离散数学
学习指导

赵广利 主编

- 重点内容概要
- 典型例题
- 同步测试
- 模拟试题

大连理工大学出版社

离散数学学习指导

主编　赵广利

编者　黄　健　王春立　田玉琴

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

离散数学学习指导 / 赵广利主编 .— 大连 :大连理工大学出版社，2003. 9
ISBN 7-5611-2417-1

Ⅰ. 离…　Ⅱ. 赵…　Ⅲ. 离散数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059762 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail. dlptt. ln. cn　URL:http://www. dutp. cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　印张:11. 25　字数:281 千字
印数:1～5 000
2003 年 9 月第 1 版　2003 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:吴孝东　责任校对:刘佳月
封面设计:孙宝福

定　价:14. 80 元

谈谈如何学习离散数学

学习离散数学有两项最基本的任务:其一是通过学习离散数学,使学生了解和掌握在后续课程中要直接用到的一些数学概念和基本原理,掌握计算机科学中常用的科学论证方法,为后续课程的学习奠定一个良好的数学基础;其二是在离散数学的学习过程中,培养自学能力、抽象思维能力和逻辑推理能力,以提高专业理论水平。因此,学习离散数学对于计算机后续课程的学习和今后从事计算机科学工作是至关重要的。但是,由于离散数学的离散性、知识的分散性和处理问题的特殊性,使部分学生在刚刚接触离散数学时,对其中的一些基本概念和处理问题的方法往往感到困惑,特别是在证明一个命题时感到无从下手,找不到正确的解题思路。因此,对离散数学的学习方法给予适当的指导和对学习过程中遇到的一些问题进行分析是十分必要的。

一、认知离散数学

离散数学是计算机科学基础理论的核心课程之一,是计算机及应用专业的一门重要的基础课。它以研究离散量的结构和相互关系为主要目标,其研究对象一般是有限个或可数个元素,充分体现了计算机科学离散性的特点。学习离散数学的目的是为学习计算机专业各后续课程做好必要的知识准备,进一步提高抽象思维和逻辑推理的能力,为从事计算机的应用提供必要的描述工具和

理论基础。

1. 定义和定理多

离散数学是建立在大量定义、定理之上的逻辑推理学科，因此对概念的理解是学习这门课程的核心。在学习这些概念的基础上，要特别注意概念之间的联系，而描述这些联系的实体则是大量的定理和性质。在考试中有一部分内容是考查学生对定义和定理的识记、理解和运用，因此要真正理解离散数学中所给出的每个概念的真正的含义。比如，命题的定义、连接词（特别是单条件 P→Q)、8 个推论规则（特别是 CP 规则和 F 规则）；集合的 5 种运算的定义（特别是差分运算 A—B)；关系的定义和关系的 5 个性质；函数和几种特种函数的定义；代数系统、半群与群的定义等。掌握和理解这些概念对于学好离散数学是至关重要的。

2. 方法性强

在离散数学的学习过程中，一定要注重和掌握离散数学处理问题的方法，在证明一个命题时，找到一个合适的证明方法和思路是极为重要的。如果知道了一道题用怎样的方法证明，就很容易地证出来。反之，则事倍功半。在离散数学中，虽然证明题千变万化，但证明方法却有规律可循。所以在听课和平时的复习中，要善于总结和归纳具有规律性的内容。在本书中，我们为读者总结了各种解题思路和方法。读者首先应该熟悉并且会用这些方法。同时我们还鼓励读者勤于思考，对于一道题，尽可能地多探讨几种解法。

3. 抽象性强

离散数学的特点是知识点集中，对抽象思维能力的要求较高。由于这些定义的抽象性，使初学者往往不能在脑海中直接建立起它们与现实世界中客观事物的联系。不管是哪本离散数学教材，都会在每一章节中首先列出若干个定义和定理，接着就是这些定义和定理的直接应用，如果没有较好的抽象思维能力，学习离散数

学确实具有一定的困难。因此,在离散数学的学习中,要注重抽象思维能力、逻辑推理能力的培养和训练,这种能力的培养对今后从事计算机科学工作是极其重要的。

在学习离散数学中所遇到的这些困难,可以通过多学、多看、认真分析本书所给出的每道题的解题过程和本书中的同步练习而逐步得到解决。在此特别强调一点:深入地理解和掌握离散数学的基本概念、基本定理和结论,是学好离散数学的重要前提之一。所以,读者要准确、全面、完整地记忆和理解所有的定义和定理。

4. 内在联系性

离散数学的四大体系虽然来自于不同的学科,但是这四大体系前后贯通,形成一个有机的整体。通过认真的分析可寻找出这四大部分之间知识的内在联系性和规律性。如:集合论、函数、关系、代数系统和图论,其解题思路和证明方法均有相同或相似之处。

二、认知解题规范

一般来说,离散数学的考试要求分为三个层次:了解、理解和掌握。了解是能正确判别有关概念和方法;理解是能正确表达有关概念和方法的含义;掌握是在理解的基础上加以灵活应用。为了考核学生对这三部分的理解和掌握的程度,试题类型一般可分为:判断题、填空题、计算题和证明题。判断题和填空题(或单项选择题)主要涉及基本概念、基本理论、重要性质和结论、公式及其简单计算;计算题主要考核学生的基本运算技能和速度,要求写出完整的计算过程和步骤;证明题主要考查应用概念、性质、定理及重要结论进行逻辑推理的能力,要求写出严格的推理和论证过程。

学习离散数学的最大困难是它的抽象性和逻辑推理的严密性。确定一个数学命题真假的惟一办法是给出严格的数学证明,不幸的是找出数学证明并不总是容易的。虽然任何人都没有制造

证明的现成处方，但是有一些有用的、一般性策略和方法可供利用。通过本书的学习和训练，将使你得到在离散数学中处理问题的一般性的规律和方法，一旦你掌握了离散数学中这种处理问题的思想方法，学习和掌握离散数学的知识就不再是一件难事了。

在离散数学中，假设让你证明一个命题，你应首先分清题意，然后寻找证明的思路和方法，当你相信已找到了证明的思路和方法时，你必须把它严格地写出来。一个写得很好的证明是一系列的陈述，其中每一条陈述都是前面的陈述经过简单的推理而得到的。仔细地写证明是很重要的，既能让读者理解它，又能保证证明过程准确无误。一个好的证明应该是条理清晰、论据充分、表述简洁。针对这一要求，本书将提供大量典型例题。

希望本书的出版能给学习离散数学的同学带来帮助。

编　者

2003.9

前　言

离散数学是随着计算机科学的发展而逐步形成的一门新兴的工具性学科，是计算机专业的核心课程。它与计算机科学的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析与设计、逻辑设计、系统结构、容错技术、形式语言与自动机理论等课程密切相关。离散数学的产生对计算机科学的发展具有重大影响和推动作用，而计算机科学的发展又不断地充实和丰富了离散数学的内容。特别是在被誉为计算机科学时代的今天，离散数学以它独特的魅力为越来越多的人们所瞩目，并已成为计算机科学工作者、应用计算机的工程技术人员以及信息科学工作者等必备的数学工具之一。

本书的出版经过长时间的酝酿，并在多年的教学经验积累的基础上编写而成。作者编写此书旨在帮助读者深入理解和掌握离散数学的各部分内容的精髓，系统而全面地掌握离散数学处理问题的思想方法和解题思路，了解离散数学解题规范和要求。通过本书的强化训练和引导，可使读者快速掌握计算机科学中常用的科学论证

方法，如：构造性证明、归纳法和反证法等证明的思路和技巧，在本书的定理和习题解答中充分体现了这一特点。

离散数学不仅是计算机专业的必修课程，也是其他相关专业和工程技术人员所必需掌握的专业知识。在多年的教学中，我们发现学生在做书后的习题时，有时会感到困难，而教师又不可能在课堂上面面俱到地讲解，因而广大师生希望能有配合教材的学习指导书出版；另一方面，学生在自学或参加有关考试时，也迫切需要有一本配合教材的习题集作为参考书，基于上述两点我们编写了这本学习指导书。

本书作为离散数学的配套参考书，其内容包括了离散数学的四大体系：数理逻辑、集合论、代数系统和图论。全书共分为 11 章：命题逻辑；谓词逻辑；集合；二元关系；函数；代数系统初步；半群、独异点与群；环和域；格与布尔代数；图的基本概念；特殊图与应用。每一章包括重点内容概要、典型例题和同步练习三部分。重点内容概要给出了本章的基本概念、主要性质、基本定理和主要结论，高度总结和概括了该部分的知识点和取材范围；典型例题部分精选了大部分《离散数学》现行教材中具有代表性的习题，目的是帮助读者掌握离散数学中的一些具有普遍性的分析方法、解题技巧和求解步骤与规范，通过这一部分内容的学习，旨在使读者开拓解题思路，掌握解题方法和技巧，加深读者对离散数学应用及其与计算机科

学联系的认识，从而逐步增强分析问题和解决问题的能力。

本书是离散数学的配套参考书，但并不局限于哪一本固定的教材，本书选材具有广泛的普遍性和代表性。本书可供计算机专业及其相关专业的读者使用。由于时间仓促、水平有限，书中难免有不足和错误之处，恳切希望广大读者批评指正。

编　者

2003. 9

目　录

第 1 章　命题逻辑

学习目的和要求

(1)要熟练掌握的知识点包括:命题、逻辑联结词,命题变元、命题公式或合式公式、永真式、永假式和可满足的、等价式与蕴含式、基本积与基本和、极小项与极大项、析取范式与合取范式、主析取范式与主合取范式。

(2)要真正理解等价式和蕴含式的定义,特别是要理解和掌握逻辑联结词双条件($\leftrightarrow$)和单条件($\rightarrow$)的定义。要熟记常用的等价式和蕴含式,这是学好命题逻辑的关键问题。

(3)要能准确地求出命题公式的主析取范式和主合取范式。掌握主析取范式和主合取范式与真值表的对应关系,主析取范式与主合取范式的关系。

(4)任何基于命题分析的逻辑叫命题逻辑(符号化逻辑),命题逻辑研究的对象是命题。因此,给定一个命题要会符号化。

(5)要熟练地掌握四个推理规则 (P、T、CP、F) 进行有效性论证。

重点内容概要

任何基于命题分析的逻辑称为命题逻辑,命题逻辑研究的对象是命题。所谓命题是指能够辨别真假的陈述句。我们知道,语句可分为陈述句、疑问句、祈使句和感叹句等,其中只有陈述句能够辨别真假(当然有例外),而其他语句均无真假。

1. 命题

命题是一个具有真假意义的陈述句,或命题是一个能够辨别

真假的陈述句。如果一个命题的真值为真用 T 或 1 表示，如果为假用 F 或 0 表示。命题的真值只有“真”或“假”，即命题的值域为 $\{T,F\}$。如果一个命题的真值为真，则称之为真命题，如果一个命题的真值为假，则称之为假命题。命题一般用大写的拉丁字母 A，B，C …P，Q… 来表示。

命题分为原子命题和分子命题(或复合命题)，一个最简单的陈述句，即一个命题不能再分解为更简单的命题，则称该命题为原子命题，原子命题是命题逻辑中研究的最基本单位，即在命题逻辑中对原子命题不再进行分解。原子命题通过逻辑联结词可以构成一个新的命题，我们把这个新命题称为分子命题。

2. 逻辑联结词

常用的逻辑联结词有五种：($\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$)

(1) 逻辑联结词否定 ——“$\neg$”

设 P 为一命题，$\neg P$ 是命题 P 的否定(读作“非 P”或“P 的否定”)，若 P 的真值为“T”，则 $\neg P$ 的真值为“F”；否则，若 P 的真值为“F”，则 $\neg P$ 的真值为“T”；

(2) 逻辑联结词合取 ——“$\wedge$”

设 P，Q 为任意两个命题，则 $P \wedge Q$(读作“P 与 Q”或“P 并且 Q”) 称作 P 与 Q 的合取式。若 P 和 Q 的真值同时为真，则 $P \wedge Q$ 的真值为真，否则 $P \wedge Q$ 为假。

(3) 逻辑联结词析取 ——“$\vee$”

设 P，Q 为任意两个命题，则 $P \vee Q$(读作“P 或 Q”) 称作 P 与 Q 的析取式，若 P 和 Q 的真值同时为假，则 $P \vee Q$ 的真值为假，否则 $P \wedge Q$ 为真。

(4) 逻辑联结词单条件 —— “$\rightarrow$”

设 P，Q 为任意两个命题，则 $P \rightarrow Q$(读作“P 则 Q”或“如果 P 则 Q”) 称作 P 与 Q 的蕴含式，若 P 的真值为真，Q 的真值为假，则 $P \rightarrow Q$ 的真值为假，否则 $P \rightarrow Q$ 为真。这时称 P 为前件，Q 为后件。

(5) 逻辑联结词双条件 ——“$\leftrightarrow$”

设 P,Q 为任意两个命题，则 $P\leftrightarrow Q$(读作“P 当且仅当 Q”) 称作 P 与 Q 的等价式，若 P 和 Q 的真值相同(同为真或同为假)，则 $P\leftrightarrow Q$ 的真值为真，否则 $P\leftrightarrow Q$ 为假。

3. 命题公式及命题变元

(1) 命题常项及命题变元

若用 $P,Q,R,\cdots$ 表示确定的简单命题，则称 $P,Q,R,\cdots$ 为命题常项，命题常项的真值是确定不变的。若用 $P,Q,R,\cdots$ 泛指简单的命题(即没有用具体的命题取代 $P,Q,R,\cdots$)，则称 $P,Q,R,\cdots$ 为命题变元，此时 $P,Q,R,\cdots$ 没有确定真值，但它们的值域为 $\{T,F\}$。

(2) 合式公式(或命题公式)

① 单个的命题常项或命题变元是合式公式；

② 若 A 是合式公式，则 $\neg A$ 也是合式公式；

③ 若 A,B 都是合式公式，则 $(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$ 也是合式公式；

④ 只有有限次地应用 ① ～ ③ 形成的符号串才是合式公式。合式公式也称命题公式，简称为公式。

(3) 命题公式的解释

当一个命题变元用一个确定的命题取代它时才有确定的真值，相应的命题变元也就转换为命题。同理，命题公式也没有真值，只有当用确定的命题去取代公式中所包含的所有的原子命题变元时，公式才有确定的真值，相应的公式也转换为命题。公式中的所有原子命题变元一组确定的取值(真值) 叫作公式的一组真值指派。含有 n 个原子命题变元的公式有 2^n 组不同的真值指派，对每一组真值指派公式都有一个相应确定的真值。

4. 永真式、永假式与可满足式

(1) 永真式(或重言式)

给定一个含有 n 个命题变元的命题公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，则

有 2^n 的组真值指派，如果对每一组真值指派，公式 A 的取值均为真，则称公式 A 为永真式（或重言式）。或不依赖任何真值指派而取值均为真的命题公式，称为永真式。

（2）永假式（或矛盾）

给定一个含有 n 个命题变元的命题公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，则有 2^n 的组真值指派，如果对每一组真值指派，公式 A 的取值均为假，则称公式 A 为永假式（或矛盾）。或不依赖任何真值指派而取值均为假的命题公式，称为永假式。

（3）可满足式

给定一个含有 n 个命题变元的命题公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，则有 2^n 的组真值指派，如果至少有一组真值指派使公式 A 的取值为真，则称公式 A 为可满足的。

5. 等价式与蕴含式

（1）等价式（或逻辑恒等式）

给定任意两个命题公式 $A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$ 和 $B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，则共有 2^n 组不同的真值指派，如果对每一组真值指派，公式 A 和 B 的真值均相同，则称公式 A 和 B 等价。或若 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称公式 A 和 B 等价，记作：$A\Leftrightarrow B$。证明等价式主要有如下几种方法：

① 若 $A\Rightarrow B$ 且 $B\Rightarrow A$，则 $A\Leftrightarrow B$。

② 把等价式的左、右都划为主析取范式或主合取范式，利用主范式的惟一性证明。

③ 利用代入规则和替换规则，根据基本的等价式进行直接推导（等价替换）。

④ 根据定义证明，即：若 $A\leftrightarrow B$ 为永真式，则 $A\Leftrightarrow B$。

※ 常用的等价式（或称逻辑恒等式）：

① $\neg\neg P\Leftrightarrow P$　双重否定律