全国高职、高专教育高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

微积分学习辅导

（经济类）

主　编　刘书田

编著者　刘书田　冯翠莲

北京大学出版社

全国高职、高专教育高等数学系列教材

微积分学习辅导

（经济类）

主　编　刘书田
编著者　刘书田　冯翠莲

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导(经济类)/刘书田;冯翠莲编著. —北京:北京大学出版社,2002.11

(全国高职高专教育高等数学系列教材)

ISBN 7-301-05978-7

Ⅰ.微… Ⅱ.①刘… ②冯… Ⅲ.微积分-高等学校:技术学校-自学参考资料 Ⅳ.072

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 086983 号

书　　名:微积分学习辅导(经济类)
著作责任者:刘书田　冯翠莲　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-05978-7/O·0555
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32 开本　11 印张　270 千字
2002 年 11 月第 1 版　2002 年 11 月第 1 次印刷
印　　数:0001—5000 册
定　　价:13.50 元

内　容　简　介

本书是全国高等职业、高等专科教育“微积分”基础课程教材的学习辅导书．本书依照配套主教材《微积分》的章节内容，与主教材同步使用，供经济类、管理类一年级学生一学期使用．本书按教材体系共分六章，每章按照教学要求、内容解析与解题指导、主教材《微积分》中各节B组习题及章总习题详细解答、自测题及参考解答四部分组成．教学要求指明学生应掌握和理解的知识点；内容解析是把重点内容和容易混淆的概念给出进一步解释和分析，解题指导是通过典型例题的解法教会学生解题方法，揭示出解题规律，并通过典型例题中的点评与说明，指出初学者易犯的错误，使学生加深对课堂上所讲内容的理解；给出的教材《微积分》中各节B组习题及每章总习题的解答是供学生在完成主教材上的作业有困难时为启发同学做题而编写的；自测题可供学生检测对基础知识的理解程度和解题能力，每章后附有参考解答供读者参考．

本书作者长期为高职、高专学生讲授“微积分”课，深知学生在学习微积分时的疑难与困惑，因此本书能针对学生的接受能力、理解程度按教学要求编写学习辅导书．本书通俗易懂、例题丰富、富有启发性，便于自学，注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养．

本书可作为高职、高专经济类、管理类的学生学习微积分的辅导书，也可作为自学考试、成人教育、文凭考试、职大学生的学习参考书．

前　言

为了适应我国高等职业、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职、高专教育经济数学基础课程教学上的需要，我们依照教育部最新颁布的高等职业教育"经济数学基础课程教学基本要求"，为高职、高专经济类、管理类学生编写了教材《微积分》及配套辅导教材《微积分学习辅导》，《微积分》供一年级学生一个学期使用，讲授约 64～72 学时.

编写本套教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，按照"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，力求教材内容"涵盖大纲、易学、实用". 因此，我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类经济数学课程教学要求，系统介绍了微积分的基本理论、方法及其应用. 本套教材具有以下特点：

1. 教材的编写紧扣"教学基本要求"，慎重选择教材内容，强化概念，注重应用. 既考虑到经济管理类微积分本学科的科学性，又能针对经济类、管理类高职、高专班学生的接受能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、经济背景，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并达到"学以致用"的目的.

2. 为了使学生掌握和应用所学知识，教材中每节配有适量习题. 习题按 A 组、B 组配置，每章配有总习题. A 组习题以基本题为主，B 组习题以综合题、提高题为主. 书后附有全书习题的参考答案与解法提示. 另外，每节的 B 组习题和各章的总习题有较详细的解题过程，这部分内容编排在本教材的配套辅导教材《微积分

学习辅导》一书中，供教师和学生使用.

3. 为使学生更好地掌握教材的内容，我们编写了与教材配套的辅导教材《微积分学习辅导》，主教材与辅导教材同步使用，但侧重点不同. 辅导教材每章按照教学要求、内容解析与解题指导、各节B组习题及每章总习题解答、自测题与参考解答四部分内容编写. 教学要求指明学生应掌握、理解的知识点；内容解析把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出进一步解释和分析，解题指导是通过典型例题归纳总结解题思路、解题方法，并指出初学者易犯的错误；自测题是为学生配置的适量的、难易程度适中的训练题，目的是检测学生在理解本章内容解析与解题指导的基础上，独立解题的能力.

4. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注意用语确切，行文严谨.

本套教材的编写和出版，得到了北京大学出版社的大力支持和帮助；在本书的编写过程中，参加讨论和审稿的有李平和葛作维等专家和教授，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2002年8月于北京

目　　录

第一章　函数·极限·连续

一、教学要求

(1) **理解**函数概念，**掌握**函数符号的正确运用，**会**求函数的定义域；理解分段函数概念.

(2) **了解**反函数概念，**会**求已知函数的反函数.

(3) **掌握**函数的奇偶性，**会**用定义判定函数的奇偶性；**掌握**函数单调性；**了解**函数的有界性、周期性概念.

(4) **熟练掌握**基本初等函数的解析表达式及其基本性质.

(5) **理解**复合函数、初等函数的概念，**熟练掌握**将一个初等函数分解为基本初等函数的四则运算与复合的形式.

(6) **理解**数列极限与函数极限的描述性定义；**了解**左右极限的定义.

(7) **了解**无穷小、无穷大的概念及其相互关系；**理解**无穷小的性质；**会**对无穷小进行比较.

(8) **掌握**极限的四则运算法则；**会**用两个重要极限求极限；**会**求分段函数的极限.

(9) **了解**夹逼准则和单调有界数列极限存在准则.

(10) **理解**函数在一点连续的概念；**会**判断间断点的类型.

(11) **了解**初等函数在其定义区间上是连续函数；**会**求连续函数的极限.

(12) **了解**闭区间上连续函数的最值定理、介值定理和零点定理.

(13) **会**求曲线的水平渐近线和铅垂渐近线.

二、内容解析与解题指导

（一）函数概念

1. 函数定义

以 x 为自变量，y 为因变量的函数记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 D 是**定义域**：自变量 x 的取值范围；f 是**对应法则**：x 与 y 之间对应关系.全体函数值的集合

$$Z=\{y|y=f(x),x\in D\}\subset \boldsymbol{R}$$

是函数的**值域**.有时用 D_f,Z_f 分别表示函数 f 的定义域,值域.

由函数的定义可知,一个函数被给定要有三个因素：定义域 D、对应法则 f 和值域 Z.其中前二者为要素.因此,通常表示函数时,不写出值域 Z.

理解函数定义,要掌握以下三方面的内容：

(1) 确定函数的定义域

思路 按函数定义,若自变量 x 取某一数值 x_0 时,函数 y 有确定的值 y_0 与之对应,则称函数 f 在 x_0 有定义.

当函数 $y=f(x)$用解析表达式给出,而又没给出自变量 x 的取值范围 D,确定函数的定义域时,就是求使该解析式有意义的自变量取值范围.

对于表示应用问题的函数关系,其自变量的取值范围应使实际问题有意义.

(2) 判定两个函数相同

思路 由于定义域 D 和对应法则 f 是确定一个函数的两个要素,因此,两个函数,当其定义域 D 和对应法则 f 都相同时,才表示同一个函数.

(3) 正确运用函数记号,求函数值

思路 按函数意义，对 D 中某一定值 x_0，根据法则 f 所对应的因变量称为函数 f 在 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$.

当函数 $y=f(x)$用解析表达式给出时，将表达式中之 x 代换以 x_0 便得到 $f(x_0)$.

2. 分段函数

在用公式法表示的函数中，若自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系要用两个或多于两个的数学式子来表达，即在函数定义域的不同部分用不同数学式子表示的函数，称为**分段函数**.

分段函数的定义域是各个部分自变量 x 取值范围之总和.

对分段函数 $f(x)$，求函数值 $f(x_0)$时，要根据 x_0 所在的部分区间，用 $f(x)$相应的表达式求 $f(x_0)$.

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x-1}{\ln|x-5|}$；

(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$.

解 (1) 这是分式. 分子 $x-1$ 可以取任何值，只讨论分母：

对 $\ln|x-5|$，因对数符号下的式子应为正，且分母不能为零，所以有

$$\begin{cases} x-5\neq 0, \\ |x-5|\neq 1(\text{因} \ln 1=0), \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x\neq 5, \\ x\neq 4, x\neq 6, \end{cases}$$

写成区间为$(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$. 这就是所求的定义域.

(2) 该函数是两项和. 每项各自讨论.

对第一项$\dfrac{1}{4-x^2}$，应有 $4-x^2\neq 0$，x 的取值范围是 $x\neq\pm 2$，即

$$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty).$$

对第二项 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$，因反正弦符号下的式子必须在区间$[-1,1]$上取值，所以有

$$-1\leqslant\frac{2x-1}{7}\leqslant 1, \quad -7\leqslant 2x-1\leqslant 7, \quad -3\leqslant x\leqslant 4,$$

写成区间则为$[-3,4]$，两项 x 取值的公共部分为$[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,4]$，这就是所求的定义域.

例 2 判断下列函数是否相同，并说明理由：

(1) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$与 $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$；

(3) $y=\ln(x^2-3x+2)$与 $y=\ln(x-1)+\ln(x-2)$；

(4) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

解 (1) 按绝对值的性质，$\sqrt{x^2}=|x|$. 即当 $x\geqslant 0$ 时，$\sqrt{x^2}=x$；而当 $x<0$ 时，$\sqrt{x^2}=-x$. 由于两个函数的对应法则不同，故两者不同.

(2) 两个函数的定义域不同. $f(x)$的定义域是 $x\neq-1$；而 $g(x)$的定义域是 $x\neq\pm1$，故两者不同.

(3) 对函数 $f(x)$，由 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$，即

$$\begin{cases}x-1>0,\\x-2>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x-1<0,\\x-2<0,\end{cases}$$

推得 $x>2$ 或 $x<1$，从而其定义域是$(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

对函数 $g(x)$，由$\begin{cases}x-1>0,\\x-2>0\end{cases}$知，其定义域是$(2,+\infty)$. 因此，两者不同.

(4) 对函数 $f(x)$，由$\dfrac{1+x}{1-x}>0$，即

$$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}1+x<0,\\1-x<0,\end{cases}$$

推得

$$\begin{cases}x>-1,\\x<1\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x<-1,\\x>1,\end{cases}\text{(无解)}$$

从而 $f(x)$的定义域是$(-1,1)$.

对函数 $g(x)$，易知其定义域也是$(-1,1)$.

又根据对数性质，有 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$，故两个

函数相同.

例 3 设 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{x-2}$.

(1) 求 $f(1)$, $f(0)$, $f(a)$, $f(x_0+h)$, $f(-x)$, $f(1/x)$, $f(x-1)$;

(2) $f(2)$是否有意义,为什么?

解 这是已知函数的解析表达式,求函数在指定点的函数值.

(1) $f(1)$表示已知函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的函数值. 用 1 代换解析式$\dfrac{1+x^2}{x-2}$中的 x,得

$$f(1)=\frac{1+1^2}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2.$$

用 0 代换式$\dfrac{1+x^2}{x-2}$中的 x,得

$$f(0)=\frac{1+0^2}{0-2}=-\frac{1}{2}.$$

同理,有

$$f(a)=\frac{1+a^2}{a-2},\quad f(x_0+h)=\frac{1+(x_0+h)^2}{(x_0+h)-2}.$$

用$-x$ 代换式$\dfrac{1+x^2}{x-2}$中的 x,得

$$f(-x)=\frac{1+(-x)^2}{-x-2}=-\frac{1+x^2}{x+2}.$$

同理,有

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+(1/x)^2}{(1/x)-2}=\frac{x^2+1}{x-2x^2},$$

$$f(x-1)=\frac{1+(x-1)^2}{(x-1)-2}=\frac{x^2-2x+2}{x-3}.$$

(2) $f(2)$没有意义. 因为函数 $f(x)$的定义域是$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$, $f(x)$在 $x=2$ 没有定义.

例 4 设 $g(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$,证明:

$$g(x+y)g(x-y)=g(2x)+g(2y).$$

证 $g(x+y),g(x-y),g(2x),g(2y)$是将$g(x)=e^x+e^{-x}$中的$x$分别代换以$x+y,x-y,2x$和$2y$. 于是

$$\begin{aligned}g(x+y)g(x-y)&=(e^{x+y}+e^{-(x+y)})(e^{x-y}+e^{-(x-y)})\\&=e^{2x}+e^{-2y}+e^{2y}+e^{-2x}\\&=e^{2x}+e^{-2x}+e^{2y}+e^{-2y}\\&=g(2x)+g(2y).\end{aligned}$$

例 5 设$f(x)=\dfrac{1}{1+x},\varphi(x)=\dfrac{1}{2-x}$,求$f(\varphi(0)),f(f(x)),f(\varphi(x)),\varphi(f(x))$.

解 因$\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$,将$\varphi(0)$代换$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$中的x,得

$$f(\varphi(0))=\frac{1}{1+1/2}=\frac{2}{3}.$$

将$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$代换$f(x)$表达式中的x,得

$$f(f(x))=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{x+2}.$$

将$\varphi(x)=\dfrac{1}{2-x}$代换$f(x)$表达式中的$x$,得

$$f(\varphi(x))=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2-x}}=\frac{2-x}{3-x}.$$

由该式也可求得$f(\varphi(0))=\dfrac{2-0}{3-0}=\dfrac{2}{3}$.

将$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$代换$\varphi(x)$表达式中的x,得

$$\varphi(f(x))=\frac{1}{2-\dfrac{1}{1+x}}=\frac{x+1}{2x+1}.$$

例 6 设函数$f(x)=\begin{cases}3x, & -2<x\leqslant 1,\\ x^2+1, & 1<x<3,\\ 2^x, & 3\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$

(1) 求函数$f(x)$的定义域;