

在中学数学教学中 如何培养学生的逻辑思惟

馬 忠 林 著

新 知 識 出 版 社

7411-131/6

在中学数学教学中
如何培养学生的邏輯思维

馬 忠 林 著

新 知 識 出 版 社 出 版

(上海湖南路9号)

上海市書刊出版業營業許可證出015号

上海协兴印刷厂印刷 新華書店上海發行所总經售

开本：787×1092 1/32 印张：1 字数：22,000

1956年11月第1版 1956年11月第1次印刷

印数：1—20,000本

統一書号：7076·167

定 价：(6) 0.11元

13.13-15/53

序 言

在中学数学教学中，培养学生的邏輯思惟能力的問題，無疑地是中学数学教学大綱頒布以來，中学数学教师在普遍地鑽研着的主要問題之一。

本書內容着重提出中学数学教材中有哪些邏輯因素，并对这些因素進行一些分析；同时也提出了培养学生邏輯思惟工作的几点要求，这些要求是着重对初中以至高中一二年級的数学教学而提的。在以这些邏輯因素为題材，对学生進行培养邏輯思惟的方法方面，虽作了一些叙述，但还感到很不够，因为这关系到中学数学教学的实际經驗問題，而我恰缺乏这些实际經驗，这有待于讀者在自己的实际教学中去体会和進一步鑽研。至于对培养学生邏輯思惟工作方面所提出的几項要求，在提法上是否合適，希望讀者在教学实践中加以驗證。

数学是邏輯性很强的科学之一，但不能把它和邏輯学混为一談。只有那些唯心主义論者才認為数学可以看作是邏輯学。這兩門科学所研究的对象是完全不同的。書中引用了一些邏輯学的名詞，也参考了邏輯学中的科学內容，这只是企圖把形式邏輯应用到初等数学中去，以培养学生的邏輯思惟能力，希望讀者注意到这一点，在实际教学中，不要生硬地搬用任何邏輯学的名詞，以免影响教学效果。

我个人邏輯学方面的知識很淺薄，又缺乏中学实际教学经验，所以本書的內容，还有待讀者教学实践加以驗證。至其提法不当，以至科学上謬誤的地方，也在所难免，敬希讀者批評与指正。

这本小册子是我揣冒昧，应我校附中数学教研组教师们的要求、结合自己对这问题的学习而写成的一篇报告。后经几次修改，1955年登载于“东北师范大学科学研究通报”（自然科学版），同年9月武汉“数学通讯”转载此文。

在本书写作中，曾蒙刘世德、刘凤璞两同志帮助阅稿，并提出了一些宝贵的意见，特在此表示感谢。

作者于长春 1956年4月

目 錄

引言.....	1
一 如何培养学生理解概念的能力.....	2
二 如何培养学生掌握判断和运用推理的能力.....	14
結語.....	27

引 言

我國中學數學大綱(草案)里明確規定：“教師在講授數學的過程中，要以社會主義思想教育學生，要充分聯系我國社會主義建設中各方面的成就與情況，以培養他們成為積極參加社會主義建設和保衛祖國的全面發展的新人。注意培養學生的辯證唯物主義的世界觀，愛國主義思想和民族自尊心以及愛科學、愛勞動、愛集體、守紀律的美德，並且鍛煉學生的堅強意志和性格。”

又指出“防止形式主義的教學所應當努力的方向是：發展學生生動的空間想像力，發展學生的邏輯思維能力和判斷力……”，“幾何學的教學目的在於系統的研究平面上和空間物體圖形的性質，並利用這些性質去解決計算題和作圖題；在於發展學生的邏輯思維和對空間的想像力……”。

這充分地說明了，數學教師不只是應當教給學生以數學知識，以及用這些知識來解決各種實際問題所必需的技能和熟練技巧，同時還應該通過數學教學，使他們形成辯證唯物主義的世界觀，培養他們的邏輯思維能力，並應在數學教學過程中，時刻注意到培養學生的堅強、果敢和細致的性格，以及對其周圍現實事物的正確觀察、分析和批判的能力。

數學是邏輯性最強的科學，也是邏輯因素最豐富的科學之一。加里寧說過：“數學能使人們的思想規律化，它能發展人們的邏輯思維能力。”那麼中學數學教材里包含哪些邏輯因素，並且在實際教學中怎樣培養學生的邏輯思維，這是對中學數學教師

提出的迫切問題。

中学数学教材中邏輯因素是很多的。教師在教學過程中，能作到下列的三項要求時，則培養學生邏輯思維能力的目的就基本上可以达到。

1. 應該保證每個新的名詞(概念)都使學生清楚地了解，并用描述或定義的方法來指明各該概念的內容，使學生能掌握概念的本質和概念相互間的關係。

2. 應該嚴格地、清楚地敘述所研究的每個命題(公理，定理……)，正確地提出它們的條件與結論，培養學生對命題的分析能力。

3. 應當正確的證明每個定理，教會學生用各種推理方法來進行證明，以培養他們的邏輯思維和推理能力。

中學數學教師應時刻注意這三項要求，並不斷地努力在教學中來貫徹它。這樣就能使學生的邏輯思維能力得到不斷的發展。

一 如何培養學生理解概念的能力

在數學里概念是很多的，例如：“三角形”，“正方形”，“負數”，“方程式”等等。對中學生來說，使他們正確的理解這些概念，是比較困難的。我們不應該要求學生，來生記硬背這些名詞，必須從這些概念的本質來進行講解。

我們知道，各個思維對象間彼此相同或相異的性質和特征，都叫做它們的屬性。其中表示對象本質特征的屬性，叫做本質屬性。而概念就是反映思維對象本質屬性的，例如：“平行四邊形”這個概念，就有下列的許多屬性：(1)四邊形，(2)對角相等，(3)對角線互相平分，(4)對邊平行相等。而概念所反映的不是所有

这些属性,只是其中的本质属性——对边平行。由于提供了这个特征,就使我们对于这个概念,有了本质上的认识。并且,由于有了它也能使我们把平行四边形和其他的四边形(例如梯形)区别开来。

任何一个概念都有内涵和外延,概念的外延是已知概念所指的一切对象的总和。例如:(1)“四方”这个概念的外延,包括着:东,西,南,北。(2)“三角形”这个概念的外延,包括着:直角的、钝角的、等腰的、等边的三角形等等。

概念的内涵是已知概念本质属性的总和。例如:“人”这个概念的内涵是能制造生产工具和具有抽象思维能力的动物。四边形的本质属性是它有四个边等等。

概念的内涵和外延之间,存在着一定的关系。例如:在四边形这个概念的外延里,包括着一切的四边形。所有这些四边形的共同属性(四个边)是四边形的内涵。再以外延较小的平行四边形来看,它的外延是四边形外延的一部分,因此,平行四边形的外延对四边形来说是缩小了,而它的内涵却扩大了,因为又增加了新的属性——两组对边平行,这个属性是一般的四边形所没有的。

若概念的内涵加以扩大时,它的外延便将缩小。例如:把平行四边形的内涵,再加上一个属性——各边相等时,那么就形成一个新的概念——菱形。显然,这个概念的外延又小于平行四边形的外延,而它的内涵却增加了一个新的属性。因此,我们得到一个结论:概念的外延愈广,它的内涵愈狭;而概念的内涵愈广,它的外延愈狭。

从这里可以看出,在讲授概念时,必须指出一般概念包括的种类(外延)较多,而它们的共同属性(内涵)比较简单。而特殊

概念，就与此相反。当然这种相互关系，僅能適用於一个概念可以加入另一个概念的外延中的那些概念上面，也就是下面所要講的类概念和种概念間的关系。

概念P的外延是概念Q的外延的一部分时，概念Q叫做类概念，而概念P叫做种概念。

一般地，具有他們所特有的共同屬性的对象全体，被一个概念所包括时，这概念表现为一个类。就是說，类是由概念外延的一切对象所形成，这些对象都具有同样的屬性，而种是被这个概念所包含較小的类。它的外延是类概念外延的一部分。例如：“数”对实数來說，便是一个类概念，而实数便是种概念。正多边形和正方形也是类概念和种概念的关系。

类和种是相对的关系。因为同是一个概念，由于和其他概念的比較，可以說它是种或者是类。例如：平行四边形这个概念，对菱形來說它是类，而对四边形來說，它便是种。又如，有理数对整数來說它是类，而对实数來說，它便是种。

还須指出，有些概念是不能互相比較的。因此，它們之間不可能產生类和种的关系。例如，“数”和“正方形”这两个概念就是，因為它們之間，並沒有什么共同的屬性。

类概念和种概念，是始終互相联系着的，是不能互相离开而單獨存在的。

概念互相間存在着下列的几种主要关系：(1)从屬关系。(2)并列关系。(3)部分重合关系。(4)矛盾关系。

(1)从屬关系。具有从屬关系的兩個概念，是其中一个概念的外延成为另一个概念外延的一部分。它們之間是种和类的关系。因此，有时把前者叫做下位概念，而后者叫做上位概念。兩者內涵間的关系是：上位概念的內涵是下位概念內涵的一部分

(圖1)。例如：四边形与平行四边形，有理数和整数，都是有从屬关系的概念。其中四边形与有理数分别是上位概念，平行四边形和整数分别是下位概念。

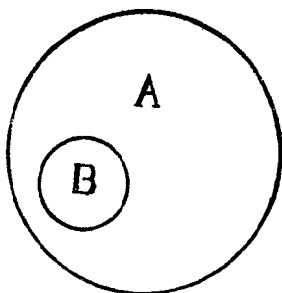


圖 1

(2)并列关系。并列关系是同为某一个概念下位概念間的关系(圖2)。在这种关系下，它們的外延是各不相同

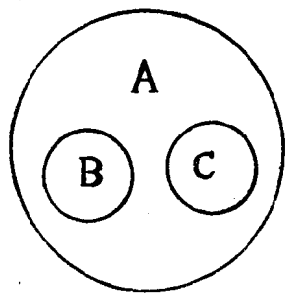


圖 2

的。而它們的內涵，却有一部分相同，其余部分是不同的。其相同的部分是它們的上位概念的屬性。例如：方程式和恒等式对等式來說就是并列关系。梯形和平行四边形对四边形來說也是并列关系。兩者的外延是不相同的，但它們有一个共同的屬性——四个边。其余的屬性各不相同：梯形有一对平行的对边，平行四边形有兩对平行的对边等等。

(3)部分重合关系。在部分重合关系下的兩個概念，有某些共同屬性。它們的外延也有一部分是相同的。有这样关系的兩個概念，有时也叫交叉概念(圖3)。例如，大学生和運動員、正数与整数，或矩形与菱形都是部分重合关系的概念。在最后一个例子里，我們知道矩形和菱形有共同的屬性——对边平行和对角綫互相等分。而它們的外延又都包含着正方形。因为正方形总可以看作是矩形或菱

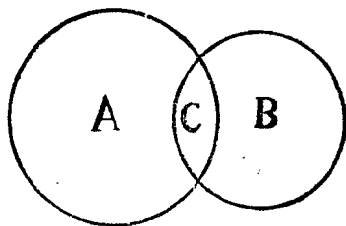


圖 3

形。

(4)矛盾关系。在这种关系下的两个概念的外延各不相同。

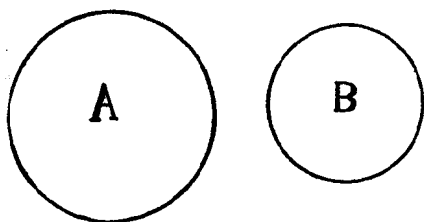


圖 4

而其中一个概念的內涵所包括的屬性否定了另一个概念的屬性。例如，正数和負数，正比例和反比例都是有矛盾关系的概念(圖4)。

由下圖(圖5)所表示的多边形之間的关系，就充分地可以說明上面所說的概念間所存在的几种关系。使学生能清楚地了解概念之間的关系，不僅有利于下面所要講

的分类和定义工作，更重要的是使他們認識到：(a)那个概念是另一个概念的特殊情形。(b)那些概念同属于一个更一般性的概念。(c)那些概念有交叉的关系。(d)那些概念是互不相关的，或彼此相斥的。这样就会使学生对概念了解的更清楚更确切。因此，就丰富了数学教学的思想性。

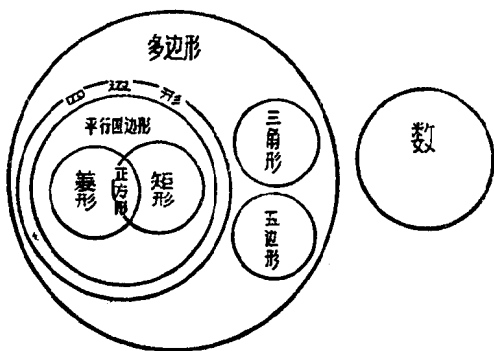


圖 5

分类是揭示概念外延的邏輯方法。

揭示概念的外延就是指出对某一个概念來說具有并列关系的諸下位概念是什么？也就是把类概念分成隸属于它的各个种

概念。例如，三角形可以分为銳角的、直角的和鈍角的三角形。这时，三角形是类概念，而銳角、直角和鈍角三角形是分类后所得到的种概念。

作为分类根据的概念的屬性，叫做分类的基礎，概念可以由於基礎的不同，而有各种不同的分类方法。例如，三角形也还可以以边的長短為基礎來進行分类。这时，將分为等腰的（但不是等边的）、不等边的、等边的三角形。

正确的分类，必須遵守下列的四条規則：

(1)分类应当是相称的。就是說由于分类所得到的种概念的和必須等于被分类概念的外延。也就是說在正确的分类中，所得到的种概念的总和不能多于或少于被分类概念的外延。上面所列举的在不同基礎上所進行的三角形的分类，都滿足了相称的要求。下面是兩個違反了这条規則的錯誤分类的例子：(a)綫有直綫和折綫。(b)自然数有合数和質数等等。

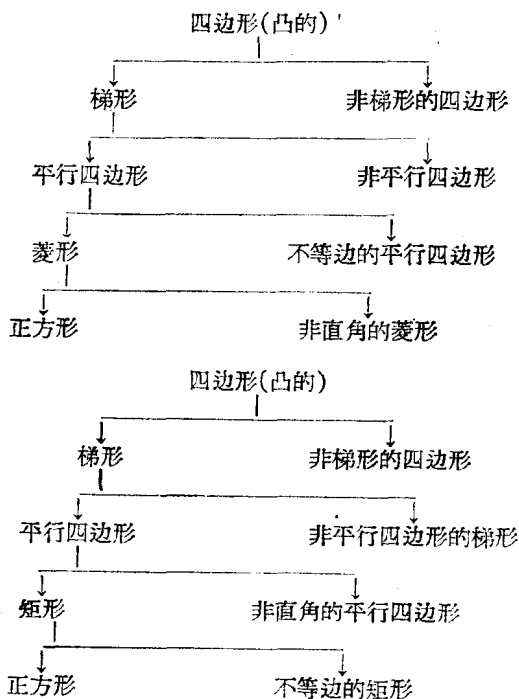
(2)每一次分类应当按同一基礎來進行。就是進行分类时，应当在被分类的概念的屬性里，取出一个屬性作为分类的基礎，來進行分类。下面是違反这条規則的兩個錯誤分类的例子：(a)角有直角和鄰角。(b)三角形有直角的、等腰的和銳角的等等。

(3)分类后所得到的种概念应当是互相排斥的。如果所采用的分类基礎沒有錯誤，那么所得到的种概念一定是互相排斥的，違反这条規則，分类后所得到的种概念，就要產生重复、交叉等不正确的情况。例如，把四边形分为平行四边形和矩形。這兩個概念是从屬关系，犯重复的毛病。把平行四边形分成矩形和菱形，就犯了交叉的毛病。都成为不正确的分类。

(4)分类不应越等。就是說分类时，应当取最接近的种，不应当取远隔的种。我們不能把多边形分成四边形，三角形，梯形等等。

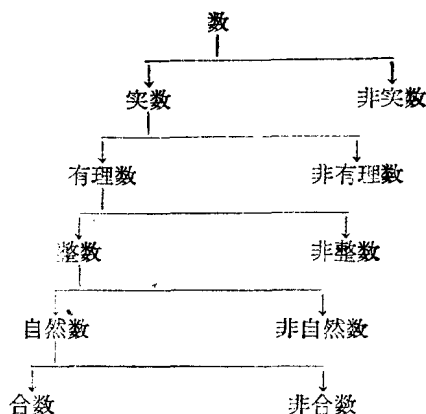
四边形可以按下面的兩種方法來進行分類^①。

下面关于四边形和数的分类,我們是采用二分法來進行的,这种分类的方法是把被分类的概念分成两个矛盾的概念,它所根据的原則,是由排中律得來的。这种方法常被看作是科学的方法被廣泛的使用。



为了明确某些概念的范围,或研究某些几何作圖題的討論时,分类是常常需要的。由于需要的不同,因此分类也將更复杂化。并且同一問題按不同的基礎或同时按几个基礎來進行分类,

① 这个分类,按现行中学几何教科書上梯形的定义不適用。这必須把梯形下定义为:一組对边平行的四边形。



也就成为必要了。如果某一概念以基础A进行分类,得出 a 种,再以基础B来进行分类,得出 b 种时,则这个概念同时按A, B两个基础来进行分类时,一般的,可以得到 $a \cdot b$ 种。例如三角形同时按边的长短和角的大小来进行分类时,就可以得出 $3 \cdot 3 = 9$ 种。但其中等边直角三角形和等边钝角三角形是不存在的。在作图题:“知两边及其中一边的对角,求作三角形”(图6)的讨论中,如果角

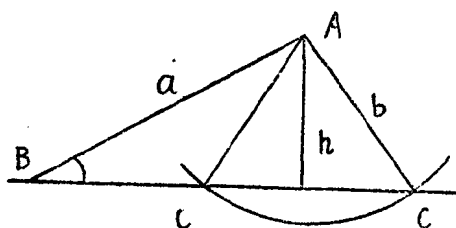


图 6

的大小和两已知边的大小都不加以限制时,那么这个作图题解数的讨论就很复杂了。按下表的分类来进行讨论是比较合适的,因为按这样的分类加以讨论,不遗漏任何一种可能的情形。

b, a, h 的关系	$B < d$	$B \geq d$
$b < h$	0	0
$b = h$	1	0
$b > h \begin{cases} a > b \\ a = b \\ a < b \end{cases}$	2	0
	1	0
	1	1

定义是揭示概念内涵的逻辑方法。

每个概念都反映着事物的本质属性，这些属性构成了这个概念的内涵。很多的数学概念①是用定义的方法来表述的。当我们给“矩形”这个概念下定义时，首先应该指出它最接近的类——平行四边形。因为菱形也是平行四边形，所以为了把矩形和菱形区别开来，还必须指出它的本质属性——内角为直角。我们把这个本质属性叫做种差。所以给矩形下定义时，说：“内角为直角的平行四边形叫做矩形”就可以了。定义的结构，可以用下列的公式来表示：

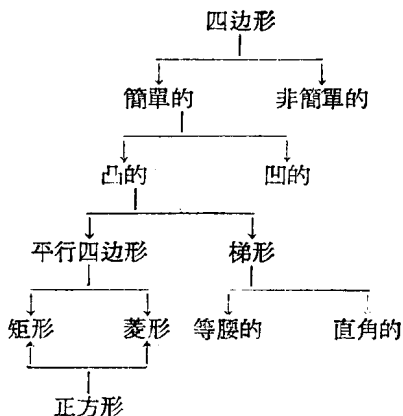
“种”=“最接近的类”+“种差”

在现行的初中平面几何教科书中关于“割线”，“弦”和“直径”这些概念的定义都是按上述方法提出的。即：“连结圆上两点的线段叫做弦”，“通过圆心的弦叫做直径”，“和圆交于两点的直线叫做割线”。这三个定义本身是可以的，它能很好的指导学生关于定义方法的理解。但是把这三个定义按“弦”，“直径”，“割线”的顺序提出，就大大地削弱了这三个概念之间的逻辑关系。原东北教育部的译本对于这三个定义是按“割线”，“弦”，“直径”

① 有的数学概念是用描述法表述的。

的順序提出的。这样从定义中不僅使學生了解“直綫”、“綫段”和“弦”分別是“割綫”、“弦”和“直徑”的最接近的類概念，同時也培養了學生對概念的從屬關係的認識，使他們了解弦是割綫的一部分，直徑也是弦。等等。

為了給四邊形下定義便於選擇其最接近的類。可參考下表：



在中學幾何教學中，四邊形可直接地看做是凸四邊形和凹四邊形最接近的類。

正確的定義方法，應遵守下列四條規則：

(1) 定義應當是相稱的。就是說被下定義的概念和下定義的概念的外延應當是同一的。兩者的位置是可以互換的。例如：“對邊平行的四邊形叫做平行四邊形”。這個定義是相稱的。因為將下定義的概念和被下定義概念的位置交換時，“平行四邊形是對邊平行的四邊形”，也是正確的。

(2) 定義應當只指出基本屬性——種差。任何一個概念，都很多屬性，下定義時不可能也不必要指出所有這些屬性。只要要求能指出它的本質屬性，使這個概念和其他概念區別開來，這樣

就确定了被下定义概念的內涵。所有其他的屬性，据此都可以導出(參看初中几何教科書，§ 112定义，§ 113定理)。

(3)下定义时，必須指明最接近的类，不能用超越的类。如果我們說：“各边相等的多边形叫做正方形”就失去了它的正确性。如果指出其最接近的类說：“各边相等的矩形叫做正方形”就成为一个最正确的定义了。由于某一个概念，有两个最接近的类，这时，这个概念就可以用两种不同的方法来下定义。例如正方形就有两个最接近的类：矩形和菱形。因此除掉上面所說的定义以外，还可以下定义为：“內角为直角的菱形叫做正方形”。

現行的初中平面几何教科書，关于“矩形”、“菱形”的定义都未取最接近的类。因此，在定义之后分別用两个“系”，才肯定了矩形和菱形是平行四边形，矩形的內角是直角和菱形的边相等性質。把“正方形”下定义为：“四边相等并且四角都是直角的四边形”，然后又加以說明它具备有矩形和菱形的性質。这样作对中学生邏輯思維能力的培养是很不利的。若按前面所举各例來依次地給“平行四边形”、“矩形”(或“菱形”)、“正方形”下定义，就使得它們之間的邏輯关系更加緊密，教材內容的思想性更加增强了。吉西列夫所著平面几何学教科書就作到了这一点。

(4)定义不应造成循环的錯誤。定义中的循环是在于：在同一个定义中的一个概念需要依靠另一个概念來下定义。例如：“加法是求若干个数的和，和是加法所得的結果”，“含有90度的角叫做直角，直角的 $\frac{1}{90}$ 份叫做度”等等。在这两个定义里，都是其中的一个概念需要依靠另一个概念來下定义，这必然造成同語反复，內容不清，达不到定义的目的。

除上述的四条規則以外，定义也不可以失于过廣或过狹。例如，把無理数下定义为：“有理数的不尽方根叫做無理数”顯然这是过狹了，若說“無限小数叫做無理数”这又过廣。因为無限循环