算 術

（苏联師範学校用）

勃·阿·杜林諾夫
雅·弗·捷馬列夫 著

人民教育出版社

算　　術

（苏联師範学校用）

勃·阿·杜林品夫
雅·弗·提馬列夫 著

柴達武 譯

人 民 教 育 出 版 社

本書是根據俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和國教育部教育出版社出版的勃·阿·杜林諾夫和雅·弗·捷馬列夫著的'算術'一九五五年版譯出的。原書經苏联教育部批准作为師範学校算術課本之用。

全書共分三篇。第一篇講整數。第二篇講數的整除。第三篇講分數。各篇的內容，不僅在理論上比初中算術有更深入更全面的陳述，而且对於如何应用所学的理論來解应用題也有很明確的指示。

对於我國師範学校的教師、学生以及中小学的教師，本書都是一本良好的參考書。

*

Б. А. ТУЛИНОВ И Я. Ф. ЧЕКМАРЁВ

АРИФМЕТИКА

ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ

УЧИЛИЩ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

УТВЕРЖДЕНО
МИНИСТЕРСТВОМ ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКВА—1955

本書根據俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和國教育部教育出版社
1955年莫斯科俄文修訂版譯出

*

算　術

（苏联師範学校用）

勃·阿·杜林諾夫
雅·弗·捷馬列夫 著

葉 岳 武 譯

北京市書刊出版業營業許可證出字第二号

人民教育出版社出版

北京景山东街

新華書店發行　　新華印刷廠印刷

統一書号：7012·165　字數：264千

開本：850×1168　1/32　印張：11$\frac{1}{8}$

1955年8月第一版

1956年6月第三次印刷

19,001—34,000冊

定價（6）一元一角

目　　錄

上卷　整数

中卷　數的整除性

下卷　分數

附　　表

上　卷
整　數

第一章　自然數(正整數)的概念

§1. 算術的对象

算術是關於數及數的性質以及施之於它們的运算的科学. 与这个目的相符合,它的基本任务也就在於建立數的概念,發展这个概念,研究數与數之間的關係以及研究算術运算的性質.

數的学問是当代數学中最重要同時也是最困難的部門之一. 在这本書裏面,只包含師範学校課程大綱限度內算術的基礎的敍述,所以我們就只能局限於正整數以及正分數的考究. 可是,这些問題的嚴格的以及完全的陈述,还是远远超出本書的範圍. 其中有着特別兴趣的,是那些數的關係以及那些运算的性質的学習,它們不独可用於具体的从特別方法挑选出來的數,而且对於任意的數都一样有效的. 为了研究这些算術中的普遍關係,就用到字母記号,亦即用字母來表示任何的數. 例如:等式 $a+b=16$ 僅僅对於字母 a 及 b 的一些數值才能成立,譬如,$a=14$ 及 $b=2$; 至於等式 $a+b=b+a$ 則对於 a 及 b 的任何數值都能成立,連 $a=14$ 及 $b=2$ 也包括在內. 因此,第一个等式並不表示數的性質,而第二个等式則表示屬於所有的數的普遍性質,它正正指出幾个數的和不因更改加數的次序而改変.

以後我們將利用字母的記号研究關於所有的數的普遍算術性質.

§2. 自然數列与它的性質

整的正數在算術裏叫做自然數. 自然數的概念是从更原始的"集"的概念導出,而所謂集也正是环繞我們的世界裏一些各別事物的總体(彙).

凡自然數都可以看作是它所包含的單位的集(總体). 实际上,为着組成任何的集,開始時只須要取一个元素. 在計算这样的集的元素的結果裏就得到了自然數一,即單位. 对於所得的結果加上一个元素,我們就得到一个集,它的元素的數目是要用自然數單位及單位來表示的,也即是要用二來表示的. 对於这个集又重新加上一个元素,我們就得到一个集,它的元素的數目要用單位及單位及單位來表示的,也即是用三來表示的,依此類推.

用这个方法可以組成數列(集): 1,2,3,4,……每一次都把數一(單位)加到前面的數上去. 这样的數列叫做**自然數列**. 这个數列是無限的. 这意味着,如果我們達到了數列中任何一个數,則再加上一个單位,就可以組成一个新數,直接地在給与的數的後面的.

自然數列这一个集的特性在於它的元素(數)被安置在嚴格的順序裏,根据这个順序可以確定那一元素在某一元素之後,那一元素在某一元素之前,以及那一元素是最初的. 这个以及与这个相類似的集就說是**排好的(有序的)**. 作为这样的集的例子可以举出:字母的集,一班根据字母來排好了的学生的集等等.

由上面所說即可推得,**自然數列中每一个數都由它在數列中所佔的位置來決定.**

这样，与一个基数之被看作集的冪的特性相似，計算的过程要求我們把序數看作已与元素在某有序集中所佔的位置的特徵（号碼）．从序數的观點來看：a）兩个相等的數就是自然數列內同一的數，及б）一个數是看作小於或大於另一个數，視乎它在另一个數之前或之後而定．

一个集叫做有限集，如果它的元素的數目是可以確定的話，而無限集的元素的數目則是不可以確定的．

下面的公理表達了自然數列的性質：

1）單位是一个數；

2）在每一个數的後面就直接地有另一个惟一的數；

3）如果兩个數的後面都直接給同一的數跟着，那麼它們就相等；

4）單位之前沒有任何數；

5）如果任何一个性質对於一这个數是正確，而且如果它假定对於任一个數是正確，則对於这个數直接後面的數也就是正確，那麼它对於自然數列內所有的數也都是正確的．

§3. 數的起源，計數的公理，計數的过程

位置的概念是联系着自然數列的：在思想上把許多事物依明確的次序來安排，就意味着把这些事物之一与數 1 对应並且叫它做第一；之後又把另一个事物与數 2 对应並叫这个事物做第二；之後再把一个新的事物与數 3 对应並叫它做第三，依此類推．这样的計數下去，就会接連地把所考慮的事物与 1，2，3，4，……等成对应．到了集中最末的一个元素的時候，則与这个元素相对应的數就是集的元素的數目．非常明顯，計數的結果是与計數的次序無關的．这就是計數的公理．

实际上，在計數过程中，不論我們依什麼次序选取集中元素繼續与自然數列的數來对应，集中元素选定以後，就必然得到一个与給与的集全同的集.

在这样形式下計數的运算，僅僅是在人類文化發展的夠高階段才發生的.

兩个集有同一的冪，如果在它們的元素間可以建立一个互相惟一的对应關係的話，也就是說这样一个对应關係，它使得一个集的每一元素可以与另一个集一个惟一的元素相比对，而且，反之次一个集的每一元素又可以与第一个集的一个惟一的元素相比对. 为着判断兩个集是否等冪，不一定要实行計數：为了这，僅僅使兩集的元素成互相对应並跟着做出適当的結論已經完全足夠的了. 而且我們也証明过，所有从根据它們的冪而進行的各个集的比較中得出的結論，当其中任一个集用另一个与它等冪的集來代替時，也一样有效.

这种情况使得我們有可能在实施算術运算時採用一些具体的，先前用經驗方法來研究过的集：手指，石子，刀痕，果核等等，它們在已与的情况下是作为某類等冪集的代表，而且也就是在这种意义下充当數的具体替代者. 实际上，旣然所有等冪集是由任一个屬於它的集來描寫特性，就当然有可能把考究中的具体的集与某标準集（手指的集，石子的集，刀痕的集，果核的集等）比較，卽在考究中的集与选來作比較标準的集之間建立起互相惟一的对应關係过程中進行比較. 决定这些或那些标準集充当某類等冪集的具体代表者時，只須要按照純粹实用的理由：可接近性，經驗，不变性，可考究性等.

譬如元素是手指的集就是一个标準集的例子：大指，食指，中指，無名指，小指，是这个集的元素.

很明顯，如果一个集用小指來描寫特性，那就是說，这个集是和某一類的等冪集联系着，它在我們的表示中是用數5來描寫特性的. 因此，在已与的情况下數5就叫做小指了. 像这样的數的称呼，即与那些用來帮助計算的事物的称呼相符合的，在文化發展的早期已經出現了.

隨着時間的过往，这些称呼漸漸失去它最初的意义，而開始在計算中特別被用为这些或那些自然數的称呼.

隨着文化的發展，人們常常有必要去研究一些集，它們的冪是比較取作标準集的冪还要更高的. 用在高冪集与細究过的标準集的元素間建立互相惟一对应这个方法來考究高冪集的实际需要終於做成了新的标準集，卽無窮的自然數列，它本身是數的記号的制度，一个一个地照着嚴密確定了的次序排好而且被用作集的冪的描寫与比較之用.

計算的过程終結到在所考究的具体集的元素以及自然數列的數之間去建立互相惟一的对应關係，而在这裏扮演标準集的角色，却是自然數列，它的元素就是自然數.

在發展的早期階段，計算的过程是由於在所考究的具体集及某标準集之間建立互相惟一的对应關係所組成.

对於原始民族这种过程的研究指出，被取作标準集的是一些確定而非常明顯的集的部分，它們当着有需要去考究更大的冪的集時，逐步隨着需要而擴大.

常常是一个手或兩个手的指，一个足或兩个足的趾，腕，臂等充当标準集的全部元素.

标準集元素間次序的不变性使得有可能去用計算中最後所用的标準集的元素的名称來描寫所考究的集的特徵.

現在用下面的例子來說明：假定我們要計算某一班学生的數

目．先把他們按照次序排好，並且計劃按照次序对於每一个学生給予一个号數，先从 1 起，然後接續下去，使得每一个学生所得的号數，直接在他相鄰者之後．这样，每一个学生都有一个号數．假定 30 是这样計算中用來称呼的最後一个數字．則 30 个学生之中的每一个都被安排与用來編号 30 个數字的某一个成惟一的对应，也就是說，学生的集与这些數的集是等冪．如果我們現在再計算任何其它的集，例如学生帽子的集或筆桿的集，而計算的結果也一样數到 30，那麼这些集就与 1—30 的數目的集等冪．但是，由上面所說，所有这些集应該互相等冪．所以最後一个數字 30 就描寫出某類等冪集的特徵．

这样，在原始的建立兩个集的數值相等（等冪）的方法裏也好，在後來更加完善的計算事物的方法裏也好，都有着同一的基本原則，那就是把某些集帶到互相惟一对应的關係上去．

§4. 零

如上所言，自然數可以答復这样的問題：已与的集包含多少个元素？我們確知，最小的冪的集包含一个元素．

現在引入空集的概念．所謂空集卽連一个元素都沒有的集．如果承認在人羣中沒有一个学生，或者錢袋中空無一文，那我們就牽涉到空集了．在这些情况下，零字就是对‘多少’这个問題的自然答復．

因此，0 是一个給与空集類的概念的數．

習慣地，0 不当作自然數而不加入數的自然數列內．但若我們由於理論上的考慮要把它加入數的自然數列內，而且这样做也常是有益的，那麼就要把 0 放在開端，在 1 之前，寫作 0; 1; 2; 3; 4; …….

这种情况，即自然數列的第一个元素現在是 0 而不是 1，在理論方面沒有原則上的重要性的．

§5. 自然數的性質

所有自然數列的數都有下面的性質，这些性質我們当作是明顯的眞理，不加証明來应用：

1）**反射性**

凡自然數都自己等於自己（$a=a$）．

2）**对称性**

如果自然數 a 等於自然數 b，則反之 b 也等於 a．

3）**傳遞性**

如果自然數 a 等於自然數 b，自然數 b 又等於自然數 c，那麼 $a=c$．

第二章　計數制度

§6. 計數制度的概念

在所有計數的制度裏都有着下面的原則：**一定數的單位組成一個高一位的單位，这个數就叫做計數制度的底**．一个記數制度就隨着它的底而接受特別的名称，即：如果 12 被取为記數系統的底，那麼这个記數制度就叫做十二進的，如果是 2，就叫做二進的，依此類推．一个藉这个或那个計數制度來表的數，叫做**制度數**．

在文化發展的最初階段，差不多各种的民族都因实际生活的需要的影响，而感到有必要去創製帶着或多或少缺點的計數制度．

用特殊的符号來做數的文字上的表示，以後才顯著地發展起

來，而且最初的時期，甚至在具有高度文化的民族中間如希臘人罗馬人等，也还是非常之不完善．至於藉助於不多个規定了的符号來作某制度內的任一数的文字表示的問題，則是在我們紀元之初才給印度人解决了的．他們为了这个目的，提供了使用符号的位置意义來表示數这一天才的意見．这个意見的本質在於，同一的符号隨着它在所給与的數的表示中所佔的位置而有不同的意义．

取某數 k 作为計數制度的底之後，我們就得下列的數所由处理，供給計數之用：

$$
\begin{array}{ll}
\text{I}. & 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots\cdots\cdots\cdots, (k-1).\\
\text{II}. & k,\ 2k,\ 3k,\ 4k, \cdots\cdots\cdots\cdots, (k-1)\cdot k.\\
\text{III}. & k^2,\ 2k^2,\ 3k^2,\ 4k^2, \cdots\cdots\cdots\cdots, (k-1)\cdot k^2.\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\\
(n+1). & k^n,\ 2k^n,\ 3k^n,\ 4k^n, \cdots\cdots\cdots, (k-1)\cdot k^n.
\end{array}
$$

在 k 底的給与計數制度內，所有的数 N 都可以寫成下列和的形式：

$$N=a_n\cdot k^n+a_{n-1}\cdot k^{n-1}+\cdots\cdots+a_3\cdot k^3+a_2\cdot k^2+a_1\cdot k^1+a_0,$$

其中 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ 是用來表示由 0 至 $(k-1)$ 間所有的數的符号．

我們現在用例子來說明．如果取 10 做計數制度的底就可以有下面各个位：

$$
\begin{array}{ll}
\text{I}.\ (\text{單位})\cdots\cdots\cdots & 1, 2, 3, 4 \cdots\cdots\cdots\cdots 9\\
\text{II}.\ (\text{十位})\cdots\cdots\cdots & 1\cdot 10,\ 2\cdot 10,\ 3\cdot 10 \cdots\cdots\cdots\cdots 9\cdot 10\\
\text{III}.\ (\text{百位})\cdots\cdots\cdots & 1\cdot 10^2, 2\cdot 10^2, 3\cdot 10^2 \cdots\cdots\cdots\cdots 9\cdot 10^2\\
\text{IV}.\ (\text{千位})\cdots\cdots\cdots & 1\cdot 10^3, 2\cdot 10^3, 3\cdot 10^3 \cdots\cdots\cdots\cdots 9\cdot 10^3\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n \cdots\cdots\cdots\cdots & 1\cdot 10^{n-1}, 2\cdot 10^{n-1}, 3\cdot 10^{n-1} \cdots\cdots\cdots 9\cdot 10^{n-1}\\
n+1 \cdots\cdots\cdots & 1\cdot 10^n, 2\cdot 10^n, 3\cdot 10^n \cdots\cdots\cdots\cdots 9\cdot 10^n
\end{array}
$$