\text{是偶数})\end{cases}$：$1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{6}{7}, \cdots$，

数列$\{(-1)^n n\}$：-1，2，-3，4，…等，都是摆动数列.

（3）有界数列和无界数列

有穷数列一定有最大项和最小项，无穷数列就不一定有此性质。无穷数列可分成有界数列和无界数列.

定义 任何一项的绝对值都小于某一正数，即$|a_n|<M$（$M>0$）的数列叫做**有界数列**；没有这样正数存在的数列叫做**无界数列**.

例如，数列$\{(-1)^n n\}$和$\{n+(-1)^n n\}$都是无界数列.

数列$\left\{(-1)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}$是有界数列，因为

$$|a_n|=\left|(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right|=1+\frac{1}{n}\leqslant 2,\quad (n=1,$$

2，3，4，…）.

若数列递增，并且所有$a_n\leqslant M$（定数），则称**数列有上界**M。

推论1 递增有上界数列一定是有界数列.

若数列递减，并且所有$a_n\geqslant M$（定数），则称**数列有下界**M.

推论2 递减有下界数列一定是有界数列.

推论3 有穷数列一定是有界数列.

图示数列的最简单的方法是直接把点a_1，a_2，a_3，…标在数轴上，这种图象可以清楚地表示数列变化的状态和趋势．下图（图1.1）是几个数列的图象

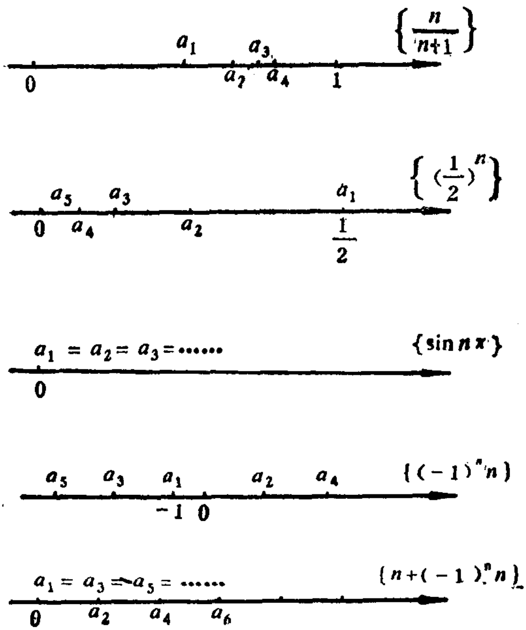


图 1.1

习题1—1

1. 自然数里的质数由小到大排成一个数列，试依次写出它的前10个质数。

2. 用通项公式表示由小到大排列着的（1）偶数数列，（2）奇数数列。

3. 试写出下列各数列的通项公式

（1）1^2, 2^2, 3^2, 4^2, $\cdots$;

（2）1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $\cdots$;

(3) $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, …;

(4) $\frac{1\cdot3}{2\cdot4}$, $\frac{3\cdot5}{4\cdot6}$, $\frac{5\cdot7}{6\cdot8}$, $\frac{7\cdot9}{8\cdot10}$, …;

(5) $\frac{10}{3}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{30}{27}$, $\frac{40}{81}$, …;

(6) 1, $1\cdot2$, $1\cdot2\cdot3$, $1\cdot2\cdot3\cdot4$, …;

(7) -1, 1, -1, 1, -1, …;

(8) 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, …;

(9) $\frac{1}{1\cdot2}$, $-\frac{1}{3\cdot4}$, $\frac{1}{5\cdot6}$, $-\frac{1}{7\cdot8}$, ….

4. 根据下列各数列的通项公式，写出它的前10项.

(1) $a_n=\cos n\pi$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$;

(2) $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$;

(3) $$f(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & (n\text{为奇数}),\\[2ex] \dfrac{n}{n+1} & (n\text{为偶数}).\end{cases}$$

5. 试将所有整数排成一个数列，并且用通项公式表示出来.

6. 数列的通项公式是

$$f(n)=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad (n=1, 2, 3,$$

4，…），

（1）求$f(1)$，$f(2)$；

（2）求证$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$．

7．判断下列各数列的类型并图示它前5项。

（1）$a_n=1-2n$，$(n=1, 2, 3, \cdots, 10)$；

（2）$a_n=\dfrac{2n+1}{n}$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$；

（3）$a_n=\dfrac{(-1)^n 2^n}{4}$，$(n=1, 2, \cdots, 5)$；

（4）$a_n=\dfrac{(-1)^{n+1} n}{n+1}$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$；

（5）$\sqrt{2}$的准确到1，0.1，0.01，…的过剩近似值。

（6）$a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{n}$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$；

（7）$a_n=(1)^n\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^2$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$；

（8）$a_n=\dfrac{2n^2-3}{n}$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$；

（9）$a_n=\dfrac{-2n^2-3}{n}$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$；

（10）$a_n=\operatorname{tg}\dfrac{n\pi}{3}$，$(n=1, 2, 3, \cdots)$．

8．数列的通项公式是

$$a_n=2n^2-3, \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

求数列的第5项，下面三个数：84788、32352和72197中，哪个数是数列中的项，是第几项？

§2 数列求和举例

在本节，我们要复习第一册已经学习过的两个简单而重要的数列，即等差数列和等比数列，同时通过例题来说明几种常用的求数列前 n 项和的方法.

如果一个数列，从第二项起，每一项减去它的前面的一项所得的差都等于同一个常数，那么这个数列叫做**等差数列**，这个常数叫做等差数列的**公差**，用符号 d 表示. 等差数列的通项公式是

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

它的前 n 项求和公式是

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

或 $$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

我们已在第一册给出上面求和公式的推导过程，现在建议读者独立地把它们推导出来，在通项公式与求和公式中共包含了五个数量：a_1，d，n，a_n 和S_n. 如果问题给出了其中三个数量，那么其余两个数量便可由它们解出来.

例 1 在数轴上有两个点 A（4.5）和 B（12.5），在其间插入四个等间隔的点，求这些点的坐标.

解：在 A 和 B 二点之间插入四个等间隔的点后，这六个点的对应坐标成等差数列，

$\because$ $a_1 = 4.5$，$a_6 = 12.5$，$n = 6$，

$\therefore$ $12.5 = 4.5 + (6-1)d$，

解得 $d = 1.6$.

所求四个点的坐标分别是

6.1，7.7，9.3，10.9.

定义 给出两个数，其间插入一个数，使成等差数列，被插入的数叫做这二数的**等差中项**.

推论 若a，b，c三个数成等差数列，则等差中项

$$b=\frac{a+c}{2}.$$

事实上，依定义有

$$b-a=c-b,$$

移项，得

$$2b=a+c$$

即
$$b=\frac{a+c}{2}.$$

例 2 在甲地有48根电杆，从离甲地1000米的地方树立第一根电杆，以后每隔15米树立一根电杆，载重汽车每次只能拖运三根电杆，问由一辆汽车去完成任务至少需要行驶多少公里？

解：汽车需运电杆 $48\div3=16$ 次才能完成任务，所以，$n=16$. 设a_n为第n次拖运电杆再返回原地所行驶的路程，依题意$\{a_n\}$是等差数列，且知

$a_1=2060$，$d=90$，$n=16$，

$$\therefore\quad S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$=16\times2060+\frac{16\times15}{2}\times90$$

$=43760$（米）$=43.76$（公里）.

答：汽车需行驶43.76公里，才能完成任务.