天平的数学与数学天平

陈培德　著

SHUXUECHUAN BOCONGSHU

数学传播丛书

中国数学会数学传播委员会审定

辽宁教育出版社

数学传播丛书

天平的数学与数学天平

中国数学会数学传播委员会审定

陈培德　著

辽宁教育出版社

1998年·沈阳

图书在版编目（CIP）数据

天平的数学与数学天平/陈培德著．—沈阳：辽宁教育出版社，1998.8

（数学传播丛书）

I[illegible] 7—5382—4033—0

Ⅰ．天… Ⅱ．陈… Ⅲ．搜索论—普及读物 Ⅳ．O229

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 13281 号

辽宁教育出版社出版
（沈阳市和平区北一马路 108 号 邮政编码 110001）
沈阳七二一二工厂印刷　辽宁省新华书店发行

开本：787×1092 毫米 1/32　字数：140 千字　印张：$7^3/_4$　插页：2
印数：1—1 000 册
1998 年 8 月第 1 版　　1998 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：杨　力　谭　坚　　责任校对：李　笑
封面设计：沈　放

定价：10.00 元

内 容 提 要

假币问题是一类特殊的搜索问题。给了一架不带砝码的天平和一组外观相同真假混杂的硬币，用天平把重量与真币不同的假币全部找出，所需要的最小称次是多少？最简单的情形，确知恰有一假币，是经典的且已众所周知，甚至在中学生中也广泛流传。但除此以外都还远没有彻底解决。乍看起来，问题似乎很简单，每人都能多少作点初步结果。但最小化称次的要求是苛刻的，吸引了在各种领域的数学工作者的注意，包括组合数学、动态规划、图论、信息论和概率论等方面的数学工作者。本书介绍这类问题某些侧面最近的进展，当然，绝大多数问题仍未彻底解决，以吸引包括大、中学生中的数学爱好者的注意。

Summary

Counterfeit Coins Problems are special kind of Search Problems. Given a balance scale without weights and a set of coins, good and counterfeit mixed; to find out all counterfeit coins by weighing some of them in the balance, what is the minimum number of weighings? The simplest case when there is exactly one counterfeit coin is classical and famous even to middle school students. But otherwise, the problems are still far from their final solution. At first sight, the problems look rather simple, every one can do part of them, more or less. But the requirement of minimizing the number of weighings is really sharp which attracts the attention of mathematicians working in various fields such as combinatory、 dynamic programming、 graph、 information and probability. In this book, we introduce some recent progress in some aspect of these problems, but of course much more of them still remain open, to draw the attention of young mathematical lovers including college and middle school students.

前言

“现有同一规格的十三个硬币，其中十二个有同样的重量，而另一个——假的——有不同的重量（并且不知道是比真的轻还是重）。用没有砝码的天平来称时，能发现假硬币并查明它是比其他的硬币轻或重，最少需要称多少次？”就是一道把天平和数学联系起来的趣味数学问题。华罗庚教授在 50 年代初曾用它来启迪数学研究所年轻学者的思维，并迅速传播到包括中学生在内的广大数学爱好者中。

1959 年苏联 Б.А.柯尔詹姆斯基（Кордемский）所著《趣味数学》（Математическая смекалка，中文选译本由张继武、程韬译，1961 年，少年儿童出版社出版）收进了这一问题，成为其问题 277（3）的一部分。Д.О.什克利亚尔斯基（Шклярский），Н.Н.钦佐夫（Ченцов），И.М.雅格洛姆（Яглом）合著的《初等数学的定理和问题选编》也收进了这一问题，成为其问题 6.а)。1960 年 А.М.雅格洛姆和 И.М.雅格洛姆合著的《概率与信息》（Вероятность и Информацщя，中译本由吴茂森译，1964 年，

上海科学技术出版社出版）用了大半章的篇幅，从信息论的角度详尽地分析、讨论了这一问题及其推广“n 个硬币中有一个假币”的问题，并进一步提出，“也可以假设已给的硬币中有两个或更多个假币；也还有更困难的问题，即假设假币的个数本身也是未知的。也可以认为：各假币可以有两种或更多种不同的重量。解决所有这类问题(照例是很复杂的）的钥匙就是信息论。”

在美国数学杂志《美国数学会报告》（Bulletin of the American Mathematical Society）1956 年的一期中，曾经提出了关于在硬币的总个数等于 n，而假币的个数 $N>1$ 或未知的条件下，为了发现假币并查明它是比真的轻或重（所有的假币均有不同于真币的重量的同一重量）的最少的称的次数的问题，还指出所提出的问题有实用意义。

1957 年，美国 R.贝尔曼（Bellman）在他所著《动态规划》（Dynamic Programming）一书中提出“n 个硬币中有两个假币（比真币略重）的问题”，1962 年 R.贝尔曼和 S.德列福(Dreyfus）合著的《应用动态规划》中对两个假币问题作了比较深入的讨论，提出稍加分析就可发现一个假币问题和两个假币问题在复杂程度上有着巨大的差别，后者充满了组合性质方面的困难和信息这一概念的内涵怎样才能正确理解的困难。在该书的讨论中提出最优和次优试验策略的

计算解法，并利用数字计算机算出的数值结果予以说明，但未能在理论上最终解决问题。

1963 年，S.S.凯恩斯（Cairns）在《美国数学月刊》(American Mathematical Monthly) 上发表了《天平寻优》(Balance Scale Sorting) 的文章，证明了“两个重的假币问题”有一种至多比“理想”秤次多一次的可行方案，并猜测如果硬币个数 n 满足 $3^{k-1}<n\leqslant 3^{k}$，需要称的次数为 $2k-1$，$2k$ 或 $2k+1$。1983 年，R.托吉（Tošić）在《离散数学》(Discrete Mathematics) 上发表了《两个伪币》(Two Counterfeit Coins) 的文章，把凯恩斯的结果具体化了，证明了 $n=3^{k}$ 时，可以用 2k 秤查出两个重币，$n=2\cdot 3^{k-1}$ 时可以用 $2k-1$ 秤查出两个重币，这两个次数都是不能再少的理想秤次，从而纠正了凯恩斯的猜测：当 n 满足 $3^{k-1}<n\leqslant 3^{k}$ 时，需要称的次数应该是 $2k-2$，$2k-1$ 或 $2k$。这一结果已经使大约 4/7 的整数有了最优的方案。1991 年，刘文安、丁承杰在河南师大学报上发表了“$\dot{S}$ 模型下 DC 问题的研究”又把托吉的结果推进一步：$n=3^{k}+3^{k-1}$ 时也可以用 2k 次查出两个重币，$n=2\cdot(3^{k-1}+3^{k-3})$时则可用 $2k-1$ 次查清，使有最优方案的整数所占的比例提高到 5/6 左右。这样 100 以内尚未达到理想秤次的整数就只剩下 n= 13，21，22，37，38，61，62，63，64，65，66 这 11 个了。

在学习刘、丁文章的过程中，安鸿志给出了四秤查清 13 个硬币中两个假币的方法。随后，相继发现 22，38，66 的理想秤次都可以达到，100 以内全解决了，这样一来，有最优方案的整数所占的比例提高到 99.4%左右，而且找到了造成新困难的关键性整数序列 115，198，344，595，1031，1786，3093，5357，9279，……，每增加一位数字（扩大十倍），只增加四个或五个难点，只要耐心计算，几乎总是可以逐个解决的，并未遇到不可克服的障碍。信息论在“两个假币问题”这一系列进展中并未起多大作用，需要的只是一些初等组合分析，初等图论中最简单的概念和常规方法，只是计算繁杂一些而已。当然，信息论极为简单地提供了“信息下界”（即理想的最小秤次）作为目标，告诫人们如果你已经实现了这一目标，就是最优的了，不需要去寻找“突破”信息下界的更小秤次，那将是徒劳无益的，这一重大作用不能抹煞。

在基本解决“两个重的假币问题”以后，自然而然就会去考虑三个假币、四个假币等所谓“假币个数固定”的问题，发现其复杂化程度不亚于从一个假币到两个假币的转化。以第一秤为例，一个假币时，以每盘上$\left[\frac{n}{3}\right]$（离$\frac{n}{3}$最近的整数）个最佳，两个假币时也一样，但达到这一共同结论的依据是不同的，后者需要解一个二次代数方

程，不过碰巧这个二次方程很好解。到了三个假币的情形，就需要解三次代数方程，假币个数越多，确定首秤上盘最佳币数所需要解的代数方程次数就越高，也就越复杂，而且“假币个数固定”的提法，固定在 1，2，3 等比较小的整数时，还可以理解，固定在大整数就没有实际背景了。一大批硬币，混进一小批假币，有什么理由认定假币的个数就是 47，而不是 46，也不是 48？还不如干脆假定假币的个数本身也未知，更有现实意义。

“假币个数未知”的问题，等价于 n 个硬币有两种不同的重量，如何用天平把重币和轻币分开，且使用天平的次数最少。当然像雅格洛姆提出的，各假币可以有两种或更多种不同的重量，加上真币是一种重量，如何用天平把这几种不同重量的硬币分开，且使用天平的次数最少。这些就是本书所要讨论的“天平数学”的主要内容。雅格洛姆认为这几个问题会比假币个数固定更加困难，而且硬币重量的种类越多，难度越大，并断言解决这类问题（照例是很复杂）的钥匙，就是信息论。这些观点实在难以苟同。

本书的讨论将显示，天平有它的优势和特长，如果问题的提法有利于最大限度发挥天平的优势，问题就容易得到彻底解决，如果问题的提法不利于发挥天平的优势，就会遇到障碍，也就是说天平有它的局限性。天平的特长是什么？优

势何在？局限性如何体现？概括地说，天平的特长就在能把不同的情况分成三种类型：平衡、左重、右重（为节省篇幅，今后将用平、左、右，或英语相应词的首母 B.L.R 简记）。“六个硬币有六种不同的重量，用天平把它们按重量从小到大次序排出来，且使用天平的次数最少”这个问题的提法就不能充分发挥天平的优势，因为在各种各样的情况中，使天平出现平衡的可能性太小（甚至有可能没有）。当然并不是做不到，而是“太浪费”了。这个问题是“排序问题”的典型例子，6 个重量不同的硬币，共有 $6!=720$ 种不同可能的次序，用只能分出大小的“对比”需要 10 次可以查清究竟是哪一个次序。按照天平的标准，$720\leqslant 3^6=729$，720 种不同情况，理应 6 次即可查清，但针对这一问题使用天平，天平也只能起对比的作用，需要 10 次，浪费了 4 次。这好比用圆规求两条直线的交点一样，可能但费劲。

回到我们所要讨论的问题，n 个硬币，k 种不同的重量，什么样的 k 最能发挥天平的特长呢？$k=3$。两个硬币有三种不同的重量，在谁轻谁重一无所知的情况下，当然假定每一个硬币取轻、中、重三种重量的可能性都是$\frac{1}{3}$，而且相互独立，在天平上比较，出现平、左、右的可能性也恰好都是$\frac{1}{3}$，把各种不同的可能性均匀地分

成三份（三等分）当然是使用一次天平所能达到的最高效率。$k=2$，只有两种重量，第一秤无论如何达不到这一点。至于 $k\geqslant 4$，浪费就更大，这就是天平的局限性，当 k 很大时，已经很类似于“排序问题”，天平不是最合适的工具。所以我们基本上只讨论 $k=2$、3 这两类问题。

假币个数未知，是不是比假币个数已知更难呢？当然比假币个数是 1，要难些，跟假币个数是 2 比较，就不见得了。跟假币个数不小于 3 的固定整数比较，我以为假币个数未知更容易处理，因为假币个数未知时，有“独立性”可以利用，这是初等概率论中最重要的概念之一。本书的讨论所使用的主要工具是组合方法，初等概率论，图论初步，这些都是受过奥林匹克数学培训的中学数学爱好者能够理解和掌握的内容，信息论的概念也介绍一点，有些命题用信息论的语言表述更为简明清晰，但不要求读者预先具备这方面的知识。

概括地说，天平的数学总的目标是研究如何用最少的秤次把 n 个外观上没有区别的对象按其互不相同的重量分类，局部的每一秤是研究如何从眼前的现实中通过这一秤提取最大的信息，即把现有情况总数尽可能均匀地分成三份。那么什么是数学天平呢？数学天平是现实天平的“抽象”，把现实天平中不利于数学加工的因素去掉，成为天平数学中的专用工具。这种抽象可以

有不同的表述方式，如用概率论的语言，或用图论的语言等，以适用于不同的问题，或同一问题不同的解决阶段，我们留在正文里再详细讨论。但有些共同的特点，例如数学天平总是"没有砝码的天平"*，还有天平的高灵敏度，在考察两种重量的 n 个对象（硬币）时，总是假定两种重量相差甚微（实际上是"无穷小量"），即无论 k 多大，k+1 个轻币总比 k 个重币还要重。

虽然本书包含某些首次公开发表的工作，但写作的宗旨还是面向包括中学生在内的广大数学爱好者，凡超出中学阶段数学范围的内容，像初等概率论、信息论、图论，我们在一开始或用到之处，从概念到结果都作详细介绍。为了理解本书的内容，并不需要另外查阅其他参考书。但为了帮助兴趣广泛的读者扩大知识领域，在书末列举了若干与本书讨论问题有关系的参考书目和文献。

* 当然有些数学游戏会涉及有砝码的天平，例如重量为1、2、4、8的四砝码可以量取重量为 1～15 之间的任何整数重量。我们不把它列入作为天平数学的范围，因为它只用到天平的平衡，没有充分发挥作为数学工具的作用，就像利用量角器的直边画直线、或曲边画圆弧不能算是量角器的主要功能一样。

目录

Contents