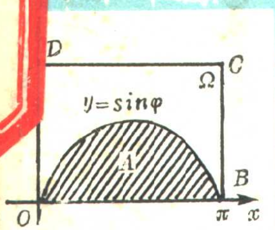
卢正勇

事件及其概率



福建教育出版社

事件及其概率

卢 正 勇 编

福建教育出版社

内容提要

本书系统介绍了概率论的基础知识，内容包括事件及其运算、事件的概率、条件概率和独立性四个部分。并配有一定数量的练习（附解答）。

本书可作为中学教师和具有高中程度的社会知青自学进修的读物，也可供综合大学和高等师范院校数学专业的学生参考。

· · ·

事件及其概率

卢正勇 编

出版：福建教育出版社

发行 福建省新华书店

印刷 福州大学印刷厂

787×1092毫米 1/32开本 3.75印张 83千字

1983年4月第一版 1983年4月第一次印刷

印数 1—33,00

书号：7159·609 定价：0.33元

编者的话

概率论与数理统计是从数量侧面研究随机现象的统计规律性及其应用的数学分支，它的理论与方法已广泛应用于工农业生产、军事和科学技术领域中。

为了适应四个现代化的需要，概率统计的一些基本知识已经编入中学数学课本。因此，作为中学数学教师必须掌握概率与数理统计的基本知识。

本书是用笔者在莆田等地中学教师概率培训班的讲稿，结合概率与数理统计函授教学的实践整理修订而成的。内容选择中学教师担任中学概率教学所必需的知识，采用讲稿形式编写，便于读者自学。在编写时，力求通过一定数量的例子，由浅入深讲清基本概念、基本理论及基本方法，并尽可能联系中学数学教材实际，作适当的教材分析及教法建议。书中配有一定数量的练习，同时附有解答供读者核对。笔者十分感谢刘卓雄同志，他在百忙之中审阅了初稿。

卢正勇

一九八〇年八月

目　录

§1 事件及其运算

1.1 事件的概念

一、随机现象与统计规律性

在实际生活中，我们常遇到如下两类不同的现象.

一类是**确定性现象**，这类现象的特点是：在一定条件下，必然会出现某种结果；或者必然不出现某种结果.

[例 1] 在标准大气压下，把纯水加热到摄氏100度时，必然会出现水沸腾的现象，而在这些条件下，"水不沸腾"这一现象是一定不会出现的.

[例 2] 把一根铜线加热，则一定会出现铜线体积膨胀的现象，而在这条件下，一定不会出现这根铜线收缩的现象.

几何、代数、数学分析等数学分支研究的是确定性现象的数量规律.

另一类现象叫**随机现象**，其特点是：在一定条件下进行重复试验或观察，可能出现多种结果，在每次试验前不能肯定将出现什么结果.

[例 3] 随意抛掷一枚质料均匀的硬币，可能出现正面向上，也可能出现反面向上，在抛掷前不能肯定将出现那一面.

[例 4] 炮兵使用同一门炮，按同样射击条件（例如同一批炮弹、同样的射击角度、同样的炮位等）进行多次射击，结果其射程可能远些，也可能近些. 射击前不能肯定其射程多远.

[例 5] 观察我省平和县第二代三化螟蛾灯下高峰日，可能是 5 月 26 日，也可能是 5 月 28 日或其他日子，在高峰日未出现前，无法肯定它将出现在那一天.

这些例子说明随机现象是普遍存在的，随机现象在一次试验或观察中，出现什么结果是偶然的，但是在相同条件下多次观察一个随机现象便可发现其规律性. 如例3，把一枚质料均匀的硬币抛掷几百次、几千次就可发现出现正面的次数与出现反面的次数大致相同；在例 4 中，多次射击后，可发现其射程在某一常数 a 附近变化，射程大于或小于 a 的弹数大致差不多，比 a 大很多或比 a 小很多的情况是极少见的等等.

随机现象在大量观测或试验中所呈现出来的规律性，叫做随机现象的统计规律性. 掌握了随机现象的统计规律性就可以让它为人类服务. 例如掌握平和县第二代三化螟蛾高峰日发生的统计规律，就可利用它来作高峰日的统计预报.

概率论与数理统计就是从数量侧面来研究随机现象的统计规律性及其应用的一门数学学科，在这本小册子里，我们介绍这一学科的两个基本概念——事件及其概率.

二、事件的概念

每一门学科都要建立一些基本概念，事件是概率论的基本概念之一.

1. 必然事件、不可能事件和随机事件

(1) 在一定的条件下，每一次试验或观察都必然会出现的事情，叫做**必然事件**.

在例 1 中，一定条件是：标准大气压、纯水、温度 100℃，在这些条件下，“水沸腾”这件事情是必然事件.

[例6] 若a、b都是实数，则$a+b=b+a$.

这里一定条件是：a、b都是实数，对它们施行数的加法，在这些条件下，“$a+b=b+a$”这件事是必然事件.

(2) 在一定条件下，每一次试验或观察都不可能出现的事情叫做**不可能事件**.

在例1所述的条件下，“水不沸腾”这件事是不可能事件，在例6所述的条件下，“$a+b\neq b+a$”这件事是不可能事件.

容易看出，在同样的条件下，必然事件的反面是不可能事件，反之亦然．必然事件与不可能事件都是确定性现象的结果.

(3) 在一定条件下，每一次试验时，可能出现也可能不出现的事情，叫做**随机事件**.

如例3所述的随机现象中，在“硬币、质料均匀及随意抛掷”的条件下，“硬币正面向上”这件事是可能出现也可能不出现的，所以它是一个随机事件.

[例7] 某人向距离50公尺的十环靶射击一次．因为在这一条件下射击一次，“射中三环”这件事可能出现，也可能不出现，故“射中三环”是一个随机事件．同理，“射中环数不超过三环”及“射中奇数环”都是随机事件.

随机事件简称**事件**，它是随机现象的结果．为了研究的方便，常把必然事件和不可能事件看作随机事件的极端情形，因此今后所述的事件包含必然事件、不可能事件和随机事件．事件常用大写拉丁字母A、B、C、……或A_i、B_j等来表示，而必然事件常用Ω来表示，不可能事件常用ϕ来表示.

说明：

说到事件，总是与“一定条件”联系在一起的，以后都将这一定条件简称为条件组S．在讲事件的概念时，必须先阐明条件组S是什么，然后才能分析某事情是什么事件．例如：“在一批产品中任意抽取一件，问抽到的是次品这件事是什么事件？”这里所给的条件组S就不明确，如果这批产品全是正品，用A表示“抽到的一件是次品”这件事，则A是不可能事件．但若这批产品中既有次品也有正品，则A就是随机事件．所以在例题及习题中，应把条件组S讲明确．

2．用集合来描述事件

(1) 上面我们参照中学现行课本的讲法直观地描述了“事件”这一概念．为了把概率论的内容叙述得严格一点，下面我们用集合来描述事件，先介绍随机试验的概念．

[例8] 袋中装有5个编上1—5五个号码的外形相同的球，从中任意抽取一个(以上是条件组S)，可能取到某一号码的球．这是一随机现象．这一随机现象可以通过在条件组S实现下的试验来观察它出现的号码．这种试验就是我们要介绍的随机试验．随机试验记作E．每做一次试验(即条件组S的一次实现)，便可观察到一个可能结果．如本例，从装有编了号的5个球的袋中任取一个球，观察它出现的号码(随机试验E)，如果取到4号球，那么“取到4号球”便是试验一次，观察到的一个可能结果．易见，本例E有“取到i号球”($i=1, 2, 3, 4, 5$)的五个可能结果．把这五个可能结果分别记为ω_1，ω_2，ω_3，ω_4，ω_5．

一般地，我们可以通过研究随机试验来研究随机现象．

一个试验 E，如果(1)能在相同条件下（即条件组 S 不变）重复进行；(2) 每次试验的可能结果不止一个，并能事先明确试验的所有可能结果；(3) 进行试验前不能事先肯定它将出现什么结果，则称 E 为**随机试验**. 以 ω 表示随机试验 E 在一次试验时观察到的一个可能结果，并称为一个**样本点**，所有 ω 所成的集合称为 E 的**样本空间**，通常用 Ω 表示. 在具体问题中，认清一个随机试验的样本空间是由什么构成的是十分重要的，因为它是描述随机现象的第一步.

［例 9］E：抛掷一枚质料均匀的硬币，观察所出现的面. 出现正面记为 ω_1，出现反面记为 ω_2，则 E 的样本空间是：$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

［例10］E：某人向距离50公尺的十环靶射击一次，观察所得的环数. 以 ω_i 表示射中第 i 环，则 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{10}\}$，若简记 ω_i 为 i，则 $\Omega=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$.

［例11］E：观察掷一枚硬币直至出现正面为止的次数. 由于可能掷一次就出现正面（记为 ω_1，简记为 1），也可能掷 2 次才出现正面（记为 ω_2，简记为 2），……所以 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots\}$. 在本例中，样本空间由无穷多个元素构成，但它们可以与自然数集建立一一对应关系，称为有可列个样本点.

［例12］E：向数轴上任意抛掷一质点，观察落点的坐标，则 $\Omega=(-\infty, +\infty)$.

从上面一些例子可见，一个随机试验 E 的样本空间可以由有限个元素构成也可以由可列个元素构成，甚至可以是一个连续集，我们主要讨论 Ω 是有限集的情况.

(2) 现在我们来看例 8 所述的随机试验 E 的一些事件. 如事件 A：“抽到偶数号球”. 当且仅当抽到 2 号球或 4 号球时，我们说事件 A 出现. 这样事件 A 可以看成是 E 的

样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ 的一个子集 $A=\{\omega_2, \omega_4\}$，当且仅当这个子集中的一个样本点出现时，我们说 A 出现．

类似地，事件 B："抽到球的号数不超过3"，则 $B=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$；事件"抽到球的号数不超过5"是一个必然事件 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_5\}$；事件"抽到6号球"是一个不可能事件 ϕ，它不包含 Ω 的任一样本点；容易看出，Ω中的五个可能结果每个都是事件，而且是最简单的事件，它们都是 Ω 的单元素子集．如事件 C："抽到3号球"可表为 $C=\{\omega_3\}$．由 Ω 的单元素子集表示的事件常称为 E 的**基本事件**．

于是从集合的观点看，E 的一个**事件**是 E 的样本空间 Ω 的某个子集．称某事件**出现**（或**发生**），当且仅当这事件所包含的某一个样本点出现．我们把 Ω 的两个特殊子集 Ω 及 ϕ也看作事件．因为在每次试验中，必然出现Ω中的某个样本点，也即 Ω 必然出现，所以称 Ω 为**必然事件**，而 ϕ 在每次试验中都不会发生，所以称 ϕ 为**不可能事件**，今后事件和它在 Ω 中对应的子集，将用同一记号表示．

对例 8 的随机试验 E，Ω共有

$$C_5^0+C_5^1+C_5^2+\cdots+C_5^5=2^5$$

个子集，所以 E 有 2^5 个事件．

应该注意的是，Ω 由什么构成是由随机试验的内容决定的，例如：

E_1：某人向距离50公尺的十环靶射击一发，观察中靶或脱靶．记 ω_1 为"中靶"、ω_2 为"脱靶"，则 $\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2\}$．

E_2：某人向距离50公尺的十环靶射击一发，观察射中几环，则 $\Omega_2=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$．

又如袋中装有2个黑球、3个白球，如果我们的试验是从中任取一球，观察其颜色，则这一随机试验的样本空间是 $\Omega=\{$黑，白$\}$；如果我们把袋中的球编上1—5号，随机试验是从袋中任取一球，观察取出球的号码，则这一随机试验的样本空间是 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

练　习　一

1. E：观察某商店在某天营业时间20:00—21:00中进店门的顾客数．写出 Ω，指出下列各事件是必然事件、不可能事件还是随机事件，并用 Ω 的子集表示它们：

(1) 有顾客进店门；

(2) 没有顾客进店门；

(3) 有100 个顾客进店门；

(4) 进店门的顾客数是某个非负整数；

(5) 进店门的顾客数不是非负整数。

2. 袋中装有写上1、2、3 的三张卡片，E：从袋中任取一张，观察取出的号码．试写出这一随机试验的样本空间 Ω 及 E 的所有事件.

1.2　事件的关系及运算

概率论的重要研究课题之一，是研究如何从一些已知事件的概率去推算与之有关的事件的概率．为此必须研究事件间的关系及运算．下面假定所讨论的事件都是某随机试验 E 的事件，由前面的讨论知道它们各对应 E 的样本空间 Ω 的一个子集.

一、事件的包含关系

设 A、B 是两个事件，若组成 A 的每一个样本点都属

于 B，则称**事件 A 包含在事件 B 中，或事件 B 包含了事件 A**，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$．这时事件 A 出现必然导致事件 B 出现．这是因为，若事件 A 出现，则必有 A 的一个样本点 ω 出现，由于 $A \subset B$，即 $\omega \in B$，而由于 ω 出现，所以事件 B 出现．

〔例 1〕 在§1.1 例 10中，记 A：“射中奇数环”，B：“中靶”，由于

$$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\},$$

$$B=\{1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 10\},$$

A 中的每一个样本点 1,3,5,7,9 都属于 B，所以事件“射中奇数环”包含在事件“中靶”中，即 $A \subset B$（图 1）．

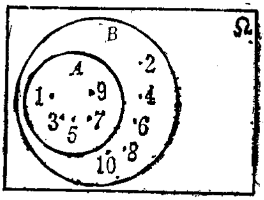


图 1

对任何事件 A，显然有

$$\Omega \supset A \supset \phi\ .$$

二、事件的等价关系

若事件 A 与 B 有 $A \supset B$ 且 $B \supset A$，则称事件 A 与 B 等价或称 A 等于 B，记为 $A=B$．

〔例 2〕 同上例，记 A：“中靶”，B：“击中 1 至 10 中的某一环”，则 $A=B$．

三、事件的交(积)

由同时属于事件 A 和 B 的所有样本点组成的集合所表示的事件，称为**事件 A 与 B 的交**（或积），记为 $A \cap B$ 或 AB．它表示“事件 A 与事件 B 同时出现”的事件．

〔例 3〕 同例 1，记 A：“击中奇数环”，B：“击中的

环数不超过2”，则$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{0, 1, 2\}$，$AB=\{1\}$，所以AB表示“击中1环”（图2）.

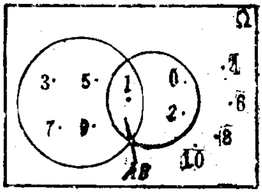


图 2

［例4］箱中有100个灯泡，其中甲厂生产的60个，乙厂生产的40个，100个灯泡中有6个次品其中2个是甲厂的. 今从箱中任取一只灯泡. 记A：“取到甲厂生产的灯泡”，B：“取到次品”，则AB表示“取到甲厂生产的次品”的事件.

若有n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，它们的积事件是由同时属于$A_1, A_2, \cdots, A_n$的所有样本点构成的集合表示的事件. 记为$A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n$，它表示“事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$同时出现”这一事件.

四、事件的并

至少属于A或B之一的所有样本点组成的集合所表示的事件，称为**事件A与B的并**，记为$A \cup B$. 它表示事件A与事件B至少出现一个的事件（即A出现B不出现，或B出现A不出现或A、B同时出现）.

［例5］同例1，记A：“射中环数不超过3环”，B：“射中2至5的某一环”，则$A=\{0, 1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3, 4, 5\}$，$A \cup B=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$所以$A \cup B$表示事件“射中环数不超过5环”（图3）.

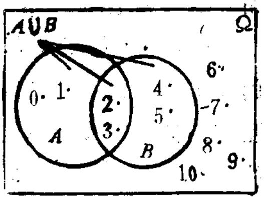


图 3

n个事件A_1，A_2，…，A_n的并是由至少属于它们之一的所有样本点组成的集合所表示的事件，记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，它表示"事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$中至少有一个出现"的事件．

［例6］把100个人的血清混合，记A_i为第i个人的血清中含有肝炎病毒的事件，则$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{100}$表示混合后的血清中含有肝炎病毒的事件．

［例7］10门高炮各向一架敌机发射炮弹一发．记A_i为第i门炮击中敌机的事件，则

$A_1A_2\cdots A_{10}$表示10门炮同时击中敌机的事件；

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10}$表示敌机被击中的事件．

五、互斥事件

若$A\cdot B=\phi$，即事件A与事件B不能同时出现，则称**事件A与B互斥**（或称**互不相容**）．

［例8］在10个编了号的乒乓球中，1—7号是一等品，8—9号是二等品，10号是三等品．从中任取一个球，记A："取出的是一等品"，B："取出的是二等品"，则

$$A=\{1,2,\cdots,7\},$$
$$B=\{8,9\}.$$

因为$A\cdot B=\phi$，所以事件A与B互斥，从这里可以看到，如果事件A出现，事件B就不会出现，反之亦然．

n个事件如果两两互斥，就称这n个事件**彼此互斥**．在例8中，若记C："取出的是三等品"，则A、B、C彼此互斥．易见，Ω的单元素子集所表示的基本事件是彼此互斥的．

对于彼此互斥的事件A_1，A_2，…，A_n，称它们的并

为**和**，并记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

六、对立事件

设 A 是一事件，由 Ω 中不属于 A 的所有样本点所组成的集合对应的事件称为 A 的**对立事件**（或 A 的**逆事件**），记为 $\bar{A}$. $\bar{A}$ 表示"A 不出现"这一事件.

［例 9］同例1，记 A："命中环数超过5环" 则 $A=\{6, 7, 8, 9, 10,\}$ 所以 $\bar{A}=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. 即 $\bar{A}$ 表示事件："命中环数不超过5环"（图 4）.

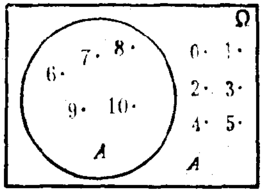


图 4

由对立事件的定义，A 与 $\bar{A}$ 的关系亦可表述如下：

$$A\cdot\bar{A}=\phi \text{ 且 } A+\bar{A}=\Omega.$$

即在一次试验中 A 与 $\bar{A}$ 不会同时出现，但 A 或 $\bar{A}$ 必出现其一，换句话说，做一次试验其中必有一个出现的两个互斥事件叫做对立事件.

［例 10］随意抛掷质料均匀的一枚硬币，记 A："出现正面"，则 $\bar{A}$ 是"不出现正面"即"出现反面"这一事件.

对立事件一定互斥，但互斥的两事件不一定是对立事件，要看它们的和是不是必然事件.

［例 11］E：打靶3发，观察命中的子弹数. 记"命中 i 发"为 ω_i（$i=0, 1, 2, 3$），于是 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. 则 $A_1=\{\omega_1\}$ 与 $A_2=\{\omega_2\}$ 互斥，但 A_1 与 A_2 不是对立事件，因为 $A_1+A_2\neq\Omega$.

七、事件之差

由 Ω 中属于 A 而不属于 B 的所有样本点所组成的集合表示的事件，称为**事件 A 与 B 之差**，记作 $A-B$. 它表示"事件 A 出现而 B 不出现"这一事件.

[例12] 同例 1，记 A："击中环数不超过 5 环"，B："击中奇数环"，则

$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$,

$A-B=\{0, 2, 4\}$.

所以 $A-B$ 表示事件："击中 0 环或 2 环或 4 环"（图5）.

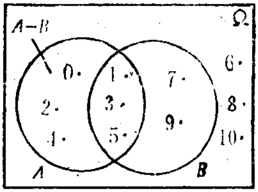
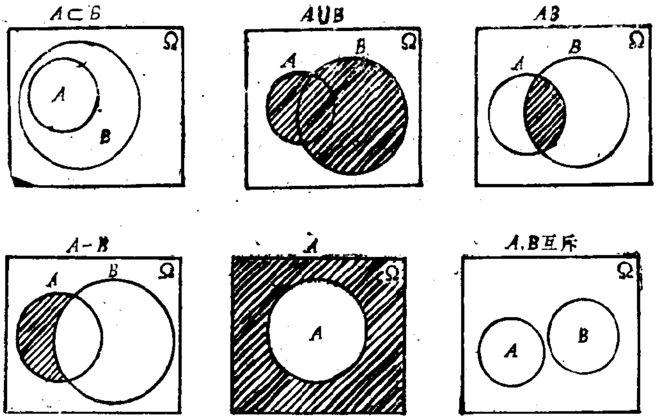


图 5

我们把事件间的关系与运算用韦恩图综述如下（图 6）：



（$A\cup B$, AB, $A-B$, $\bar{A}$ 分别以图中的阴影部分表示）

图 6