公用事业理论的数学方法

公用事业理论的数学方法

A. Я. 欣钦

科学出版社

公用事業理論的數學方法

A. Я. 欣欽 著
張里千 殷湧泉譯

科 學 出 版 社
1 9 5 8

А. Я. Хинчин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ИЗД. АН СССР

Москва 1955

内 容 简 介

本书系将概率論的概念及方法应用于解决公用事业(大量服务)問題，例如电話总机为电話呼唤的服务，修理工厂对损毁机器的修配工作，等等，它是近年来各国在概率論与运筹学方面重点发展的新学科之一．

作者以严格的数学观点整理并发展了由埃尔兰及巴尔姆所首創的理論及方法．

全书分三部分：第一部分包含事件流的基本理論，第二、三部分介紹应用于带消失系統与带等待系統的服务方法，作者运用了熟練的数学技巧深入浅出地指示了这些內容．

本书是苏联科学院数学研究所 1954 年二項重要工作成果之一．

公用事业理論的数学方法

А. Я. 欣 欽 著

张里千 殷涌泉 譯

科 学 出 版 社 出 版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

1958 年 9 月第 一 版　书号：1367　字数：94,000

1960 年 1 月第一次印刷　开本：850×1168 1/32

(京) 2,013—5,512　印张：3 13/16

定价：(10) 0.65 元

序

在科學中，在人類的實踐活動中以及在日常生活中，往往會發生下列情況：對某種特殊形式的服務發生了大量的需求，然而因爲服務機關所有的服務單元的個數是有限制的，所以不能永遠立即滿足一切提出來的需求．這種情形的例子是每個人都知道的．如商店櫃台，賣票窗口前，理髮店及飯館內的等待者的隊伍；由於客滿而得不到所需要的火車票；由於缺乏空閑飛機場地而延遲了飛機着陸的時間；由於修理工作人員的不足而延遲了損毀機器的修復．所有這些以及許多其他相似的衆所周知的例子，儘管它們的實際內容有着本質的差別，但在形式上却是彼此很相近的．在所有類似的情形中，實質上在理論面前提出了一個基本任務：要儘量精確地建立服務單元的個數與服務質量之間的相互關係．同時，在這裏，服務的質量在不同的情況下自然用不同的指標來衡量．在大多數情形，作爲這個指標的或是被拒絕的請求者的百分數（如未得到火車票的旅客的百分數），或是服務開始之前的等候時間的平均值（如各種排隊的情形）．很明顯；在所有情形，服務單元的數目愈多，服務的質量會愈好；但同樣明顯的，這個數字的過分增加會帶來人力與物力上過多的開支．因此；在實踐中，問題是這樣提出的，首先規定服務質量的必要水準，然後尋求服務單元個數的最小值，使能達到這個水準．

在類似的問題中，幾乎總是要考慮隨機因素在所研究現象的期間中發生的影響．來到的請求者的數目照例不會是常數，而是隨機變動的．請求者的服務時間在大多數情形下不是準定的，由於請求者的不同而隨機變動着．這些隨機因素决不具有何種"擺動"的性質，從而破壞了現象的勻調和規律的進程，反之它們倒構成了所研究的過程的圖像的主要特徵．因此，概率論（研究機遇的規律性的一門數學）的概念和方法應當成爲公用事業理論的數學工具．

本書的目的是向讀者介紹將概率論應用到公用服務的問題時起決定作用的基本觀念、方法及個別的思路．寫作這類書藉的必要性早已爲數學家及實際工作者（首先是電訊工作者，現在所研究的理論是他們當時提出的，而且到今天他們仍然是主要的需要者）感覺到．目前國外沒有講述一般理論的清晰易懂的書，這種情況也加强了這一需要．

顯而易見，對這樣的著作决不能强求材料的完整性．今天，公用事業的理論發展得相當寬廣，它的最重要成果的敍述也要寫成一本十分厚的書．但我並沒有抱着這樣的寫作目的，我的目的在於以不多的最重要的例子來闡明將概率論應用到公用事業問題中去的一般特點與基本風格．本書的材料正是從這樣“方法論的”宗旨出發進行選擇的．在本書中對理論的奠基者埃爾蘭的工作給予了特殊的注意，對於他的許多工作我們以前瞭解得是不够的．本書引入了大量的巴爾姆（埃爾蘭事業當代最卓越的繼承者）的觀念．從埃爾蘭的古典性工作時期起，起統治作用的是建立和微分方程組，差分微分方程組與積分方程組相聯系的分析方法．與之相反，本書在一定程度上顧及到近日越來越常出現的尋求初等研究方法的傾向．在這個方向請讀者注意§2及§25以及整個第十一章．不久前在倫德桂斯特有趣的文章（Ericsson Technics, 1953）中曾企圖建立一般的初等理論．

所有基本文獻都出於實際工作專家之手，從數學觀點看來是不能令人滿意的；這種情況加重了寫作本書的困難．爲了使全體講述的形式在數學意義上能够大體上過得去，幾乎每一條討論都不能保持它原有的形狀；必須或者實質上補充作者的論述，或者把它拋棄改換另外一個．引進的新概念在多數情況下也必須重新定義，因爲原作者給出的定義不够確切．

爲了幫助讀者用具體表象聯系一般概念，本書從頭到尾利用電話業務上的術語．電話業務的需求直到現在是發展公用事業理論最重要的刺激物．因此我以“呼喚”代替“需求”或“請求”，“消失”代替“拒絕”，“會話”時間代替“服務”時間等等．當然在所有場合，如將術

語作相應的改變，所敍述的一切對各種形式的公用服務都是適用的.

本書分爲三部分．第一部分最大，它包含來到的呼喚"流"的研究，不包含任何服務問題(後者將在其餘二部分研究)．把來到的流的研究作爲特殊的一部分淸楚地劃分出來，我覺得比較合適；這不僅是爲了正確地服務必須首先很好地知道服務對象，很好地知道請求的替換的全部特徵；這樣分的另一個同樣重要的原因還在於：來到的呼喚流的理論恰恰就是同類事件隨機替換的一般理論．這個理論甚至在一些與服務問題並無聯系的領域中也有着廣泛的應用(如在原子的放射分裂問題中).

我儘量使本書對所有掌握概率論基本概念及簡單數學分析教程(高等工業學校的)的同志都能看懂．在許多場合，如果對某些命題不進行完全的證明，而引用相應的概率論的一般結果(馬爾柯夫鏈，隨機過程，各態歷經論)，則講述可以縮簡．但是，爲了本書能讓更多的讀者看懂，我幾乎沒有一處爲這類的引誘所影響.

在概率論中，將表示不等式 $\xi < x$ 的概率的(非減)函數 $F(x)$ 稱爲隨機變數 ξ 的分佈律；但在公用事業理論中，將表示不等式 $\xi > x$ 的概率的(非增)函數 $\varphi(x)$ 叫做隨機變數 ξ 的分佈律是更方便的．因情況不同，我們將用這個或那個分佈律的概念.

A. Я. 欣欽

1954 年 10 月 2 日

目　　錄

第一部分　來到的呼喚流

第二部分　帶消失的系統

第三部分　帶等待的系統

第一部分　來到的呼喚流

第一章　最簡單流的理論

同類事件的流的一般理論，自然應當從與這些流相聯系的基本概念的定義開始．然而，我們把這種一般的講法移到第二章，在那裏將把它進行到必需的規模．我們寧願一下子就把讀者引入到具體研究的範圍中．這些研究是與某種最簡單類型的流相聯系的．這樣做在一開頭就會使讀者獲得關於公用事業理論的基本思路與數學工具以及作爲數學分支的這門學問的風格的直覺觀念．當這些具體觀念被充分掌握後，更抽象的一般理論的研究就不會是困難的了．

此外，本章內我們所要研究的那種最簡單類型的流，在相當長的一段時期裏幾乎是應用上唯一有用的．後來，也就是最近一些時候，更一般的流的研究的必要性才清楚地顯現出來．即便是到了今天，公共事業理論的相當多的應用（特別是應用在電話業務上）仍然由這樣的假定出發：接到的請求（呼喚）流屬於最簡單的類型．最簡單流的應用（特別是技術上的）在最近幾十年來是如此的廣泛，以致在現時的概率論初級教程中，在大綱裏照例都有一章來講述這一理論．

§ 1.　定義及問題的提出

同類事件的流叫做最簡單的，如果它具有下面三個性質：

1° **平穩性**　對任何 $t>0$ 及整數 $k\geqslant 0$，在區間 $(a, a+t)$ 發生 k 個事件的概率對任何 $a\geqslant 0$ 都是一樣的（也就是說，只與 k 和 t 有關）；今後我們永遠以 $v_k(t)$ 來表示這個概率．在這本書裏，我們只考慮那樣的流，使得在任何有限時間區間內只發生有限個事件的概率等於 1．因此，不管 t 是什麼，我們永遠有 $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)=1$．流的平穩性表示它的概率規律在時間上的不變性．

2° **無後效性** 在時間區間 $(a, a+t)$ 內發生 k 次事件的概率與時刻 a 以前的事件發生情況無關；換言之，在對時刻 a 以前的事件發生情況所作的任何假定之下，計算出來的在時間區間 $(a, a+t)$ 內發生 k 次事件的條件概率，等於同一事件的無條件概率。無後效性表明在互不相交的時間區間內流的進行的相互獨立性。

3° **普通性** 設對給定的平穩的流，$\psi(t)$ 代表在(隨便在哪兒的)長度爲 t 的時間區間內至少發生兩次事件的概率$\left[\text{顯然，} \psi(t)=1-v_0(t)-v_1(t)=\sum_{k=2}^{\infty} v_k(t)\right]$，則我們有

$$\psi(t)=o(t) \qquad (t \to 0)。$$

或者同樣地，

$$\frac{\psi(t)}{t} \to 0 \qquad (t \to 0).$$

我們將來會看到，流的普通性表明在同一時間瞬間內同時發生兩個或更多個事件的實際不可能性。

這樣，我們就稱平穩的普通的且無後效的流爲同類事件的最簡單的流。

最簡單流的理論的基本問題是確定 $v_k(t)$ 的形狀；換言之，我們的目的就是要尋找(被看做是隨機變量的)在長度爲 t 的時間區間內所發生的事件的次數的分佈律。同時，爲了所研究的流的實際解釋的確定性，我們將永遠假設所考慮的是某個電話裝置所接到的呼喚的流；與之對應將把我們的同類事件叫做《呼喚》。

§ 2. 初等解法

將時間區間 $(0, 1)$ 分爲任意 n 等分，每個子區間的長度都是 $\frac{1}{n}$。在某個子區間內一次呼喚也沒有發生的概率等於 $v_0\left(\frac{1}{n}\right)$；因爲我們的流是無後效的，所以

$$v_0(1)=\left[v_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.$$

如果令 $v_0(1) = \theta$，即有

$$v_0\left(\frac{1}{n}\right) = \theta^{\frac{1}{n}}.$$

如果我們有長度爲 $\frac{k}{n}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 的區間，將它分爲長度爲 $\frac{1}{n}$ 的 k 個子區間，由此

$$v_0\left(\frac{k}{n}\right) = \left[v_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k = \theta^{\frac{k}{n}}. \tag{2.1}$$

最後，設 t 是任意正數，而自然數 k 由下列不等式：

$$\frac{k-1}{n} < t \leqslant \frac{k}{n}$$

確定．因爲 $v_0(t)$ 顯然是 t 的非增函數，所以

$$v_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \geqslant v_0(t) \geqslant v_0\left(\frac{k}{n}\right);$$

或者由於(2.1)

$$\theta^{\frac{k-1}{n}} \geqslant v_0(t) \geqslant \theta^{\frac{k}{n}}.$$

令 $n \to \infty$，則 $\frac{k}{n} \to t$．由此上列不等式的邊項就趨於 θ^t，而我們對任何 $t > 0$，就找到了

$$v_0(t) = \theta^t.$$

常數 θ 被我們定義爲 $v_0(1)$，於是有 $0 \leqslant \theta \leqslant 1$．但因 $\theta = 0$ 及 $\theta = 1$ 的情形沒有意思，我們將不予考慮．事實上，$\theta = 1$ 時，對任何 $t > 0$ 我們有 $v_0(t) = 1$，這表示在任何時間區間內都確實沒有呼喚，即沒有任何事件的流；如 $\theta = 0$，則對任何 $t > 0$，$v_0(t) = 0$，這表示不論時間區間多麼小，都可以確定地得到呼喚．與此同時，不論 k 多麼大，在任何區間內呼喚的數目都將確實大於 k；換言之，在任何區間內有無窮多個呼喚的概率等於 1．我們在 §1 中已經說過，這樣的流永遠不予考慮，因此我們能够認爲 $0 < \theta < 1$．從而可令 $\theta = e^{-\lambda}$，其中 λ 是正的常數，而

$$v_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2.2}$$

我們注意，在推論過程中從未用到流的普通性，所以 (2.2) 對任何無後效的平穩的流都成立．這一點在以後對我們是重要的．

現在我們要尋求 $k>0$ 時的 $v_k(t)$. 這個問題有很多不同的解決方法,而且所有這些方法多是大有教益的,因爲在它們的基礎上可以解決一系列更加複雜的問題. 我們先從最初等的方法開始. 把 t 看做是常數,將 $(0,t)$ 分成任意 n 等分$(n>k)$,每個子區間的長度都是 $\frac{t}{n}=\delta$. 關於呼喚在這些子區間中的佈置,可能有兩種假設:

H_1—在每個子區間內都沒有多於一次的呼喚;

H_2—至少有一個子區間發生多於一次的呼喚.

我們顯然有

$$v_k(t)=\mathbf{P}(H_1,k)+\mathbf{P}(H_2,k), \tag{2.3}$$

其中 $\mathbf{P}(H_i,k)$ $(i=1,2)$ 表示下列雙重事件的概率: 1)假設 H_i 實現; 2)在區間 $(0,t)$ 內發生 k 次呼喚. 顯然, $\mathbf{P}(H_1,k)$ 表示這樣一種情況的概率, 即我們的 n 個子區間中某 k 個子區間各包含一個呼喚,而其他 $n-k$ 個子區間中不包含呼喚,因此

$$\mathbf{P}(H_1,k)=\binom{n}{k}[v_1(\delta)]^k[v_0(\delta)]^{n-k}.$$

由於公式(2.2)和給定的流的普通性,在 $n\to\infty(\delta\to 0)$ 及常數 k 時,我們有

$$[v_0(\delta)]^{n-k}=e^{-\lambda\delta(n-k)}=e^{-\lambda t}e^{k\lambda\delta}=e^{-\lambda t}[1+o(1)];$$

$$[v_1(\delta)]^k=[1-e^{-\lambda\delta}-\psi(\delta)]^k=[1-e^{-\lambda\delta}+o(\delta)]^k=$$

$$=(\lambda\delta)^k[1+o(1)]=\frac{(\lambda t)^k}{n^k}[1+o(1)],$$

因此

$$\mathbf{P}(H_1,k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}[1+o(1)]\to$$

$$\to e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad(n\to\infty).$$

另外一面, $\mathbf{P}(H_2,k)$ 顯然不會超過假設 H_2(即至少有一個子區間包含多於一次的呼喚)的概率,因爲對於個別的子區間,包含多於一次呼喚的概率是 $\psi(\delta)$, 因此

$$\mathbf{P}(H_2,k)\leqslant n\psi(\delta)=t\frac{\psi(\delta)}{\delta}\to 0\quad(n\to\infty).$$

由此可見，等式(2.3)的右側當 $n \to \infty$ 時有極限

$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!};$$

因爲(2.3)的左側與 n 無關，故

$$v_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, \cdots).$$

這樣一來，對於最簡單的流，在長度爲 t 的時間區間內呼喚的數目是按帶參數 λt 的布阿松律分佈的。

§ 3. 微分方程法

在專門文獻中，通常都用另外一種方法來解決我們提出的問題。這種方法比較起來不是初等的，但却容易推廣到更複雜的問題上去。現在來考慮這種方法。令 t 及 τ 爲任意兩個正數而 $k>0$；令 k_1 爲區間 $(0, t)$ 中的呼喚次數而 k_2 是區間 $(t, t+\tau)$ 中的呼喚次數。若在時間區間 $(0, t+\tau)$ 內發生 k 個呼喚，必須且只須下面的雙重事件中恰有一個發生：$k_1 = k$, $k_2 = 0$; $k_1 = k-1$, $k_2 = 1$; $k_1 = k-2$, $k_2 = 2$; $\cdots$; $k_1 = 0$, $k_2 = k$。但事件 $k_1 = l$ 及 $k_2 = m$ 的概率分別等於 $v_l(t)$ 及 $v_m(\tau)$；又因爲這些事件是相互獨立的（無後效的流！），所以

$$v_k(t+\tau) = v_k(t)v_0(\tau) + v_{k-1}(t)v_1(\tau) + \\ + v_{k-2}(t)v_2(\tau) + \cdots + v_0(t)v_k(\tau). \qquad (3.1)$$

但當 $\tau \to 0$ 時，我們有：

$$v_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} = 1 - \lambda\tau + o(\tau);$$

$$v_1(\tau) = 1 - v_0(\tau) - \psi(\tau) = \lambda\tau + o(\tau);$$

$$\sum_{l=2}^{k} v_{k-l}(t)v_l(\tau) \leqslant \sum_{l=2}^{\infty} v_l(\tau) = \psi(\tau) = o(\tau),$$

故由(3.1)有

$$v_k(t+\tau) = v_k(t)(1-\lambda\tau) + v_{k-1}(t)\lambda\tau + o(\tau);$$

$$\frac{v_k(t+\tau) - v_k(t)}{\tau} = \lambda[v_{k-1}(t) - v_k(t)] + o(1).$$

這證明了函數 $v_k(t)$ 對任何 $t>0$ 是可微的，而且

$$v_k'(t) = \lambda[v_{k-1}(t) - v_k(t)] \quad (k = 1, 2, \cdots); \qquad (3.2)$$

如果對於一般情形令 $v_{-1}(t)\equiv 0$，則方程(3.2)如同我們由(2.2)所直接看出的，當 $k=0$ 時也成立.

因此，爲了決定未知函數 $v_k(t)$，我們得到了綫性微分方程組(3.2)。這方程組容易用不同的方法解出，其中我們考慮兩個對於將來是最有用處的.

A. 未知函數替換法

令

$$v_k(t)=e^{-\lambda t}u_k(t)\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

由此可知

$$v'_k(t)=e^{-\lambda t}[u'_k(t)-\lambda u_k(t)]\quad(k=0,1,2,\cdots);$$

將 $v_k(t)$ 及 $v'_k(t)$ 的這些表達式代到方程(3.2)中，容易地得到

$$u'_k(t)=\lambda u_{k-1}(t)\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

根據定義，其中 $u_{-1}(t)\equiv 0$. 由此經過積分，即得

$$u_k(t)-u_k(0)=\lambda\int_0^t u_{k-1}(z)dz\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

對任何 $k\geqslant 0$，我們顯然有

$$v_k(0)=u_k(0).$$

但按照函數 $v_k(t)$ 的定義

$$v_0(0)=1,\ v_k(0)=0\quad(k>0),$$

因此 $u_0(0)=1$，$u_k(0)=0\ (k=1,2,\cdots)$；當 $k\geqslant 1$ 時我們就得到

$$u_k(t)=\lambda\int_0^t u_{k-1}(z)dz. \tag{3.3}$$

應當注意，由於(2.2)，以及函數 $u_k(t)$ 的定義，我們有

$$u_0(t)\equiv 1;$$

反覆利用公式(3.3)，就得到

$$u_1(t)=\lambda t;$$

$$u_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$u_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

所以

$$v_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!};$$

即得到了同前的問題的解.

B. 母函數法

令

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)x^k = \Phi(t, x),$$

等式左端的級數在任何情况下當 $|x| \leqslant 1$ 時都絕對收斂. 將方程(3.2)的每一項都乘以 x^k, 再按 k 由 0 到 ∞ 加起來,易得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} v_{k-1}(t)x^k - \lambda\Phi = \lambda(x-1)\Phi$$

或

$$\frac{\partial \ln \Phi}{\partial t} = \lambda(x-1).$$

由此可見

$$\ln \Phi(t, x) - \ln \Phi(0, x) = \lambda(x-1)t. \tag{3.4}$$

但是容易看出,對任何 x

$$\Phi(0, x) = v_0(0) = 1,$$

故由(3.4)給出

$$\Phi(t, x) = e^{\lambda(x-1)t} = e^{-\lambda t}e^{\lambda tx} = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}x^k.$$

將它與函數 $\Phi(t, x)$ 的定義相比較,直接看出

$$v_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \ (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

即重新得到問題的原來的解.

§ 4. 最簡單流的强度

我們所得到的結果證明了我們用以定義最簡單的流的三個性質(平穩性,無後效性,普通性)除了一個正的參數 λ 的值外完全地決定了它的特性. 任意兩個最簡單的流只能在參數的值上有所不同.

以後對於任何平穩流,我們約定以 $w(t)$ 來表示在時間區間 t 內

發生至少一次呼喚的概率．顯然有

$$w(t)=1-v_0(t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)=v_1(t)+\psi(t),$$

其中 $\psi(t)=\sum_{k=2}^{\infty}v_k(t)$ 表示在長度爲 t 的時間區間內發生至少兩次呼喚的概率．對最簡單的具參數 λ 的流，$v_0(t)=e^{-\lambda t}$，即當 $t\to 0$ 時

$$w(t)=1-e^{-\lambda t}=\lambda t+o(t),$$

亦即

$$\lim_{t\to 0}\frac{w(t)}{t}=\lambda. \tag{4.1}$$

我們可以認爲這個關係式對於給定的流是參數 λ 的定義．我們以後會看到，對任何平穩的流，極限(4.1)都是存在的，而且由關係(4.1)所決定的參數 λ 將是這個流的最重要的特徵之一．

現在回來考慮最簡單的流，並求其在長度爲 t 的時間區間內發生的呼喚次數的數學期望．它等於

$$\sum_{k=1}^{\infty}kv_k(t)=e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!}=e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda t,$$

因爲最後一個和顯然等於 $e^{\lambda t}$．我們可能預先料到這個結果，因爲按布阿松律分佈的變量的數學期望等於這個律的參數，即等於 λt．

單位時間內所發生的呼喚數目的數學期望稱爲該流的强度，我們將以 μ 來表示這個强度．對於最簡單的流，我們已建立起下列事實：$\mu=\lambda$．但對具有更複雜的結構的平穩流，這個等式不僅不是顯然的，而且也不永遠是正確的．將來我們還要更詳細地分析這個問題．現在，只須肯定對任何平穩流 $\mu\geqslant\lambda$．事實上，平穩流在時間 t 內的呼喚次數的數學期望等於

$$\mu t=\sum_{k=1}^{\infty}kv_k(t)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)=w(t),$$

$$\mu\geqslant\frac{w(t)}{t};$$

因爲不等式的左端與 t 無關，所以由(4.1)得到 $\mu\geqslant\lambda$．當然，對於任