

初中数学综合训练

(修订版)

翟连林 陈伟侯 段云鑫 刘千章 张国旺 编著



地质出版社

初中数学综合训练



初中数学综合训练（修订版）

翟连林 陈伟侯 段云鑫 编著
刘千章 张国旺

责任编辑：刘品德 赵 薇

地质出版社出版

（北京西四）

河北省蔚县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

开本：787×1092¹/₃₂ 印张：14⁵/₈ 字数：324,000

1985年6月北京第一版 · 1985年6月北京第一次印刷

印数：1—164,300册 定价：1.90元

统一书号：7033 · 168

前 言

本书寓基础知识和基本技能于综合训练之中，通过典型例题的分析、解答和说明，帮助读者掌握概念、定理、公式和法则，总结和归纳解题方法和技巧，并通过练习题加以巩固。练习题依难易程度分为A组题和B组题。为便于读者自学，全部题目都给了解答，最后还安排了以检查学习效果为目的的八组综合训练题组及解答。

本书可作为职工初中文化补习、初中学生在学习过程中的辅导读物，也可以供学生在学完初中数学后进行复习时参考。

由于编者水平所限，书中的缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编 者

1985年5月

目 录

第一部分 代 数

第一章	数	(1)
第二章	代数式	(23)
第三章	方程	(69)
第四章	方程组	(111)
第五章	不等式	(140)
第六章	函数	(158)
第七章	指数和对数	(192)

第二部分 平面几何

第一章	相交线和平行线	(219)
第二章	三角形	(233)
第三章	四边形	(260)
第四章	相似形	(289)
第五章	圆	(324)
第六章	三角函数与解三角形	(382)

第三部分 综合训练题组及解答

第一组	(414)
第二组	(4 8)
第三组	(424)

第四组	(430)
第五组	(435)
第六组	(440)
第七组	(446)
第八组	(454)

第一部分 代 数

第一章 数

范 例

例1 (1) 把4620分解成质因数的连乘积;

(2) 求240, 288, 348的最大公约数和最小公倍数。

解: (1)
$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 4620} \\ 2 \overline{) 2310} \\ 3 \overline{) 1155} \\ 5 \overline{) 385} \\ 7 \overline{) 77} \\ 11 \end{array}$$

$$\therefore 4620 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11.$$

(2) 仿 (1) 求得

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5,$$

$$288 = 2^5 \times 3^2,$$

$$348 = 2^2 \times 3 \times 29.$$

$\therefore$ 240, 288, 348的最大公约数是:

$$2^2 \times 3 = 12; \text{最小公倍数是: } 2^5 \times 3^2 \times 5 \times 29 = 41760.$$

说明: 取三个数的每一个因数的最低次幂相乘, 就是这

三个数的最大公约数；取三个数的每一个因数的最高次幂相乘，就是这三个数的最小公倍数。

例2 证明：

(1) 奇数与偶数之和是奇数；

(2) 任何奇数的平方减1能被8整除。

证明： (1) 设奇数为 $2n_1 - 1$ ，偶数为 $2n_2$ (n_1, n_2 为整数)，

$$\text{则 } (2n_1 - 1) + 2n_2 = 2(n_1 + n_2) - 1.$$

显然， $2(n_1 + n_2) - 1$ 是奇数。

(2) 设奇数为 $2n + 1$ (n 为整数)，

$$\begin{aligned} \because (2n + 1)^2 - 1 \\ &= 4n^2 + 4n + 1 - 1 \\ &= 4n(n + 1). \end{aligned}$$

又 n 与 $n + 1$ 是两个连续整数，其中必有一个为偶数，

$\therefore 4n(n + 1)$ 一定能被8整除。

说明：奇数一般用 $2n - 1$ 或 $2n + 1$ 表示，偶数用 $2n$ 来表示。

例3 把下列各数分别填入下面有关的集合中。

$$2.75, -3^{\frac{1}{2}}, 0, 3.1416, \lg 2,$$

$$+3, \pi, \sin 30^\circ, \cos 45^\circ, 0.\dot{3}.$$

有理数集合： { }；

无理数集合： { }。

解：有理数集合：

$$\{2.75, 0, 3.1416, -3, \sin 30^\circ, 0.\dot{3}\dots\},$$

无理数集合：

$$\{-3^{\frac{1}{2}}, \lg 2, \pi, \cos 45^\circ\dots\}.$$

例4 把下列各数用“<”号从小到大排列起来:

$$-2.43, -\frac{5}{2}, 0, |-2.72|, 3.14, \sqrt{10}.$$

解: $-\frac{5}{2} < -2.43 < 0 < |-2.72| < 3.14 < 3.16.$

说明: 因为 $\sqrt{10} \approx 3.16$, 所以 $\sqrt{10} > 3.14$.

例5 求下列各式的值: (1) $|\sqrt{3} - \sqrt{5}|$;

$$(2) \frac{|x|}{x}, \quad (3) |x-1| - (x-1).$$

解: (1) $\because \sqrt{5} > \sqrt{3},$

$$\therefore |\sqrt{3} - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - \sqrt{3};$$

$$(2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1,$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1,$$

$$(3) \text{ 当 } x \geq 1 \text{ 时, } |x-1| - (x-1) \\ = (x-1) - (x-1) = 0,$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } |x-1| - (x-1) \\ = (1-x) - (x-1) = 2-2x.$$

说明: 遇到求含有字母的式子的绝对值时, 如果这个含有字母的式子的值的符号不能确定时, 必须进行讨论.

例6 解答下列各题:

(1) 写出绝对值比3.5小的所有整数;

(2) 写出比 $3\sqrt{3}$ 的相反数大的所有负整数, 并把结果在数轴上表示出来.

解: (1) 比3.5的绝对值小的所有整数, 有: $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, 它们的数轴表示如图1-1.

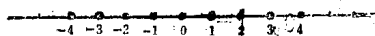


图 1-1

(2) $3\sqrt{3}$ 的相反数 $-3\sqrt{3} \approx -5.2$, 比 -5.2 大的负整数有 $-5, -4, -3, -2, -1$, 它们的数轴表示如图 1-2.

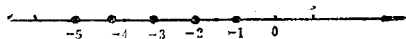


图 1-2

例7 计算:

$$(1) -2\frac{1}{3} - 3 + 4.5 - \frac{1}{6} - (-2);$$

$$(2) (-0.2) \times \frac{1}{2} \div (-\frac{3}{2}) \times (-1\frac{2}{3});$$

$$(3) -3^2 + (-3)^2 \times 5 - (-1)^{10} \div \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| - 2^3;$$

$$(4) -1 + \frac{3}{2} \times [3 \times (-\frac{2}{3})^2 - 1] + \frac{1}{3} [(-2)^2 - (-4.5 + 9)];$$

$$(5) -36 \times (\frac{1}{2} - 3 - \frac{5}{9} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12});$$

$$(6) -\frac{2}{13} - \frac{1}{2 + \frac{1}{3 - \frac{1}{4}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解: (1) 原式} &= -2\frac{1}{3} - 3 + 4\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + 2 \\
 &= (-2 - 3 + 4 + 2) + \frac{-2 + 3 - 1}{6} \\
 &= 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(2) 原式} &= \left(-\frac{1}{5}\right) \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) \\
 &= -\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} \\
 &= -\frac{1}{9};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(3) 原式} &= -9 + 9 \times 5 - 1 \div \frac{1}{4} - 8 \\
 &= -9 + 45 - 4 - 8 \\
 &= 24;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(4) 原式} &= -1 + \frac{3}{2} \times \left[3 \times \frac{4}{9} - 1\right] + \frac{1}{3} [4 - 4.5] \\
 &= -1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\
 &= -\frac{2}{3};
 \end{aligned}$$

$$\text{(5) 原式} = -36 \times \frac{1}{2} + 36 \times 3 + 36 \times \frac{5}{9} - 36 \times \frac{5}{6}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 36 \times \frac{7}{12} \\
 &= -18 + 108 + 20 - 30 + 21 \\
 &= 101;
 \end{aligned}$$

说明：本题利用分配律计算比较简便。

$$\begin{aligned}
 (6) \text{ 原式} &= -\frac{2}{13} - \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{12-1}{4}}} = -\frac{2}{13} - \frac{1}{2 + \frac{4}{11}} \\
 &= -\frac{2}{13} - \frac{1}{\frac{22+4}{11}} \\
 &= -\frac{2}{13} - \frac{11}{26} = -\frac{15}{26}.
 \end{aligned}$$

练习题 (A组) 及解答

1. 已知自然数18, 24, 42, 求它们的最大公约数和最小公倍数。

解: $18 = 2 \times 3^2;$

$24 = 2^3 \times 3;$

$42 = 2 \times 3 \times 7.$

$\therefore$ 18, 24, 42的最大公约数是 $2 \times 3 = 6$, 最小公倍数是 $2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$.

2. 若五位数453a是 (1) 2的倍数; (2) 3的倍数;
(3) 5的倍数; (4) 11的倍数, 求a.

解: (1) $a = 2, 4, 6, 8;$

(2) $a = 3, 6, 9;$

(3) $a = 5, 0$;

(4) $a = 2$.

3. 选择适当的整数 a , 使方程 $ax = 15$ 的根是 (1) 自然数; (2) 负整数; (3) 正的真分数; (4) 正的假分数.

解: $x = \frac{15}{a}$.

(1) $a = 1, 3, 5, 15$;

(2) $a = -1, -3, -5, -15$;

(3) a 为大于15的全体自然数;

(4) a 为从1到14的全体自然数.

4. 证明: (1) 相邻两个奇数的和能被4整除; (2) 三个相邻的自然数之和能被3整除.

证明: (1) 设两个相邻奇数分别为 $2n-1, 2n+1$,

则 $(2n-1) + (2n+1) = 4n$.

显然, $4n$ 能被4整除;

(2) 设三个相邻的自然数为 $n, n+1, n+2$,

则 $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$;

显然, $3(n+1)$ 能被3整除.

5. 判断下列命题是真命题还是假命题,若是真命题在括号内画“√”,若是假命题在括号内画“×”.

() 一个整数的倒数都小于这个整数; ()

(2) 一个负数的相反数都大于这个负数; ()

(3) a 为实数, a^2 大于零; ()

(4) 两个数中, 较大数的绝对值也较大; ()

(5) 无理数都是无限小数; ()

(6) 无限小数都是无理数. ()

答: (1) $\times$; (2) $\checkmark$; (3) $\times$; (4) $\times$;
(5) $\checkmark$; (6) $\times$.

6. (1) 把下列各数填在相应的大括号里:

-3.1 ; $-\pi$; $\lg 0.001$; $3.\dot{1}$; $\sqrt{12}$;

$|2-5|$; $\lg 60^\circ$; $\sin 120^\circ$; $\lg 1$.

正有理数集合: { };

无理数集合: { };

负实数集合: { }.

(2) 把(1)中各数按照从小到大的顺序用“ $<$ ”号连结起来.

解: (1) 正有理数集合: { $3.\dot{1}$; $|2-5|$... };

无理数集合: { $-\pi$; $\sqrt{12}$; $\lg 60^\circ$; $\sin 120^\circ$... };

负实数集合: { -3.1 ; π ; $\lg 0.001$... };

(2) $-\pi < -3.1 < \lg 0.001 < \lg 1 < \sin 120^\circ < \lg 60^\circ$

$< |2-5| < 3.\dot{1} < \sqrt{12}$.

7. 写出满足下列条件的数, 并把它们分别画在数轴上.

(1) 比 $-2\frac{1}{3}$ 大, 而比 $4\frac{1}{2}$ 小的所有非负整数;

(2) 绝对值小于 $\frac{3}{11}$ 的倒数的所有整数;

解: (1) 0, 1, 2, 3, 4, 它们在数轴上的表示如图 1-3 所示.

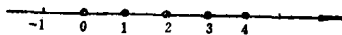


图 1-3

(2) $\frac{3}{11}$ 的倒数为 $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$.

∴所求的数为 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, 它们在数轴上的表示如图1-4所示.

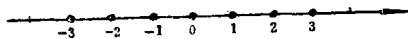


图 1-4

8. 求 $\sqrt{200}$, $\frac{\pi}{1000}$, 136485 , 0.000274259 各数的近似值 (保留四位有效数字), 并把这些近似值用科学记数法表示出来.

解: $\sqrt{200} \approx 14.14 = 1.414 \times 10^1$;

$$\frac{\pi}{1000} \approx 0.003142 = 3.142 \times 10^{-3};$$

$$136485 \approx 136500 = 1.365 \times 10^5;$$

$$0.000274259 \approx 0.0002743 = 2.743 \times 10^{-4}.$$

9. 去掉绝对值符号, 并使代数式的值不变.

(1) $|5 - 4\sqrt{3}|$; (2) $|x| - x$;

(3) $|x^2 + y^2|$.

解: (1) $|5 - 4\sqrt{3}| = 4\sqrt{3} - 5$;

$$(2) |x| - x = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -2x & \text{当 } x < 0 \text{ 时;} \end{cases}$$

(3) $|x^2 + y^2| = x^2 + y^2$.

10. 计算;

$$(1) 1.5 - 2.3 + 5 - 7 + (-2) - |-8|;$$

$$(2) 18 \div (-1\frac{1}{9}) \times (-0.4) \div 5 \div (-\frac{2}{5});$$

$$(3) (-0.5)^2 - \frac{1}{4} - |-2| - (-\frac{3}{2})^3 \times \frac{16}{27};$$

$$(4) \frac{1}{2} \times [(-3) \times (-\frac{1}{3})^3 - (\frac{2}{3})^3 \\ \div (-1\frac{1}{3})^2];$$

$$(5) -2^2 - (-2)^2 - (-1)^5 \times (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) \div \frac{1}{6} \\ - |-1|;$$

$$(6) \{-1 + [(-0.4)^2 - (-3.1 + 2.6) \times \frac{4}{5}]\} \\ \div 0.2^3;$$

$$(7) \frac{(-3)^2 - 3 \times |4.7 - 2.7|}{0.1 - 0.07};$$

$$(8) \frac{(-1)^{103}}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}}}.$$

解: (1) 原式 = $1.5 - 2.3 + 5 - 7 - 2 - 8$
 $= (1.5 + 5) - (2.3 + 7 + 2 + 8)$
 $= 6.5 - 19.3$
 $= -12.8;$

$$(2) \text{ 原式} = 18 \div \left(-\frac{10}{9}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \div 5 \div \left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$= -18 \times \frac{9}{10} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{2}$$

$$= -\frac{81}{25}$$

$$= -3\frac{6}{25};$$

$$(3) \text{ 原式} = 0.25 - \frac{1}{4} - 2 + \frac{27}{8} \times \frac{16}{27}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 + 2$$

$$= 0;$$

$$(4) \text{ 原式} = \frac{1}{2} \times \left[(-3) \times \left(-\frac{1}{27}\right) - \frac{8}{27} \div \frac{16}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[3 \times \frac{1}{27} - \frac{8}{27} \times \frac{9}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{18}\right)$$

$$= -\frac{1}{36};$$

$$(5) \text{ 原式} = -4 - 4 + \frac{1}{6} \div \frac{1}{6} - 1$$

$$= -8;$$