

CHUZHONG SHUXUE FUDAO

G633.6/130

初中数学辅导

华东师范大学 编
第一附中数学教研组



华东师范大学出版社

初中数学辅导

华东师范大学
第一附中数学教研组 编

华东师范大学出版社

初中数学辅导

华东师范大学 编
第一附中数学教研组

华东师范大学出版社出版
(上海中山北路3663号)

新华书店上海发行所发行 常州人民印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 8.5 字数 200 千字

1985年1月第一版 1985年1月第一次印刷

印数: 000,001—230,000

编一书号 7135·126 定价 0.85 元

前 言

我们根据初中数学的现行教材,从学生的实际出发,编写了这本书。它有助于学生正确理解和掌握基础知识、提高运算能力和逻辑思维能力,尤其是有关内容中所揭示的解题方法、关键和规律,对初中学生学习数学是有益的,因而它是一本初中数学的辅导书。

本书便于读者自学,选了少量习题,对较难习题写了解题提示。读者可配合教材自学,也可在初中总复习时应用。

本书由石源泉、王剑青、夏益辉、毛梦奇、吴传发、唐尚群、章蕊樱同志执笔,虽然总结了多年的教学实践经验,但限于水平,不当之处仍可能存在,希望读者提出意见,以便逐步修改完善。

华东师范大学第一附中数学教研组

目 录

第一章	因式分解	1
第二章	分式	14
第三章	根式和幂	27
第四章	方程	41
第五章	列方程解应用题	57
第六章	直角坐标系	73
第七章	函数	88
第八章	对数	101
第九章	韦达定理与判别式	114
第十章	不等式	128
第十一章	最大值和最小值	141
第十二章	解三角形	153
第十三章	三角形及四边形	194
第十四章	圆	209
第十五章	比例线段	222
第十六章	面积	235
第十七章	几何作图	253
总复习题		266

第一章 因式分解

初中数学里的因式分解是一个很重要的恒等变化问题, 不仅在处理约分、通分、解方程等问题时都要用到它, 而且在以后的进一步学习中也有很大的用途. 因式分解的一般途径是先看各项有没有公因式(有公因式就提取), 再看能否应用乘法公式, 如属 ax^2+bx+c 型的二次三项式, 可考虑用十字相乘法或求根公式分解. 对某些项数较多、次数较高的多项式, 用上述方法分解有困难的, 可考虑用分组分解法或用除法分解. 至于某些简单的对称多项式的分解因式, 往往先用因式定理求出一个根, 然后再根据对称多项式的性质结合待定系数法求出其它因式. 下面着重研究几种常用的分解因式方法.

一、提取公因式法

根据乘法运算法则 $m(a+b+c)=ma+mb+mc$, 反过来有 $ma+mb+mc=m(a+b+c)$. 如果一个多项式的各项含有公因式, 就可以提取这个公因式, 把它写在括号外面.

[例一] 把下列各式分解因式:

$$(1) -2p^2(p^2+q^2)+6pq(p^2+q^2).$$

$$(2) 2a(x-2)+3b(2-x).$$

$$(3) 4(x-y)^3-8(y-x)^2.$$

解: (1) 原式 $= -2p(p^2+q^2)(p-3q)$.

$$(2) \text{原式} = 2a(x-2) - 3b(x-2) = (x-2)(2a-3b).$$

$$(3) \text{原式} = 4(x-y)^3 - 8(x-y)^2 = 4(x-y)^2(x-y-2).$$

[例二] 把下列各式分解因式:

$$(1) (a-b)(p-2) - (b-a)(q+3) - (a-b)(1-r).$$

$$(2) (x-y-z)(x+y-z) - (y-z-x)(y+z-x).$$

$$\begin{aligned}\text{解: } (1) \text{ 原式} &= (a-b)[(p-2) + (q+3) - (1-r)] \\ &= (a-b)(p+q+r).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{ 原式} &= (x-y-z)(x+y-z) \\ &\quad - (y-z-x)[-(x-y-z)] \\ &= (x-y-z)[(x+y-z) + (y-z-x)] \\ &= (x-y-z)(2y-2z) = 2(y-z)(x-y-z).\end{aligned}$$

[例三] 求证对于任意自然数 n , 2^{n+4} 与 2^n 的差必能被 30 整除.

解: 由于 $2^{n+4} - 2^n = 2^n \cdot 2^4 - 2^n = 2^n(2^4 - 1) = 2^n \cdot 15 = 2 \cdot 2^{n-1} \cdot 15 = 30 \times 2^{n-1}$. 又 n 是自然数, 因此 2^{n-1} 是整数, 所以 2^{n+4} 与 2^n 的差必能被 30 整除.

二、应用乘法公式法

常用的乘法公式有:

$$(1) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(2) (a+b)(a-b) = a^2 - b^2;$$

$$(3) (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3;$$

$$(4) (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

以上公式反过来写, 就是应用乘法公式分解因式的公式. 应用乘法公式分解因式, 就是把一些单项式或多项式看作公式的一项, 然后利用乘法公式把它分解成因式. 应用乘法公式分解因式常和提公因式、分组分解、配方、添项、拆项等方法结合起来进行, 如 $a^3 - 4ab^2 + 4b^3 - b^3 - 1$, 可以先把它拆成 $a^3 - 4ab^2 + 4b^3 - b^3 - 2b^3 - 1$, 再用乘法公式, 或者用十字相乘

法或应用求根公式来分解因式.

[例四] 把下列各式分解因式:

$$(1) \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}.$$

$$(2) (x+y)^2 - 4(x+y-1).$$

$$(3) a^{2n} - a^{4n} - 2a^{7n} - a^{10n}.$$

$$(4) x^3 - 3x^2 + 4.$$

$$(5) x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6.$$

解: (1) 原式 $= \left(\frac{1}{4}x\right)^2 - 2 \times \frac{x}{4} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $= \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}(x-2)^2.$

$$(2) \text{原式} = (x+y)^2 - 4(x+y) + 4 = (x+y-2)^2.$$

$$(3) \text{原式} = (a^n)^2 - [(a^{2n})^2 + 2a^{2n}a^{5n} + (a^{5n})^2]$$
$$= (a^n)^2 - (a^{2n} + a^{5n})^2$$
$$= (a^n + a^{2n} + a^{5n})(a^n - a^{2n} - a^{5n})$$
$$= a^{2n}(1 + a^n + a^{4n})(1 - a^n - a^{4n}).$$

$$(4) \text{原式} = (x^3+1) - (3x^2-3)$$
$$= (x+1)(x^2-x+1) - 3(x+1)(x-1)$$
$$= (x+1)[x^2-x+1-3(x-1)]$$
$$= (x+1)(x^2-4x+4) = (x+1)(x-2)^2.$$

$$(5) \text{原式} = x^4 - x^3 - 7x^2 + 7x - 6x + 6$$
$$= x^3(x-1) - 7x(x-1) - 6(x-1)$$
$$= (x-1)(x^3-7x-6)$$
$$= (x-1)[(x+1)^3 - (3x^2+10x+7)]$$
$$= (x-1)[(x+1)^3 - (x+1)(3x+7)]$$
$$= (x-1)(x+1)(x^2-x-6)$$
$$= (x-1)(x+1)(x+2)(x-3).$$

〔例五〕 把下列各式分解因式:

$$(1) 1+2a+3a^2+4a^3+5a^4+6a^5+5a^6+4a^7+3a^8+2a^9+a^{10}.$$

$$(2) (1-a^2)(1-b^2)-4ab.$$

$$(3) a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b).$$

解: (1) 可先拆项再分组, 发现有公因式 $1+a$ 可提取.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (1+a) + a(1+a) + 2a^2(1+a) + 2a^3(1+a) \\ &\quad + 3a^4(1+a) + 3a^5(1+a) + 2a^6(1+a) \\ &\quad + 2a^7(1+a) + a^8(1+a) + a^9(1+a) \\ &= (1+a)(1+a+2a^2+2a^3+3a^4 \\ &\quad + 3a^5+2a^6+2a^7+a^8+a^9) \\ &= (1+a)[(1+a)+2a^2(1+a) \\ &\quad + 3a^4(1+a)+2a^6(1+a)+a^8(1+a)] \\ &= (1+a)^2(1+2a^2+3a^4+2a^6+a^8) \\ &= (1+a)^2(1+a^2+a^4)^2 \\ &= (1+a)^2(a^2+a+1)^2(a^3-a+1)^2.\end{aligned}$$

(2) 先把前面两个因式乘开, 再分组分解.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab \\ &= 1-2ab+a^2b^2-a^2-2ab-b^2 = (1-ab)^2 - (a+b)^2 \\ &= [(1-ab)+(a+b)][(1-ab)-(a+b)] \\ &= (1-ab+a+b)(1-ab-a-b).\end{aligned}$$

(3) 把 a 、 b 、 c 按二次式降幂整理, 可发现 $b-c$ 为原式一个因式.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (b-c)a^2 - b^2a + c^2a + b^2c - bc^2 \\ &= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)[a^2 - (b+c)a + bc] \\ &= -(a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

[例六] 把下列各式分解因式:

(1) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$.

(2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

(3) $(a-2b)^3a - (b-2a)^3b$.

解: (1) 先用两数立方差公式, 再用两数立方和公式, 可发现有因式 $(b+c)$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= [(a+b+c)^3 - a^3] - (b^3 + c^3) \\ &= (b+c)(3a^2 + 3ab + 3ac + 3bc) \\ &= (b+c) \cdot 3[a(a+b) + c(a+b)] \\ &= 3(a+b)(b+c)(c+a).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \text{原式} &= (a+b)^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc \\ &= (a+b+c)[(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] \\ &\quad - 3ab(a+b+c) \\ &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).\end{aligned}$$

(3) 设 $a-b=k$, 则 $a-2b=k-b$, $b-2a=-(k+a)$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (k-b)^3a + (k+a)^3b \\ &= k^3a - 3k^2ab + 3kab^2 - ab^3 + bk^3 \\ &\quad + 3k^2ab + 3ka^2b + a^3b \\ &= (a+b)k^3 + 3kab(a+b) + ab(a^2 - b^2) \\ &= (a+b)[k^3 + 3kab + ab(a-b)] \\ &= (a+b)[(a-b)^3 + 3ab(a-b) + ab(a-b)] \\ &= (a+b)(a-b)(a+b)^2 = (a+b)^3(a-b).\end{aligned}$$

三、二次三项式的分解因式

二次三项式分解因式一般可应用下列公式:

(1) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$;

(2) $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$;

$$(3) ax^2+bx+c$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

[例七] 把下列各式分解因式:

$$(1) 6x^2-x-15.$$

$$(2) (x^2+3x+2)(x^2+7x+12)-120.$$

$$(3) 3x^2+5xy-2y^2+x+9y-4.$$

解: (1) 6 可以分解成 1 与 6、2 与 3, -15 可以分解成 -1 与 15、-15 与 1、-3 与 5、-5 与 3, 注意观察与思考, 用十字乘法进行试验, 不难得出原式 $= (2x+3)(3x-5)$.

(2) 原式 $= (x^2+5x+6)(x^2+5x+4)-120$, 令 $x^2+5x=A$, 代入得

$$\text{原式} = A^2+10A-96 = (A+16)(A-6)$$

$$= (x^2+5x+16)(x^2+5x-6)$$

$$= (x^2+5x+16)(x+6)(x-1).$$

(3) 把 x 、 y 按二次三项式降幂整理, 就可用十字相乘法或求根公式解之.

$$\text{解法一: 原式} = 3x^2 + (5y+1)x - (2y-1)(y-4),$$

$\therefore$

$$\begin{array}{r} 3 \quad \quad \quad -(y-4) \\ \quad \times \quad \quad \quad \times \\ 1 \quad \quad 2y-1 \\ \hline -y+4+6y-3=5y+1 \end{array}$$

$$\therefore \text{原式} = (3x-y+4)(x+2y-1).$$

解法二:

$$\text{原式} = 3x^2 + (5y+1)x - 2y^2 + 9y - 4$$

$$= 3\left(x + \frac{5y+1+\sqrt{(5y+1)^2+4\times 3(-2y^2+9y+4)}}{2\times 3}\right)$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left(x + \frac{5y+1-\sqrt{(5y+1)^2+4 \times 3(2y^2-9y+4)}}{2 \times 3} \right) \\
 &= 3 \left(x + \frac{5y+1+7(y-1)}{2 \times 3} \right) \left(x + \frac{5y+1-7(y-1)}{2 \times 3} \right) \\
 &= (x+2y-1)(3x-y+4).
 \end{aligned}$$

解法三：应用待定系数法，设

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= (3x-y+a)(x+2y+b) \\
 &= 3x^2 - xy + ax + 6xy - 2y^2 + 2ay + 3bx - by + ab \\
 &= 3x^2 + 5xy - 2y^2 + (a+3b)x + (2a-b)y + ab,
 \end{aligned}$$

$$\text{比较系数, 得} \quad \begin{cases} a+3b=1 \\ 2a-b=9 \\ ab=-4, \end{cases}$$

解方程组, 得 $a=4$, $b=-1$.

$$\text{原式} = (3x-y+4)(x+2y-1).$$

[例八] K 为何值时, $x^3-y^3+3x-7y+K$ 可以分解成两个一次因式?

解: 设 $x^3-y^3+3x-7y+K = x^2+3x-(y^2+7y-K) = 0$,

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+4(y^2+7y-K)}}{2} \\
 &= \frac{-3 \pm \sqrt{4y^2+28y+9-4K}}{2}.
 \end{aligned}$$

原式要分解成两个一次因式, 必须 $4y^2+28y+9-4K$ 是完全平方式,

$$\begin{aligned}
 4y^2+28y+9-4K &= 4 \left[y^2+7y+\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{9-4K}{4} \right] \\
 &= 4 \left[\left(y+\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{-49+9-4K}{4} \right] \\
 &= 4 \left[\left(y+\frac{7}{2}\right)^2 - K - 10 \right].
 \end{aligned}$$

当 $-K-10=0$ 时, 为完全平方式, 即 $K=-10$ 原式可分解成两个一次因式. 本题也可以应用待定系数法, 设原式 $= (x+y+m) \cdot (x-y+l)$, 先求出 m 、 l 的值再求出 K .

四、应用除法分解因式

如果多项式 $f(x)$ 能被多项式 $\phi(x)$ 整除, 并且存在第三多项式 $g(x)$, 能使恒等式 $f(x) = \phi(x) \cdot g(x)$ 成立, 则 $\phi(x)$ 、 $g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的因子. 设有理系数多项式

$$f(x) = \frac{1}{a} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n),$$

这里 a 、 a_0 、 a_1 、 a_2 、 $\cdots$ 、 a_{n-1} 、 a_n 都是整数 ($a \neq 0$), 若 $f(x)$ 有一次因式 $(x - \frac{p}{q})$, 其中 p 、 q 是整数, 那么 p 一定是 a_n 的约数, q 一定是 a_0 的约数. 如果要使多项式 $f(x)$ 能被 $x-a$ 整除, 必须并且只须 $f(a)=0$. 解题时, 如多项式有一次因式, 可应用综合除法. 某些有高于一次的因式或特殊的多项式的因式分解, 可考虑应用一般除法.

[例九] 将多项式 $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$ 分解因式.

解: 用 ± 1 , ± 2 , ± 4 , ± 8 来试验, 知道 $f(x)$ 有一个根 $x = -2$. 以 $x+2$ 除, 得

$$f(x) = (x+2)(x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4).$$

经过试验知第二因式有一个根 $x = -2$, 以 $x+2$ 除, 得

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x^3 + 2x^2 + x + 2).$$

再试验知 $x = -2$ 也是 $x^3 + 2x^2 + x + 2$ 的一个根, 得

$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2 + 1).$$

所以最后有

$$x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3(x^2+1).$$

〔例十〕把下列各式分解因式:

$$(1) a^5 - b^5.$$

$$(2) 32x^{15} + y^{15}.$$

解: 当 n 为正整数时, (i) $a^n - b^n$ 能被 $a - b$ 整除; (ii) 当 n 为偶数时, $a^n - b^n$ 能被 $a - b$ 及 $a + b$ 整除; (iii) $a^n + b^n$ 决不能被 $a - b$ 整除; (iv) 当 n 为奇数时, $a^n + b^n$ 能被 $a + b$ 整除.

$$(1) a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$

$$\begin{aligned} (2) 32x^{15} + y^{15} &= (2x^3 + y^3)[(2x^3)^4 - (2x^3)^3y^3 \\ &\quad + (2x^3)^2(y^3)^2 - (2x^3)(y^3)^3 + (y^3)^4] \\ &= (2x^3 + y^3)(16x^{12} - 8x^9y^3 \\ &\quad + 4x^6y^6 - 2x^3y^9 + y^{12}). \end{aligned}$$

〔例十一〕把 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 因式分解.

$$\text{解: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = a(a^2 - 3bc) + b^3 + c^3,$$

令 $a = -(b+c)$ 代入原式为零, 所以 $a+b+c$ 是它的一个因式. 应用一般除法得

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac).$$

本题也可以设原式 $= (a+b+c)[A(a^2 + b^2 + c^2) + B(ab + bc + ca)]$, 比较 a^3 的系数知 $A=1$. 取 $a=1, b=1, c=0$ 代入, 求得 $B=-1$.

在分解因式时还要特别注意到因式分解的范围. 多项式的因式分解, 根据数的范围有三种情况: 1. 在有理数范围内; 2. 在实数范围内; 3. 在复数范围内. 如无特殊说明, 一般指的是在有理数的范围内, 而且分解的因式必须是整式. 而在因式分解时, 应分解到每一个因式不能再分解为止, 即把一个多项式分成几个既约多项式的乘积.

[例十二] 分别在有理数、实数范围内分解因式:

(1) $x^4 - 4$.

(2) $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$.

解: (1) 在有理数范围 $x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$.

在实数范围

$$x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}).$$

(2) 在有理数范围内,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 3x^3(x^2 - 2x + 2) + x(x^2 - 2x + 2) - (x^3 - 2x + 2) \\ &= (x^3 - 2x + 2)(3x^3 + x - 1).\end{aligned}$$

在实数范围内,

$$\text{原式} = 3(x^3 - 2x + 2)\left(x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{13}}{6}\right).$$

下面再举几个例子, 说明因式分解的应用.

[例十三] 计算 $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} \div \frac{a^3 - b^3}{a^2 - 9b^2}$.

$$\begin{aligned}\text{解: } & \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} \div \frac{a^3 - b^3}{a^2 - 9b^2} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} \times \frac{a^2 - 9b^2}{a^3 - b^3} \\ &= \frac{(a-b)^2}{(a+b)(a+3b)} \times \frac{(a-3b)(a+3b)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \\ &= \frac{(a-b)^2(a-3b)(a+3b)}{(a+b)(a+3b)(a-b)(a^2+ab+b^2)} \\ &= \frac{(a-b)(a-3b)}{(a+b)(a^2+ab+b^2)}.\end{aligned}$$

[例十四] 解方程 $x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x + 12 = 0$.

解: $x^4 - x^3 - 5x^2 - 7x + 12 = 0$,

$$x^3(x-1) - 5x(x-1) - 12(x-1) = 0,$$

$$(x-1)(x^3 - 5x - 12) = 0,$$

$$(x-1)(x^3-3x^2+3x-9x+4x-12)=0,$$

$$(x-1)[x^3(x-3)+3x(x-3)+4(x-3)]=0,$$

$$(x-1)(x-3)(x^2+3x+4)=0.$$

$\therefore x^2+3x+4=0$ 无实数根,

$\therefore$ 原方程的根为 $x_1=1, x_2=3$.

练 习 一

一、把下列各式分解因式:

1. $3a(x+y)-4b(y+x).$

2. $6a(x-1)^3-8a(1-x)^2.$

3. $5(x+y)(a-b+c)+3(x-y)(b-a-c).$

4. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(b+c)+ab(c-a).$

5. $12a^{3n+1}-32a^{2n+1}+24a^{n+1}.$

6. $5a(x-y+z)-2bx+2by-2bz.$

7. $(a+b-c)x+(c-a-b)y+(a+b-c)z.$

8. $(a+b)^2(a-b)^2-(a^2+b^2)(a^2-b^2).$

9. 证明: (a) 两个连续整数的积是 2 的倍数; (b) 任意三个连续整数的积是 6 的倍数.

10. 在六位数 $abcdef$ 中, 若 $a=d, b=e, c=f$, 求证这个六位数必能被 7、11、13 整除. [提示: 设 $N=a \times 100000+b \times 10000+c \times 1000+d \times 100+e \times 10+f=1001(100a+10b+c).$]

二、把下列各式分解因式:

1. $(x+y)^3-x^3-y^3+3xy.$

2. $m^4+m^3+m+1.$

3. $n^6-n^4+2n^3+2n^2.$

4. $(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2.$

5. $x^4+(x+y)^4+y^4$. [提示: $x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2$.]

6. $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$. [提示: 把前面两项乘开分组整理可发现 $a+b$ 是原式的一个因式.]

7. $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$. [提示: 将前面两项用两数立方和的公式分解, 可发现 $a-b$ 是原式的一个因式.]

8. $2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$. [提示: $\because (a^2 - b^2 - c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$, $\therefore$ 原式 $= -(a^2 - b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2$.]

三、把下列各式分解因式:

1. $6x^2 + 17x - 3$.

2. $(x^2 - 3)^2 - 4x^2$.

3. $(x+y)^2 - 2(x+y) - 3$.

4. $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$. [提示: 原式 $= (n^2 + 3n + 2)(n^2 + 3n) + 1$, 设 $A = n^2 + 3n$ 再分解之.]

5. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$. [提示: 原式 $= (x^2 + 8x + 7) \cdot (x^2 + 8x + 15) + 15$.]

6. $x^4 + x^2 - 2ax + 1 - a^2$. [提示: 原式 $= -[a^2 + 2ax - (x^4 + x^2 + 1)]$, 应用求根公式. 或者原式写成 $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 2ax - a^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - (x^2 + 2ax + a^2)$.]

7. $x^2 - 2xy - 3y^2 + 8y - 4$. [提示: 原式 $= x^2 - 2xy - (3y^2 - 8y + 4) = x^2 - 2xy - (3y - 2)(y - 2)$ 再用十字相乘法. 或者原式化为 $(x - 3y)(x + y) + 8y - 4$, 可得原式 $= (x - 3y + 2)(x + y - 2)$.]

8. $x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + 5y + 3$.

四、若 $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 49$ 是一个整式的平方, 求这个整式. [提示: 设原式 $= (x^2 + ax + b)^2$, 展开比较系数求出 a, b .]

五、 K 是何值时, $Kx^2 - 2xy - 3y^2 + 3x - 5y + 2$ 能够分解成两个一次因式. [提示: $-3y^2 - 5y + 2 = (y + 2)(-3y + 1)$, 设原式 $= (lx + y + 2)(mx - 3y + 1)$, 得 $K = 1$.]

六、把下列各式分解因式:

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

2. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.

3. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

4. $x^{15} - 1$.

5. $x^7 + y^7$.

6. $(a+b)^5 - a^5 - b^5$.