世界数学名题欣赏

不动点定理

辽宁教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

不动点定理／张奠宙，顾鹤荣著．-沈阳：辽宁教育出版社，1995重印
（世界数学名题欣赏丛书）
ISBN 7-5382-0433-4

Ⅰ．不… Ⅱ．①张… ②顾… Ⅲ．不动点定理
Ⅳ．O189.2

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第16525号

不 动 点 定 理

张奠宙　顾鹤荣　著

辽宁教育出版社出版　　辽宁省新华书店发行
（沈阳市北一马路108号）　　沈阳市第二印刷厂印刷

字数：110,000　开本：787×1092 1/32　印张：7 1/8　插页：4
印数：3,501—7,500
1989年4月第1版　　1995年12月第3次印刷

责任编辑：俞晓群　谭　坚．　责任校对：孙明晶
封面设计：李国盛　李　飞

ISBN7-5382-0433-4/G・442

定　价：8.00元
每函十三册，总定价：90.00元

内 容 简 介

本书是“世界数学名题欣赏丛书”之一。不动点定理是20世纪数学发展中的重大课题，其影响遍及整个数学界。本书以介绍布劳威尔不动点定理为主线，涉及数学分析、拓扑学、非线性分析等多种问题。作者以“欣赏”的笔调，通俗地阐发不动点定理的意义，并对同伦、同调、混沌、压缩映象等概念作了初等描述。因此，尽管不动点理论十分艰深，但是读者只要具有大专数学水平，本书是可以读懂的，而且饶有趣味。

Summary

This book is one of "a series of Appreciation of the Famous Mathematical Topics in World". The fixed point theorem is a very important topic in mathematical development of 20th century, which have profundly influenced all mathematics. The essential part of this book is to present the Brouwer fixed point theorem, from 1, 2, 3-dimension to n-dimension and infinite-dimension. At same time, it will involve a series of subjects such as mathematical analysis, topology and non-linear analysis. The authors interpret popularly the theory of fixed point with a appreciative style, and describe elementarily the concepts of homotopy, homology, chaos, contractive mapping etc. Therefore although the theory of fixed point is difficult to understand, this book will be grasped and interested for those who know college mathematics.

前 言

不动点理论是20世纪数学中的一支奇葩。半个多世纪以来，它一直是世界数学名家追逐的目标之一，其影响可以说遍及整个数学。

古老的代数方程求根，可以转化为不动点问题，设 $p(x)$是多项式，令 $g(x)=x-p(x)$，那么解方程 $p(x)=0$ 等于解 $g(x)=x$。若 x_0 满足 $g(x_0)=x_0$，即 x_0 是关于 $g(x)$ 的不动点，那么 x_0 正是方程 $p(x)=0$的根。

一般地考虑 $(-\infty, \infty)$ 上定义的连续函数 $f(x)$，那么 $g(x)=x-f(x)$的不动点也是$f(x)=0$ 的根。这时若取定 x_1，作迭代：

$$x_{n+1}=g(x_n) \qquad n=1,2,\cdots$$

如果 $\{x_n\}$ 收敛，例如 $x_n\to x_0$，那么由于 $g(x)$

也是连续函数，将有 $g(x_n)\to g(x_0)$，于是我们得到

$$x_0=g(x_0)$$

x_0 是 $g(x)$ 的不动点，x_0 于是成为 $f(x)=0$ 的根。

我们不妨看一个例子，设有二次方程 $x^2-4x-1=0$。将它改写为 $x=4+\dfrac{1}{x}$。今取 $x_1=4$，按迭代公式

$$x_{n+1}=4+\frac{1}{x_n}\qquad n=1,2,\cdots$$

我们有

$$x_1=4$$

$$x_2=4.25$$

$$x_3=4.235294118$$

$$x_4=4.236111111$$

$$x_5=4.236065511$$

……

$$x_8=4.236067978$$

$$x_9=4.236067977$$

在10位有效数字情形下，$x_{10}=x_8$，$x_{11}=x_9$。x_8 和 x_9 就近似地可看作 $x=4+\dfrac{1}{x}$ 的解，即函

数 $4+\frac{1}{x}$ 的不动点，于是 $x^2-4x-1=0$ 的近似根就得到了。

这种用迭代法求不动点的思想，当然早就有了，并非20世纪的产物。真正引人注目的不动点理论起源于荷兰数学家布劳威尔的工作。这位直觉主义数学哲学的创始人也是一位拓扑学家，1909年开始，他以《曲面上一对一的映为自身的连续映射》为题发表了一系列论文，创立了不动点理论。现在以他的名字命名的布劳威尔不动点定理（$n=2$）是：

平面内闭单位圆盘上映为自身的任何连续映射，至少有一个不动点。

这个定理惊动了整个数学界。它的假设甚少：任何闭单位圆盘上的映入自身的连续映射都行，可是结论十分明确、丰富：至少有一个不动点。其意义简直可以和高斯证明任何代数方程至少有一复根相比美。

这个定理很简单明了，但证明却相当麻烦。因为条件少，只有连续性的假设，所以微分积分一套工具用不上。你想沿用迭代法思想，可是 $f(x)$ 没有具体性质（仅知道 $|f(x)|\leqslant 1$），不能判明 $x_{n+1}=f(x_n)$ 是否收敛。布劳威尔于是另辟

蹊径，将大数学家庞加莱研究常微分方程奇点时使用的拓扑学方法引过来，用基本群（同伦群）解决了这一课题（$n=2$情形）。

拓扑学的同伦和同调方法，是20世纪数学中的两个主要工具，不动点理论得力于它，同时也刺激它获得迅猛发展。本书在介绍布劳威尔定理证明时，从“欣赏”的角度介绍这两个基本工具，窥其一斑，也许可使不熟悉拓扑学的读者得以领略其概貌。

作为布劳威尔不动点定理的继续，美国数学家莱夫希兹在1923年发现了更深刻的不动点定理，现称为莱夫希兹不动点定理，这是一个新的高峰，我们将在第五部分中介绍它。这一定理还是解决不动点的有无问题。1927年，丹麦数学家尼尔森发表文章研究不动点个数问题，创始了不动点类理论，提出尼尔森数概念。截至1962以前，能够计算尼尔森数的映射只是很简单的情形，我国的江泽涵、姜伯驹、石根华等人大大推广了可计算尼尔森数的情形，并得出莱夫希兹不动点定理的逆定理，这是很好的工作。

不动点理论的另一个发展方向是不限于欧氏空间中多面体上的映射，而考察一般的距离空间或线性拓扑空间上的不动点问题。最先给出的结

果是波兰数学家巴拿赫，他于1922年提出的压缩映象原理发展了迭代思想。他将$x_{n+1}=f(x_n)$中的x_n可看成距离空间中的点列，f仍是这一空间上到自身的映射，如果f满足压缩条件

$$\rho(f(x),f(y))\leqslant a\rho(x,y),\quad 0\leqslant a<1$$

$\rho(x,y)$表示x与y之间的距离，那么f必有唯一的不动点，这一定理证明并不难，但用处极广，微分方程、函数方程、隐函数理论中的许多存在性与唯一性问题均可归结为此定理的推论。这一定理在所有泛函分析教科书中均有介绍，本书也将加以陈述。

大家知道，欧氏空间是有限维的线性赋范空间，我们能否在无限维空间的单位球上得出布劳威尔不动点定理？一般是不成立的，波兰数学家肖德尔证明了：线性赋范空间凸子集C到C上的紧映射至少有一个不动点。这一定理将连续映射的条件加强为紧映射，因而，运用紧映射可用有限秩映射逼近的结果获得了不动点定理的新进展，这一定理有多种推广和应用，我们也将在第四章加以介绍。

不动点理论进入70年代又别开生面。老掉牙的区间到区间的迭代　$x_{n+1}=f(x_n)$　$x_n\in[a,b]$，$n=1,2,\cdots$，出现了意想不到的结果。1973

年4月的一天，美国马里兰大学的研究生李天岩和他的导师约克偶然研究这个区间迭代，证明了以下事实，如果区间上映射 f 有3-周期点，则对任何正整数 n 都有 n 周期点（指经过 n 次迭代后回到原处，不动点是1-周期点）。这一结果发人深思：如有了周期点，则会出现乱七八槽的现象，这时你随便从一点出发迭代，不要说 x_n 收敛某一数做不到，而且 x_n 的规律完全无法知道，呈现出一片混沌（Chaos）景象。这是不动点理论不存在情形的发展。由于它是一维的，所需准备知识不多（只要单元连续函数知识即可），所以在第一部分就来叙述它。

阅读本书，我们假定读者已有微积分和高等代数的初步知识，另外还需一些点集拓扑的知识，比较重要的，我们在本书提到时都作了一些说明。如果读者还不清楚，可参阅文献[1][10][13]。

本书是一本“欣赏”数学名题的书，并非教材。所以我们不求处处严谨，而是尽可能讲清思想，剖析证明思路，介绍数学工具。但是这也不是一本“科普”读物，而是切实的数学作品。要真正读懂，得动一番脑筋，花一些气力。

作　者

1987年11月

目 录

Contents