高等数学专题辅导讲座（下册）

蔡高厅　邱忠文　主编

国防工业出版社
http://www.ndip.cn

高等数学
专题辅导讲座

（下册）

蔡高厅　邱忠文　主编

国防工业出版社

·北京·

内容简介

该书为高等工科院校本科生“高等数学”课程辅导书，共有上、下两册，本书为下册，包括多元函数微分学及其应用、多元函数积分学、无穷级数和微分方程等内容。

全书内容全面，重点突出，本书下册共分为4个单元14个专题讲座进行辅导，例题详实典型，分析透彻清晰，方法实用而且富于创新，是天津大学著名数学教育专家蔡高厅教授、邱忠文教授多年从事高等数学教学经验和智慧的结晶。

本书适合于高等院校师生学习使用，不仅可以作为硕士研究生入学考试的复习参考书，而且可以作为网络高等教育、高等职业技术教育、成人高等教育以及函授教育的辅导教科书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学专题辅导讲座．下册/蔡高厅，邱忠文主编．北京：国防工业出版社，2004.1

ISBN 7-118-03288-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①蔡…②邱… Ⅲ.高等数学－教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第095160号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

涿中印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 9⅜ 261千字

2004年1月第1版 2004年1月北京第1次印刷

印数：1—4000册 定价：14.00元

前　　言

为了适应高等工科院校本科生对高等数学课程的学习需要，结合当前的教学实际，我们编写了《高等数学专题辅导讲座》，作为高等数学课程的教学参考书。本书无论对全日制普通高等学校的学生，或是网络高等教育、函授、高等职业技术教育及成人高等教育的学生学习高等数学都是较为合适的辅导教科书。

高等数学是高等理工科、经济、管理类院校最主要的基础课之一，对学生在校期间的学习和今后的发展都将产生深远的影响。本书的编者在全日制普通高校长期从事高等数学及应用数学的教学工作，最近几年又在远程高等教育及高等职业技术教育的教学中积累了丰富的经验，深刻了解学生学习情况和要求，本书就是为了满足学生学习的要求，辅导学生更好地学习高等数学而编写的辅导教科书。书中对学生所学的高等数学知识，系统地进行归纳总结，通过实例进行剖析深化对相关的内容进行融会贯通。

本书分为上、下两册。全书内容覆盖了现行的理工类院校高等数学教学的全部内容。下册包括了多元函数微分学及其应用、多元函数积分学、无穷级数和微分方程等内容，共分为 4 个单元 14 个专题进行辅导，内容丰富，例题详实，分析透彻，富于启发，文字通顺，便于自学。

本书的编写和出版得到天津大学网络教育学院的大力支持和教学管理部的具体帮助，编者表示深切的感谢。

参加本书编写的有蔡高厅、邱忠文、李君湘、于桂贞、刘瑞金、韩健、韩月丽、孙秀萍等，由于编者的水平所限，对书中的错误之处，敬请读者批评指正。

编　者

2004 年 1 月

目　　录

第五单元　多元函数微分学及其应用

第二十讲　多元函数的极限与连续性，偏导数与全微分的概念

多元函数微分学是在一元函数微分学的基础上建立和发展起来的，多元函数微分学的一些基本概念及研究问题的思想方法虽然与一元函数相仿，但是由于自变量个数的增加，会产生一些新的问题。本讲就多元函数的概念、极限与连续性、偏导数与全微分的概念等进行辅导和讨论。

基本概念和重要结论

1. 邻域

邻域　设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上一点，$\delta>0$，与点 P_0 的距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $N(P_0,\delta)$，即

$$N(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}。$$

2. 区域、区域与 n 维空间

(1) 内点　设 E 是平面上的点集，点 $P\in E$，如果存在点 P 的某一个邻域 $N(P)\subset E$，则称点 P 为 E 的内点。

(2) 开集　如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集。

(3) 边界点　如果点 P 的任一邻域内既有属于点集 E 的点，也有不属于点集 E 的点，则称点 P 为 E 的边界点。E 的边界点的全体称为 E 的边界。

(4) 区域　设 D 是开集，如果 D 内的任何两点，都可以用完

全属于 D 内的折线连接起来,则称 D 是连通的。连通的开集称为开区域,简称为区域。开区域连同它的边界一起,称为闭区域。

(5) 聚点　设 E 是平面上的点集,P 是平面上的一点(点 P 可以属于 E,也可以不属于 E),如果点 P 的任一邻域内总有无限多个点属于 E,则称点 P 为点集 E 的聚点。

(6) n 维空间　称 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的全体为 n 维空间,记为 R^n,每一个 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间 R^n 中的一个点,第 i 个数 x_i 称为该点的第 i 个坐标。n 维空间 R^n 中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的距离规定为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}。$$

R^n 中点 P_0 的 δ 邻域是 R^n 中的点集:

$$N(P_0,\delta) = \{P \mid |P_0P| < \delta, P \in R^n, \delta > 0\}。$$

有了 R^n 中邻域的概念,就可以定义 R^n 中的内点、边界点、区域、聚点等概念。

3. 二元函数的定义

设有平面点集 E 和数集 B,如果对于 E 中的每一点 $P(x,y)$ 通过确定的规律 f 都有惟一的实数 $z \in B$ 与之对应,则称 z 为 x,y 的二元函数,记作 $z = f(x,y)$,$(x,y) \in E$。x 和 y 叫做自变量,z 叫做因变量,A 叫做函数的定义域。

4. 二元函数的极限定义

设函数 $z = f(x,y)$ 定义在平面点集 E 上,$P_0(x_0,y_0)$ 是点集 E 的聚点,A 为一常数,如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得适合不等式

$$O < |P_0P| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x,y) \in E$,都有

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon$$

成立,则称 A 为 $z = f(x,y)$ 当 $x \to x_0, y \to y_0$ 时的极限,记为

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A。$$

或

$$f(x,y) \to A(\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0)。$$

5. 二元函数的连续定义

设二元函数 $z = f(x,y)$ 定义在平面点集 E 上，点 $P_0(x_0, y_0)$ 是点集 E 的聚点，且 $P_0 \in E$，如果有

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称 $z = f(x,y)$ 在点 P_0 处连续。

6. 偏导数的定义

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 处，而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地得到函数关于 x 的偏增量

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)。$$

如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对变量 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, f'_x(x_0,y_0), \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}, \left.z'_x\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}。$$

类似地，可以定义函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对变量 y 的偏导数为

$$f'_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}。$$

7. 全微分的定义

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内有定义，自变量 x,y 在点 x_0,y_0 处分别有增量 $\Delta x, \Delta y$，相应得到函数的全增量

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

如果 Δz 可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A、B 不依赖于 Δx、Δy，$o(\rho)$ 是关于 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$（当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$）的高阶无穷小，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，而把 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 z 在点 (x_0,y_0) 处的全微分，记为

$$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y。$$

8. 函数的连续性、偏导数的存在性与可微性相互关系的重要结论

(1) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，则函数 $f(x,y)$ 在该点处必定连续。

(2)（必要条件）若函数 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则函数 $z=f(x,y)$ 在该点处的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$、$f'_y(x_0,y_0)$ 必定存在，并且有

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y。$$

(3)（充分条件） 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内存在偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$，且它们在点 (x_0,y_0) 处连续，则函数 $f(x,y)$ 在该点处必定可微。

一、二元函数定义域的求法与函数记号的运用

例 5.1 判断函数 $f(x,y)=\ln(xy)$ 与 $g(x,y)=\ln x+\ln y$ 是否为同一函数，试说明理由。

解 在上册第一单元第一讲我们讨论一元函数概念时，曾经指出函数的定义域和对应规律是函数定义的两个要素，二元函数与一元函数类似，函数的定义域和对应规律也是二元函数定义的两个要素。因此要判断两个函数是否相等，应从这两个要素进行考察。

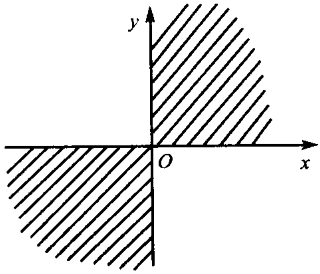
函数 $f(x,y)=\ln(xy)$ 的定义域应有 $xy>0$，即

$$\begin{cases}x>0,\\y>0。\end{cases}\quad 或\quad\begin{cases}x<0,\\y<0。\end{cases}$$

函数 $g(x,y)=\ln x+\ln y$ 的定义域应有

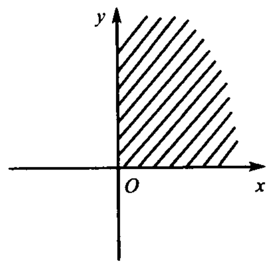
$$\begin{cases} x>0, \\ y>0。\end{cases}$$

从而可知 $g(x,y)$ 的定义域仅仅是 $f(x,y)$ 定义域的一部分。因为这两个函数的定义域不同,所以它们不是同一函数。



$f(x,y)$ 定义域

图 20-1



$g(x,y)$ 定义域

图 20-2

例 5.2 求二元函数 $z=\arcsin\frac{x}{y^2}+\ln(1-\sqrt{y})$ 的定义域。

解 求二元函数的定义域,就是求使函数解析式子的各个构成部分都有意义的自变量 x,y 的取值范围

由对数函数及反正弦函数的定义域,要使函数 z 的解析式子有意义,x,y 只需满足

$\arcsin\frac{x}{y^2}$ 定义域:$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1$,且 $y\neq 0$, 即 $\begin{cases} -y^2\leqslant x\leqslant y^2, \\ 0<y<1。\end{cases}$

$\ln(1-\sqrt{y})$ 定义域:$1-\sqrt{y}>0$,且 $y\geqslant 0$。定义域的图形如图 20-3 中阴影部分。

求二元函数的定义域,先写出函数解析式子各构成部分的定义域,再联立成不等式组,解此不等式组即得函数的定义域。

例 5.3 求二元函数

$$z=\arccos(2x)+\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$$

的定义域。

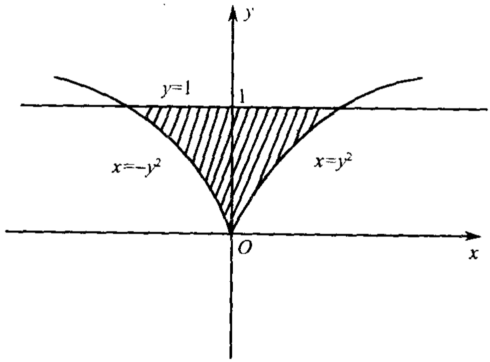


图 20-3

解 函数 z 的解析式子各构成部分的定义域分别为

$\arccos(2x)$ 的定义域：$|2x|\leqslant 1$；

$\sqrt{4x-y^2}$ 的定义域：$4x-y^2\geqslant 0$；

$\dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域：$1-x^2-y^2>0$，且 $1-x^2-y^2\neq 1$。

要使函数 z 的解析式子有意义，自变量 x,y 只需满足不等式组：

$$\begin{cases}|2x|\leqslant 1,\\ 4x-y^2\geqslant 0,\\ 1-x^2-y^2>0,\\ 1-x^2-y^2\neq 1。\end{cases}\quad 即 \quad \begin{cases}-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2},\\ y^2\leqslant 4x,\\ 0<x^2+y^2<1。\end{cases}$$

定义域的图形如图 20-4 中阴影部分。

例 5.4 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，如果当 $y=1$ 时，$z=x$，求函数 $f(u)$ 及 $z=z(x,y)$ 的表达式。

解 据题设 $z\Big|_{y=1}=x$，有

$$x=1+f(\sqrt{x}-1),\ f(\sqrt{x}-1)=x-1。$$

方法 1 由题设可知 $x\geqslant 0$，从而有

$$\begin{aligned}f(\sqrt{x}-1)&=x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\\&=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1+2),\end{aligned}$$

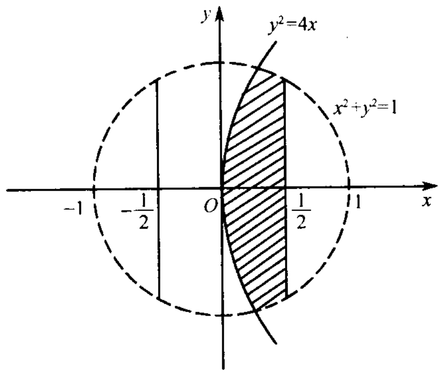


图 20-4

令 $u=\sqrt{x}-1$,得

$$f(u)=u(u+2)=u^2+2u。$$

故 $\qquad z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)=\sqrt{y}+x-1$

方法 2 令 $u=\sqrt{x}-1$,得 $x=(u+1)^2$,从而有

$$f(u)=(u+1)^2-1=u^2+2u。$$

于是

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)=\sqrt{y}+x-1。$$

例 5.5 设 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$,求 $f(x,y)$,$f\left(\frac{1}{x},\frac{2}{y}\right)$。

解 **解法 1** 令

$$\begin{cases}u=x+y,\\ v=\dfrac{y}{x},\end{cases}\quad \text{解得} \quad \begin{cases}x=\dfrac{u}{1+v},\\ y=\dfrac{uv}{1+v}。\end{cases}$$

代入原表达式中,得

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2$$

$$=\frac{u^2(1-v^2)}{(1+v)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}。$$

故

$$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y},(y\neq-1)。$$

令 $u=\dfrac{1}{x},v=\dfrac{2}{y}$,得

$$f\left(\frac{1}{x},\frac{2}{y}\right)=\frac{\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{2}{y}\right)}{1+\frac{2}{y}}=\frac{y-2}{x^2(y+2)},(x\neq 0,y\neq 0,-2)。$$

解法 2 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$$=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}$$

$$=(x+y)^2\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}},$$

令 $u=x+y,v=\dfrac{y}{x}$,得

$$f(u,v)=\frac{u^2(1-v)}{1+v},$$

故

$$f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y},(y\neq-1)。$$

由 $f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]=F(x,y)$ 的表达式,去求 $f(u,v)$ 时,有两种方法:

方法1 将 $F(x,y)$ 中以 x,y 为变元的表达式,凑成以 $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 为变元表达式,如例 4,$F(x,y)=x^2-y^2$ 是以 x,y 为变元的表达式,而

$$F(x,y)=(x+y)^2\cdot\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

是以 $x+y,\dfrac{y}{x}$ 为变元的表达式。令 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$,即

得 $f(u,v)$ 的表达式。

方法 2 直接用变量替换,令

$$\begin{cases} u = \varphi(x,y), \\ v = \psi(x,y), \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v)。\end{cases}$$

代入 $F(x,y)$ 中,即得 $f(u,v)$ 的表达式。

二、求二元函数极限的方法

1. 利用极限的四则运算法则求二元函数的极限

例 5.6 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$。

解 原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{x^2}{e^x}\cdot\dfrac{1}{e^y}+\dfrac{y^2}{e^y}\cdot\dfrac{1}{e^x}\right)$,

由一元函数的极限,有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0,$$

同理 $$\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2}{e^y}=0,\ \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^y}=0,$$

由极限的四则运算法则,有

$$\text{原式}=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x^2}{e^x}\cdot\frac{1}{e^y}+\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{y^2}{e^y}\cdot\frac{1}{e^x}=0。$$

2. 利用函数连续性的定义及初等函数的连续性求二元函数的极限

例 5.7 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to1}}\dfrac{2-xy}{x^3+y^2}$。

解 初等函数 $f(x,y)=\dfrac{2-xy}{x^3+y^2}$ 在其定义域内是连续的,故 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处连续,由函数连续性的定义,有

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to1}}\frac{2-xy}{x^3+y^2}=\left.\frac{2-xy}{x^3+y^2}\right|_{\substack{x=0\\ y=1}}=2。$$

3. 通过变量代换、或恒等变形化为一元函数再求出二元函数的极限

例 5.8 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$。

解 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left(\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y\right)$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim_{y\to 2}y=2。$$

这里利用了一元函数的重要极限$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$。

例 5.9 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+\sin xy)^{\frac{1}{xy}}$。

解 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[(1+\sin xy)^{\frac{1}{\sin xy}}\right]^{\frac{\sin xy}{xy}}$,

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+\sin xy)^{\frac{1}{\sin xy}}=\mathrm{e},\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{xy}=1$,

所以 原式 $=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$。

4. 利用有界函数与无穷小乘积的性质求二元函数的极限

例 5.10 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

解 因为 $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2},\lim\limits_{x\to 0}x=0$,

所以

$$原式=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}=0。$$

这里利用了当 $x\to 0,y\to 0$ 时,有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小的性质。

例 5.11 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$。

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0,\lim\limits_{y\to 0}y^2=0,\left|\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}\right|\leqslant 1,(x,y)\neq(0,0)$。

所以

$$原式=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}+\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}y^2\cdot\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}=0。$$

5. 利用极限存在的夹挤准则求二元函数的极限

例 5.12 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$。

解 因为当 $x>0,y>0$ 时,有不等式

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$,所以根据极限存在的夹挤准则,可得

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0。$$

例 5.13 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$。

解 因为当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,有不等式

$$0\leqslant\left|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\right|=\left|\frac{x}{\frac{3}{4}x^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2}+\frac{y}{\left(\frac{y}{2}-x\right)^2+\frac{3}{4}y^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{|x|}{\frac{3}{4}x^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2}+\frac{|y|}{\left(\frac{y}{2}-x\right)^2+\frac{3}{4}y^2}$$

$$\leqslant\frac{|x|}{\frac{3}{4}x^2}+\frac{|y|}{\frac{3}{4}y^2}$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}\right),$$

又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0,\lim_{y\to\infty}\frac{1}{|y|}=0,$$

所以根据极限存在的夹挤准则,得

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}=0。$$

6. 根据二元函数极限的定义,$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 是以任意方式进行的,即以任意方式$(x,y)\to(x_0,y_0)$,都有 $f(x,y)\to A$。如果以两种特殊的方式,使$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 趋于不同的常数,或以某一特殊方式使$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 不趋于常数,则可断定当$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,$f(x,y)$ 的二重极限不存在。

例 5.14 证明:极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在。

证 当点(x,y) 沿曲线 $x=ky^2$ 趋于点$(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{y\to0\\x=ky^2\to0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to0}\frac{ky^4}{(k^2+1)y^4}=\frac{k}{1+k^2},$$

极限值与 k 有关,随 k 的变化而变化,即函数$\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 在$(x,y)\to(0,0)$ 不趋于一个确定的常数,故原极限不存在。

三、二元函数的连续性

例 5.15 讨论二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点$(0,0)$ 处的连续性。

解 当$(x,y)\neq(0,0)$ 时,有$\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant1$,及

$$\lim_{x\to0}x^2=0,\lim_{y\to0}y^2=0,$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}+\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}y^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0。$$