

白铭复 编著

物理学中的 群论方法

下 册

WULI XUEZHONGDE QUNLUNFANGFA

国际科技大学出版社

物理学中的群论方法

· 下 册 ·

白铭复 编著

国防科技大学出版社

内 容 介 绍

本书系统地讲述群论及群表示论的基本内容；着重讨论了有限群的表示，李群李代数的基本理论，半单李群李代数的分类和表示问题，群论与量子力学的关系，以及运用群论原理处理物理学中的对称性问题的一般方法。对于物理学中的常见群，如分子点群、晶体点群、空间群、旋转群、洛伦兹群、么正群等都作了详细的描述，对它们的结构和表示给出了简洁而严谨的论证与推演。

本书在陈述方式、证明补充和材料组织等方面兼顾了数学的严谨性与便于具有相当于大学物理专业高年级学生的数理基础的非数学专业读者阅读两个方面的要求；在取材方面，同时照顾了分子原子物理、固体物理、核物理、粒子物理等专业的读者对群论知识的共同的和特殊的需要。

全书分上、下册出版。上册包括对物理学中常见群的描述与推导，群论和群表示论基础，有限群的表示理论。下册包括李群李代数的表示理论，置换群的表示，空间群的表示，群论与量子力学的关系（和应用）。书末附有各习题。

本书可作为高等学校物理和化学方面有关专业的高年级本科生以及研究生的群论教材或参考书，也可供物理、化学、数学工作者或教师参考。

物理学中的群论方法

下 册·

白铭复 编著

责任编辑 马立群

封面设计 侯 云

国防科技大学出版社 出版

湖南省新华书店发行

国防科技大学印刷厂印装

开本：787×1092 $1/32$ 印张：16 $3/16$ 字数：386千字

1986年12月第1版 1986年12月第1次印刷 印数：0,001—3,000册

统一书号：15415·017

ISBN 7—81024—001—3

O·1 定价：3.30元

说 明

本书全书的参考书目已集中附于上册的末尾，因而下册不再列出。

为了使读者更好地理解书中各章的内容和便于进行自我检验，我们编写和精选了适量的习题，集中附于下册末尾。其中少数题目是对正文内容的扩充和引伸，可当作进行某些专题研究的导引；在将本书作为教材使用时，可选用难度适当的题目留给学生练习。

况蕙孙教授对于本册的撰写提出了重要的建设性意见，并审阅了全书。在此谨向况蕙孙教授致以诚挚的谢意。

作 者

1986年9月

目 录

第五章 李群的表示

§ 21 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的不可约表示	1
21.1 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的生成元与局部表示	1
21.2 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的局部表示的推导	3
21.3 将局部表示延拓为整体表示	7
21.4 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的单纯特征标	9
21.5 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的不可约表示矩阵	11
§ 22 转动算子与角动量	15
22.1 态矢空间中的转动算子	15
22.2 角动量算子的不变子空间	19
22.3 角动量的耦合与表示 $D^{(j)} \otimes D^{(l)}$ 的约化	21
22.4 C—G 系数的明显公式	26
§ 23 李群的李代数	32
23.1 无穷小生成元与无穷小算子	32
23.2 正则参数与指数映射	36
23.3 李代数	39
23.4 李群与它的李代数	44
§ 24 半单李代数的分类	47
24.1 半单性的嘉当 (Cartan) 准则	47
24.2 半单李代数的嘉当分解与标准基	50
24.3 根的性质	55
24.4 标准基的对易式 结构常数	65
24.5 根图与分类	68
24.6 单纯根和邓金 (Dynkin) 图	77
24.7 典型群	80
§ 25 半单李群李代数的表示	87
25.1 例: $SL(2)$ 与 $SU(2)$ 的表示	87
25.2 完全可约性定理	92
25.3 表示的权	93

25.4	不可约表示的首权	99
25.5	不可约表示的角图	108
25.6	表示的直积	110
§ 26	半单李代数的不可约表示的构造	114
26.1	基本表示	114
26.2	张量表示	115
26.3	单李代数的初等表示	118
26.4	典型李代数的表示	124
§ 27	卡塞米尔(Casimir)算子和特征标	134
27.1	半单李群(李代数)的卡塞米尔算子	134
27.2	紧致半单李群的共轭元素类	139
27.3	紧致半单李群的单纯特征标	140
27.4	不可约表示的维数及权的重数	143
27.5	不可约表示的直积的约化	147
§ 28	例—— $SU(3)$ 、 $SO(4)$ 、 $SO(3,1)$ 的表示	153
28.1	$SU(3)$ 的表示	153
28.2	$SO(4)$ 的表示	160
28.3	$SO(3,1)$ 的局部表示 (L_p 的表示)	165

第六章 群论与量子力学

§ 29	一些简单的应用例	176
29.1	物理张量的独立分量	176
29.2	分子中的振动模式	181
§ 30	对称性与守恒定律	194
30.1	李群的生成元与守恒的力学量	194
30.2	对称群与完整力学量组	200
§ 31	对称性与简并	204
31.1	对称简并与偶然简并	204
31.2	时间反演简并	208
§ 32	对称性与能量的本征值问题	220
32.1	对称基(不可约基)的正交性	220
32.2	对称基下的能量本征方程	221
32.3	对称性与微扰论	223
§ 33	对称性与力学量的矩阵元	228

33.1	算子的变换	228
33.2	不可约张量算子	230
33.3	Wigner—Eckart 定理	238
33.4	选择定则与强度定则	241
第七章 置换群的表示		
§ 34	杨 (Young) 图	246
34.1	台	246
34.2	盘	248
34.3	标准盘	250
§ 35	杨算子与 S_n 的不可约表示	255
35.1	S_n 的群代数与杨算子	255
35.2	群代数 $\mathcal{A}$ 的分解与 S_n 的不可约表示	262
§ 36	S_n 的单纯特征标	270
36.1	S_n 的单纯特征标与杨算子	270
36.2	佛罗比纳斯 (Frobenius) 公式	276
36.3	不可约表示的维数	279
36.4	单纯特征标的递推公式	281
36.5	分支律	286
36.6	对偶表示	288
§ 37	S_n 的不可约表示的标准矩阵	292
37.1	标准矩阵的构造	292
37.2	标准矩阵与标准基	302
37.3	对偶表示的标准矩阵 对偶基	306
§ 38	置换群的表示的外积	309
38.1	外积的概念	309
38.2	外积的特征标	314
38.3	外积的约化 Littlewood 规则	317
§ 39	置换群与线性李群的关系	321
39.1	线性群的张量表示	321
39.2	张量表示的约化	325
39.3	$SU(n)$ 的不可约张量表示	342
39.4	$SU(n)$ 的 $C—G$ 级数	351
§ 40	对多电子体系的应用	358

40.1	多电子体系状态的分类	358
40.2	原子 LS 耦合的分类基	359
40.3	$D^{(1)}$ 的 L 结构与原子谱项	367
40.4	波函数的构造方案 亲态比	376
40.5	量子数 α 的意义和选取	384
40.6	原子的 jj 耦合分类基	395
40.7	高位数(先辈数)	401

第八章 空间群的表示

§ 41	格群的不可约表示	404
41.1	格群的不可约表示	404
41.2	波矢空间	408
41.3	布里渊(Brillouin)区	411
§ 42	诱导表示	417
42.1	诱导表示的概念	417
42.2	诱导表示的矩阵和特征标	419
42.3	诱导表示的不可约性判据	421
§ 43	空间群的不可约表示	424
43.1	由波矢群的不可约表示诱导空间群的不可约表示	424
43.2	波矢群 $G(k)$ 的不可约表示 $A(k, \nu)$	429
43.3	群 G_k 的结构	432
43.4	空间群的不可约表示的标准矩阵	436
43.5	例: 空间群 O_h^3 的表示	439
§ 44	晶体中的电子态	448
44.1	晶体中电子状态的分类	448
44.2	能带	451
44.3	自由电子的能带和对称化波函数	456
44.4	自旋与双群	468

习 题

第五章 李群的表示

在 8.2 小节中已经介绍了连续群的概念，其特点是可以参数化，而群内的乘法和逆元运算在这种参数下是用连续函数来表示的。如果这些函数不但连续而且还是可微（严格讲，是三次可微^[15]）的，则这种群又称为李群。已经证明，一个群如能被连续的参数化，则也能被可微的参数化（这就是所谓希尔伯特“第五问题”）。因此，我们这里不必区分连续群和李群，而可以直接利用参数（乘法函数）的可微性。

本章将从被研究得很充分的旋转群开始，阐述李群的表示理论。在物理学中重要的是李群的局部结构和表示，因而在李群及其表示的一般性讨论中我们将限于其局部性质而不涉及整体性质。为了降低表述的抽象性，讨论将针对线性李群进行。由于每个局部李群都同构于一个局部线性李群，这样做本质上并没有牺牲普遍性。李群的局部性质是由其无穷小生成元（或无穷小算子）的代数结构——李代数决定的，这样李代数便自然成为研究李群的局部性质和表示论的重要工具。我们将用李代数方法来表述半单纯群的分类和表示论的主要结果，并按照 G·拉卡(Giulio Racah)在为物理学家所作的精緻的总结中所采取的思路。最后，关于群 $SU(3)$ 、 $SO(4)$ 和 $SO(3,1)$ 的表示将做为解释一般理论的例子给出。

§ 21 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的不可约表示

21.1 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的生成元与局部表示

在 §4 和 §7 中已经表明，这两个群的无穷小生成元满足同样

的对易关系 ((4.14)和(7.15))，因而在单位元的邻域有相同的乘法函数 (见式(4.15))，是局部同构的。它们的局部表示也是相同的，可以统一考虑。为确定起见，象在§4和§7中一样，我们仍将参数取为转动矢量 α 。

设 $\hat{A}(\alpha)$ 是 $SO(3)$ 的任一(可微的)表示，则重复对(4.9)式的推导过程可得

$$\hat{A}(\alpha) = e^{\hat{A}_1 \alpha_1 + \hat{A}_2 \alpha_2 + \hat{A}_3 \alpha_3} \quad (21.1)$$

其中

$$\hat{A}_i = \left. \frac{\partial \hat{A}}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha=0} \quad (21.2)$$

而同态关系要求(4.15)中的 I_i 换成 $\hat{A}_i$ 后仍然成立，再对照公式(4.12)，这必须有

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} \hat{A}_k \quad (21.3)$$

即 $\hat{A}_i$ 满足的对易关系与 I_i 的相同。反之，如果有任一满足(21.1)和(21.3)式的可微算子函数 $\hat{A}(\alpha)$ ，则有乘法规则

$$e^{\sum_i \hat{A}_i \alpha_i} e^{\sum_j \hat{A}_j \beta_j} = e^{\sum_k \hat{A}_k \left(\alpha_k + \beta_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} \alpha_i \beta_j + \dots \right)}$$

对照(4.15)便可看出，映射

$$g(\alpha) \longrightarrow \hat{A}(\alpha)$$

是同态的。即 $\hat{A}(\alpha)$ 是群的一个表示。总之， $\hat{A}(\alpha)$ 为 $SO(3)$ 之表示的充要条件是满足(21.1)和(21.3)。

表示空间在 $\hat{A}(\alpha)$ (α 跑遍零的某一邻域)下不变的充要条件是它在 $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ 下不变(由(21.1))。由此可知：表示 $\hat{A}(\alpha)$ 不可约的充要条件是表示的空间在 $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ 下是不可约的(没有在三个 $\hat{A}_i$ 下不变的真子空间)。用矩阵的语言来说，就是：矩阵组 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 不可约(不能由同一矩阵经相似变换化为同样的对角块型)。

以上分析表明, 为了得到 $SO(3)$ ($SU(2)$)的全部不可约表示(局部), 只须求出满足对易关系(21.3)的所有不可约算子(矩阵)组 $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ 。这些不可约算子(矩阵)组通过(21.1)式确定群的全部不可约表示, 而两者的表示空间是相同的。这就使寻求群的不可表示的完全集问题得到很明显的简化。

21.2 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的局部表示的推导

为了便于推演, 先对算子组 $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ 作一些变换。可将 $\hat{A}_1$ 先换成自厄算子 $\hat{J}_1$ (角动量)

$$\hat{J}_1 = i\hat{A}_1 \quad (21.4)$$

要求待定的表示为么正的(对紧致群总可以这样), 由

$$\hat{A}(\alpha) = e^{-i(\hat{J}_1\alpha_1 + \hat{J}_2\alpha_2 + \hat{J}_3\alpha_3)} = e^{-i\hat{J}\cdot\alpha} \quad (21.5)$$

可见, $\hat{A}^+ = \hat{A}^{-1}$ 要求 $\hat{J}_i$ 是自厄的, 即

$$\hat{J}_i^\dagger = \hat{J}_i \quad (21.6)$$

由(21.3)和(21.4)式, $\hat{J}_i$ 的对易式应为

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\sum_k \epsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad (21.7)$$

或

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}$$

再令

$$\begin{cases} \hat{J}_+ = \hat{J}_1 + i\hat{J}_2 \\ \hat{J}_- = \hat{J}_1 - i\hat{J}_2 \end{cases} \quad (21.8)$$

则由(21.7)式又可求得三个新算子 $\hat{J}_+$ 、 $\hat{J}_-$ 、 $\hat{J}_3$ 的对易式

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_+] = \hat{J}_+ \quad (21.9)$$

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_-] = -\hat{J}_- \quad (21.10)$$

$$[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = 2\hat{J}_3 \quad (21.11)$$

且有

$$\hat{J}_+^\dagger = \hat{J}_-, \quad \hat{J}_3^\dagger = \hat{J}_3 \quad (21.12)$$

注意由 $\{\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3\}$ 到 $\{\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_3\}$ 的变换是一一的线性变换,

两者具有共同的不变子空间，所以它们同时是可约的或不可约的。因而求群的不可约么正表示的问题，现在可转化为求具有性质(21.9)、(21.10)、(21.11)和(21.12)的不可约算子组 $\{\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_3\}$ 的问题。

设 $\mathscr{V}$ 是任意一个在 $\{\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_3\}$ 下不变的不可约空间，我们来推导这组算子的可能(矩阵)形式。

首先 $\hat{J}_3$ 必有(实)本征值，设其最大本征值为 J ，在 $\mathscr{V}$ 内取属于这个本征值的一个本征矢，记为 ψ_J 。再由 ψ_J 出发在 $\mathscr{V}$ 内取矢量叙列。

$$\psi_J, \psi_{J-1} = \hat{J}_- \psi_J, \psi_{J-2} = \hat{J}_- \psi_{J-1}, \dots, \psi_{J-x} = \hat{J}_- \psi_{J-x+1} \quad (21.13)$$

这样定义的矢量每个都是算子 $\hat{J}_3$ 的本征矢，而且所属的本征值分别为 $J, J-1, J-2, \dots$ 。因为由(21.10)式知，如果 $\hat{J}_3 \psi = M \psi$ ，则必有 $\hat{J}_3 (\hat{J}_- \psi) = (M-1)(\hat{J}_- \psi)$ ，即 $\hat{J}_-$ 将 $\hat{J}_3$ 的本征矢变为 $\hat{J}_3$ 的本征矢，但所对应的本征值降1(除非 $\hat{J}_3$ 的本征矢被变为零)。又， $\mathscr{V}$ 的维数有限，叙列(21.13)必有限，其中 $(J-x)$ 为 $\hat{J}_3$ 的最小本征值，则有

$$\hat{J}_- \psi_{J-x} = 0 \quad (21.14)$$

叙列(21.13)所张成的子空间在 $\hat{J}_3$ 和 $\hat{J}_-$ 的作用下显然是不变的，不难证明，它在 $\hat{J}_+$ 的作用下也是不变的。因为由(21.9)可知， $\hat{J}_+$ 将 $\hat{J}_3$ 的本征矢仍变为 $\hat{J}_3$ 的本征矢(除非变为零)，但所属的本征值增1，所以这个子空间在三个算子 $\{\hat{J}_+, \hat{J}_-, \hat{J}_3\}$ 下不变。但按不可约的假设， $\mathscr{V}$ 没有在这组算子作用下不变的真子空间，故叙列(21.13)张成整个 $\mathscr{V}$ 空间，并形成 $\mathscr{V}$ 的一组正交基。反复利用对易式(21.11)，可得出 $\hat{J}_+$ 作用于该基矢叙列的结果

$$\begin{aligned} \hat{J}_+ \psi_J &= 0, \hat{J}_+ \psi_{J-1} = 2J \psi_J, \hat{J}_+ \psi_{J-2} = 2(2J-1) \psi_{J-1}, \\ \dots, \hat{J}_+ \psi_{J-x} &= x(2J-x+1) \psi_{J-x+1} \end{aligned} \quad (21.15)$$

再将(21.11)作用于 ψ_{J-x} , 并注意(2.14), 可得

$$-x(2J-x+1)=2(J-x)$$

解出

$$x=2J \quad (21.16)$$

可见, 基矢中的最后一个矢量是 ψ_{-J} 。不可约空间 $\mathcal{V}$ 的维数为

$$n_J=2J+1 \quad (21.17)$$

至此, 我们已经可以由(21.13)——(21.17)诸式写出不可约矩阵组 $\{J_+, J_-, J_3\}$ 的所有可能的维数和形状了。

为了得到矩阵 $\{J_+, J_-, J_3\}$ 的标准形式, 需将 $\mathcal{V}$ 的基矢(21.13)归一化。如取 ψ_J 是归一的

$$\langle \psi_J | \psi_J \rangle = 1$$

则由(21.13)、(21.12)、(21.11)和(21.15)式有

$$\langle \psi_{J-1} | \psi_{J-1} \rangle = \langle \psi_J | \hat{J}_+ \hat{J}_- | \psi_J \rangle = 2J$$

$$\langle \psi_{J-2} | \psi_{J-2} \rangle = \langle \psi_{J-1} | \hat{J}_+ \hat{J}_- | \psi_{J-1} \rangle = 2J \times 2(2J-1)$$

.....

$$\langle \psi_{J-N} | \psi_{J-N} \rangle = \prod_{x=1}^N x(2J-x+1) = \frac{N! (2J)!}{(2J-N)!}$$

或统一写为

$$\begin{cases} \langle \psi_M | \psi_M \rangle = (2J)! \frac{(J-M)!}{(J+M)!} \\ M=J, J-1, \dots, -J \end{cases} \quad (21.18)$$

可见归一化基应取为

$$\begin{cases} \varphi_M = \left[(2J)! \frac{(J-M)!}{(J+M)!} \right]^{-\frac{1}{2}} \psi_M \\ M=J, J-1, \dots, -J \end{cases} \quad (21.19)$$

J 算子在标准基(21.19)下的形式为

$$\begin{cases}
 \hat{J}_+ \varphi_M = \sqrt{(J-M)(J+M+1)} \varphi_{M+1} \\
 \quad = \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} \varphi_{M+1} \\
 \hat{J}_- \varphi_M = \sqrt{(J+M)(J-M+1)} \varphi_{M-1} \\
 \quad = \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} \varphi_{M-1} \\
 \hat{J}_3 \varphi_M = M \varphi_M
 \end{cases} \quad (21.20)$$

或写为矩阵形式

$$\begin{aligned}
 J_+ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2J} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \sqrt{2(2J-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & \cdots & \sqrt{2J} \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \\
 J_- &= \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ \sqrt{2J} & & & & \\ 0 & \sqrt{2(2J-1)} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2J} & 0 \end{pmatrix} \\
 J_3 &= \begin{pmatrix} J & & & 0 \\ & J-1 & & \\ & & J-2 & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & -J \end{pmatrix} \quad (21.21)
 \end{aligned}$$

由于开始只假定 $\mathcal{V}$ 是任意不可约表示空间，因而我们已经没有遗漏地得到了全部不可约表示。每个不可约表示可用 $\hat{J}_3$ 的最大本征值 J 来标记，由(21.17)式， J 的可取值为

$$J = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (21.22)$$

以 J 为标记的表示其维数为 $n_J = 2J + 1$ ，而其矩阵由 (21.20) 或 (21.21) 给出。

21.3 将局部表示延拓为整体表示

把 (21.21) 式代入 (21.5)，便得 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的以 J 为标记的不可约（局部）表示矩阵 $D^{(J)}(\alpha)$

$$\begin{cases} D^{(J)}(\alpha) = e^{-i(J_1\alpha_1 + J_2\alpha_2 + J_3\alpha_3)} \\ J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \quad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \end{cases} \quad (21.23)$$

把 (21.23) 说成是群的局部表示，是因为按定义要求，作为群的同态象， $D^{(J)}(\alpha)$ 须是单值的，而这一点只有在单位元的邻域内才能确保。进一步将 α 的取值范围由零点的邻域向整个参数流形进行延拓。这时， $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的情形是不同的。粗略地说，由于 $SO(3)$ 是复（双）连通的，其中的一类闭合曲线（例如参数球的直径）不能经连续变形收缩到一点（见 8.2 小节例 2）。当令 α 沿这类闭路跑一周时，尽管对 α 的每个微小变动 (21.23) 中的 $D^{(J)}(\alpha)$ 显然都是连续而光滑地单值变化的，但 α 回到原点时 $D^{(J)}(\alpha)$ 却可能达到一个新的值。而 $SU(2)$ 是单连通的 (§7)，其中的任一闭路都能在其中连续地收缩到一点。当 α 沿这种闭路跑一周时，若 $D^{(J)}(\alpha)$ 的值产生一有限改变，让该闭路连续向起（终）点收缩，最后将得出 α 的无穷小变动会引起 $D^{(J)}$ 的有限改变的错误结论。总之，由于 $SU(2)$ 是单连通的，将 (21.23) 作为它的整体表示时必是单值的，因而 (21.23) 也是 $SU(2)$ 的整体不可约表示。由于 $SO(3)$ 是双连通的，将式 (21.23) 作为它的整体表示时，有些可能是双值的（因只有两类不能经连续变形相互重合的共端点曲线，不可能出现三值的情况），因而只有单值的那些才是 $SO(3)$ 的整体不可约表示。

上面的讨论是有普遍性的。一般地说，将 k 连通的李群的

局部表示解析地延拓到整个群上去时,可能出现 k 值的情形。在此可以把表示的概念稍为扩充一下,把多值的情形称为群的多值表示(按原定义只能是单值的)。这样在 $SO(3)$ 的双值表示的应用中可以看到,多值表示与单值表示同样有用。在 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 的讨论中已经看到,局部同构的群可以有不同的整体拓扑性质(如连通性);因而李群的整体表示不能由局部表示完全决定,除非这群是单连通的。对于任意多连通的李群 G ,总存在一个与它局部同构的单连通李群 $\tilde{G}$, $\tilde{G}$ 称为 G 的通用覆盖群。 $\tilde{G}$ 与 G 有相同的局部表示,当这些局部表示对 $\tilde{G}$ 延拓为整体表示时即得 $\tilde{G}$ 的单值表示;而把它们作为 G 的整体表示时,则可能是多值的。因而可以通过作出 $\tilde{G}$ 的所有(整体)不可约表示(都是单值的)来获得 G 的全部单值或多值的(整体)不可约表示。

现在具体地研究一下作为整体表示的(21.23)的单值性问题。为此,可将 $D^{(J)}(\alpha)$ 写为

$$D^{(J)}(\alpha) = D^{(J)}(\beta) D^{(J)}(0, 0, \alpha) D^{(J)}(-\beta) \quad (21.24)$$

其中 β 是将 z 轴转到 α 方向的转动矢量(见式(2.27)),由(21.23)和(21.21)有

$$D^{(J)}(0, 0, \alpha) = e^{-iJ_3\alpha} = \begin{pmatrix} e^{-iJa} & & & \\ & e^{-i(J-1)\alpha} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{ija} \end{pmatrix} \quad (21.25)$$

对于 $SU(2)$ 来说, α 和 $(\alpha + 4\pi)$ 代表同一元素(注意,这是唯一可能产生多值问题的因素,因为 $D^{(J)}$ 作为 α 的函数表达式本来是单值的),而上式表明,当 J 为整数或半奇数时,都有

$$D^{(J)}(0, 0, \alpha) = D^{(J)}(0, 0, \alpha + 4\pi) \quad (21.26)$$

所以,所有的 $D^{(J)}(\alpha)$ 都是 $SU(2)$ 的单值表示。对 $SO(3)$ 来说, α 和 $(\alpha+2\pi)$ 代表同一元素 (§4), 由 (21.25), 有

$$D^{(J)}(0,0,\alpha+2\pi)=\begin{cases} D^{(J)}(0,0,\alpha), & \text{当 } J=\text{整数} \\ -D^{(J)}(0,0,\alpha), & \text{当 } J=\text{半奇数} \end{cases} \quad (21.27)$$

可见 J 为整数的 $D^{(J)}(\alpha)$ 是 $SO(3)$ 的单值表示, J 为半奇数的 $D^{(J)}(\alpha)$ 是 $SO(3)$ 的双值表示 ($\pm D^{(J)}(\alpha)$ 对应于 $SO(3)$ 的同一元)。

21.4 $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的单纯特征标

由 (21.24) 和 (21.25) 易得

$$\chi^{(J)}(\alpha) = \text{tr} D^{(J)}(\alpha) = \text{tr} D^{(J)}(0,0,\alpha) = \sum_{M=-J}^J e^{-iM\alpha}$$

可见特征标只是 $\alpha = |\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$ 的函数。这是因为特征标是类函数, 而在 $SO(3)$ 和 $SU(2)$ 中所有转角值相同的元属于同一类。上面的结果可以写为

$$\chi^{(J)}(\alpha) = \sum_{M=-J}^J e^{-iM\alpha} = \frac{\sin\left[\left(J+\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)} \quad (21.28)$$

对于 $SO(3)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$; 对于 $SU(2)$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ 。

§17 和 §18 中关于特征标的理论, 是针对有限群讨论的, 但除了那些当群的阶变为无穷时就失去意义的命题 (如关于不可约表示的个数和维数的定理) 之外, 大部分内容都可以推广到紧致的连续群上去。这可以从概念的定¹义和理论的论证中看出; 有些并不涉及群是有限还是无限, 有些则依赖于群上不变和的存在 (如正交性定理), 而这对于有限群和紧致的连续群是同样满足的。为了把对有限群的表述改为对紧致连续群的表述, 只须在符号上作如下代换