

算 術

(苏联師範學校用)

勃·阿·杜林諾夫 著
雅·弗·捷馬列夫



人民教育出版社

算 術

(苏联師範学校用)

勃·阿·杜林諾夫 著
雅·弗·捷馬列夫

臧述武 譯



人 民 教 育 出 版 社

本書是根據俄羅斯蘇維埃聯邦社會主義共和國教育部教育出版社出版的勃·阿·杜林諾夫和雅·弗·捷馬列夫著的‘算術’一九五五年版譯出的。原書經蘇聯教育部批准作為師範學校算術課本之用。

全書共分三篇。第一篇講整數。第二篇講數的整除。第三篇講分數。各篇的內容，不僅在理論上比初中算術有更深入的陳述，而且對於如何應用所學的原理來解應用題也有很明確的指示。

對於我國師範學校的教師、學生以及中小學的教師，本書都是一本良好的參考書。

В. А. ТУЛИНОВ И Я. Ф. ЧЕКМАРЁВ

АРИФМЕТИКА
ДЛЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ
УЧИЛИЩ

ИЗДАНИЕ ПЯТОЕ

УТВЕРЖДЕНО

МИНИСТЕРСТВОМ ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ

УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКВА—1955

本書根據俄羅斯蘇維埃聯邦社會主義共和國教育部教育出版社

1955年莫斯科俄文第五版譯出

算 術

(蘇聯師範學校用)

勃·阿·杜林諾夫
雅·弗·捷馬列夫 著

葉 廷 武 譯

北京師範出版社編者室許可証出字第二號

人民教育出版社出版

北京東山大街

新華書店發行 新華印刷廠印刷

統一書號：7012·165 字數：264千

開本：250×116 1/32 頁數：11 1/2

1955年8月第1版

1956年6月第三次印刷

19,001—24,000冊

定價(6)——1.70元

目 錄

上卷 整數

第一章 自然數(正整數)的概念	9
§1. 算術的對象	9
§2. 自然數列與它的性質	10
§3. 數的起源, 計數的公理, 計數的過程	11
§4. 零	14
§5. 自然數的性質	15
第二章 計數制度	15
§6. 計數制度的概念	15
§7. 十進制度中讀數的基礎	17
§8. 十進制度中表數的基礎	18
§9. 讀數法及表數法	19
§10. 文字記數的發展史	19
§11. 其它的計數制度	23
§12. 從一個計數制度轉到另一計數制度的過程	23
第三章 加	27
§13. 引言	27
§14. 兩個自然數的和	27
§15. 在解答問題中加的应用	30
§16. 幾個數的和	31
§17. 加的定律(基本性質)	31
§18. 從加的基本定律得出的推論	34
§19. 加的法則	35
第四章 減	37
§20. 运算的定义	37
§21. 從減的定义得出的推論	38
§22. 在解答問題中減的应用	39
§23. 加減中各項間的關係	40

§24. 从幾個數的和減去一數	41
§25. 加減列的性質	42
§26. 和的減	45
§27. 減的法則	46
§28. 加與減的驗算	48
§29. 加減中括号的应用	49
第五章 乘	51
§30. 运算的定义	51
§31. 在解答問題中乘的应用	52
§32. 幾個因數的積	53
§33. 乘的定律(基本性質)	53
§34. 从乘的基本性質得出的推論	60
§35. 乘的法則	63
第六章 除	67
§36. 运算的定义	67
§37. 除的特殊情况	69
§38. 帶餘數的除	70
§39. 自然數的除的普遍定义	71
§40. 从除的定义得出的推論	72
§41. 在解答問題中除的应用	73
§42. 在乘除中給与的數及运算結果的關係	75
§43. 乘除列的基本性質	75
§44. 除的分配性(和及差給一个數來除)	79
§45. 幾個數的積給一个數或多个數的積來除	81
§46. 除的法則	82
§47. 乘除的驗算	86
§48. 括号的使用	88
第七章 已知數变化時运算結果的变化	98
§49. 和的变化	98
§50. 差的变化	100
§51. 積的变化	104
§52. 商的变化	106

第八章 量的測定. 標準制	109
§53. 量的概念	109
§54. 量的測定	110
§55. 量的性質	112
§56. 單位	114
§57. 標準制的單位	114
§58. 與標準制無關的單位	122
§59. 合併的測定單位	126
§60. 名數	128
§61. 名數的變換	129
§62. 對於名數的運算	131

中卷 數的整除性

第九章 關於數的整除性的基本定理	145
§63. 定義	145
§64. 關於幾個加數的和給一數整除的定理	146
§65. 關於兩數的差給一數整除的定理	148
§66. 兩個加數的和給某數整除的必需而充分的條件	149
§67. 積給某數整除的性質	151
§68. 關於被除數, 除數及餘數給某數整除的定理	151
第十章 數的整除性的特徵	152
§69. 給 2, 4, 5, 25, 8, 125, 3 及 9 整除的特徵	152
§70. 給 7, 11 及 13 整除的特徵	156
§71. 關於整除性的一般特徵的定理	157
第十一章 幾個數的最大公約數	159
§72. 互質的數	160
§73. 作為求最大公約數的基礎的定理	160
§74. 歐氏算法	162
§75. 用輾轉相除的方法求兩個數的 H. O. J.	164
§76. H. O. J. 的基本性質	166
§77. 關於用幾個數的 H. O. J. 來除它們所得的商的定理	169
§78. 當某數與積中兩因數之一互質時關於兩數的積給某數整除的性質	169

§79. 關於給與的數給兩個互質的數的積所整除的定理	170
§80. 三個數及更多的數的 $H. O. D.$	171
§81. $H. O. D.$ 對某些算術問題的解答的應用	172

第十二章 最小公倍數 172

§82. 定義	172
§83. 關於兩個給與的自然數的 $H. O. R.$ 的性質的定理	173
§84. 關於從給與的數除它們 $H. O. R.$ 所得的商的性質的定理	174
§85. 求幾個給與的數的 $H. O. R.$ 的方法	175
§86. $H. O. R.$ 對問題解答的應用	176

第十三章 質數理論 177

§87. 定義及任何質數的性質	177
§88. 關於任何自然數的性質的定理	177
§89. 關於兩個不互質的數的性質的定理	178
§90. 關於質數的無限列的歐氏定理	179
§91. 質數表	180
§92. 質數特徵	183

第十四章 分解做質因數的數的分解式 184

§93. 基本定理與它們的推論	184
§94. 關於質因數的惟一系列的定理	187
§95. 分解做質因數的技術	189

第十五章 分解一個數做質因數的理論對於求給與的數的 $H. O. D.$ 及 $H. O. R.$ 的應用 191

§96. 一個數給另一個數整除的必需及充分條件	191
§97. 兩個或幾個已經分解做質因數的數的 $H. O. D.$ 的組成	191
§98. 利用將幾個數分解做質因數的方法來速求它們 $H. O. D.$ 的實際方法	192
§99. 一個數所有約數的求法	193
§100. 兩個或多個已經分解做質因數的數的 $H. O. R.$ 的組成	195
§101. 利用把給與的數分解做質因數的辦法來速求它們的 $H. O. R.$ 的實際方法	195

下卷 分數

第十六章 普通分數	197
§102. 分數的形成及定義	197
§103. 分數的相等及分數的基本性質	200
§104. 分數的簡約及通分	204
§105. 分數的不等	207
§106. 分母等於單位的分數	208
§107. 分數和單位相比較的分類	209
§108. 分數的分子及分母增加或減少同一的數	210
第十七章 普通分數的運算	213
§109. 分數的加	213
§110. 自然數的加的定律對分數的加的推廣	215
§111. 分數的減	217
§112. 分數的加減列的性質	219
§113. 分數的乘	222
§114. 自然數的乘的定律對分數的乘的推廣	224
§115. 分數的除	227
§116. 除看作是倒分數的乘	229
§117. 分數給整數及分數來乘及除的具體意義	230
§118. 當一個分數的分子或分母擴大或縮小幾倍時分數的改變	232
§119. 自然數的除的定律對分數的除的推廣	233
§120. 給與的數的分數的求法及按照一個給與數的分數值來求這 個數	236
第十八章 十進分數(小數)	238
§121. 十進分數的定義, 讀法及寫法	238
§122. 把十進分數變換成普通分數	243
§123. 十進分數的大小的比較	243
§124. 十進分數給 10 的乘方來乘或除	245
§125. 對於十進分數的運算	247
第十九章 十進分數與普通分數	258

§126. 普通分數的轉化為十進分數	258
§127. 普通分數向十進分數的近似的轉化	260
§128. 循環小數	262
§129. 普通分數化為有限十進分數或循環小數	263
§130. 循環小數的極限	269
§131. 分數發展簡史	274
第二十章 近似算	277
§132. 在計數測定及計算中的準確數及近似數	277
§133. 數的完整	279
§134. 十進分數的近似值的概念	281
§135. 近似數的錯誤的大小	281
§136. 近似數的絕對誤差與相對誤差	283
§137. 對近似數的運算	285
第二十一章 比及比例	301
§138. 比	301
§139. 比例	303
§140. 誘導比例	307
§141. 複比例	312
§142. 等比列的項的性質	314
第二十二章 比例理論的應用	315
§143. 成正比例的量及成反比例的量	315
§144. 三率法	323
§145. 百分數	324
§146. 比例配分	342
§147. 混合法則	352

附 表

1. 6000 以內的質數表	360
2. 從 1 到 100 的數的平方	362
3. 從 1 到 100 的數的立方	363

上 卷

整 數

第一章 自然數(正整數)的概念

§1. 算術的對象

算術是關於數及數的性質以及施之於它們的運算的科學。與這個目的相符合，它的基本任務也就在於建立數的概念，發展這個概念，研究數與數之間的關係以及研究算術運算的性質。

數的學問是當代數學中最重要同時也是最困難的部門之一。在這本書裏面，只包含師範學校課程大綱限度內算術的基礎的敘述，所以我們就只能局限於正整數以及正分數的考究。可是，這些問題的嚴格的以及完全的陳述，還是遠遠超出本書的範圍。其中有着特別興趣的，是那些數的關係以及那些運算的性質的學習，它們不獨可用於具體的從特別方法挑選出來的數，而且對於任意的數都一樣有效的。為了研究這些算術中的普遍關係，就用到字母記號，亦即用字母來表示任何的數。例如：等式 $a+b=16$ 僅僅對於字母 a 及 b 的一些數值才能成立，譬如， $a=14$ 及 $b=2$ ；至於等式 $a+b=b+a$ 則對於 a 及 b 的任何數值都能成立，連 $a=14$ 及 $b=2$ 也包括在內。因此，第一個等式並不表示數的性質，而第二個等式則表示屬於所有的數的普遍性質，它正正指出幾個數的和不因更改加數的次序而改變。

以後我們將利用字母的記号研究關於所有的數的普遍算術性質。

§2. 自然數列与它的性質

整的正數在算術裏叫做自然數。自然數的概念是从更原始的“集”的概念導出，而所謂集也正是環繞我們的世界裏一些各別事物的總體(集)。

凡自然數都可以看作是它所包含的單位的集(總體)。實際上，為着組成任何的集，開始時只須要取一個元素。在計算這樣的集的元素的结果裏就得到了自然數一，即單位。對於所得的结果加上一個元素，我們就得到一個集，它的元素的數目是要用自然數單位及單位來表示的，也即是要用二來表示的。對於這個集又重新加上一個元素，我們就得到一個集，它的元素的數目要用單位及單位及單位來表示的，也即是用三來表示的，依此類推。

用這個方法可以組成數列(集)：1, 2, 3, 4, ……每一次都把數一(單位)加到前面的數上去。這樣的數列叫做自然數列。這個數列是無限的。這意味着，如果我們達到了數列中任何一個數，則再加上一個單位，就可以組成一個新數，直接地在給與的數的後面的。

自然數列這一個集的特性在於它的元素(數)被安置在嚴格的順序裏，根據這個順序可以確定那一元素在某一元素之後，那一元素在某一元素之前，以及那一元素是最初的。這個以及與這個相類似的集就說是排好的(有序的)。作為這樣的集的例子可以舉出：字母的集，一班根據字母來排好了的學生的集等等。

由上面所說即可推得，自然數列中每一個數都由它在數列中所佔的位置來決定。

这样, 与一个基数之被看作集的特性的特性相似, 計算的过程要求我們把序數看作已与元素在某有序集中所佔的位置的特徵(号碼). 从序數的觀點來看: a) 两个相等的數就是自然數列內同一的數, 及 b) 一个數是看作小於或大於另一个數, 視乎它在另一个數之前或之後而定.

一个集叫做有限集, 如果它的元素的數目是可以確定的話, 而無限集的元素數目則是不可以確定的.

下面的公理表達了自然數列的性質:

- 1) 單位是一个數;
- 2) 在每一个數的後面就直接地有另一个惟一的數;
- 3) 如果两个數的後面都直接給同一的數跟着, 那麼它們就相等;
- 4) 單位之前沒有任何數;
- 5) 如果任何一個性質對於一这个數是正確, 而且如果它假定對於任一个數是正確, 則對於这个數直接後面的數也就是正確, 那麼它對於自然數列內所有的數也都是正確的.

§3. 數的起源, 計數的公理, 計數的过程

位置的概念是联系着自然數列的: 在思想上把許多事物依明確的次序來安排, 就意味着把这些事物之一与數 1 对应並且叫它做第一; 之後又把另一个事物与數 2 对应並叫这个事物做第二; 之後再把一个新的事物与數 3 对应並叫它做第三, 依此類推. 这样的計數下去, 就会接連地把所考慮的事物与 1, 2, 3, 4, ……等成对应. 到了集中最末的一个元素的時候, 則与这个元素相对应的數就是集的元素數目. 非常明顯, 計數的結果是与計數的次序無關的. 这就是計數的公理.

实际上，在計數過程中，不論我們依什麼次序选取集中元素繼續與自然數列的數來對應，集中元素選定以後，就必然得到一個與給與的集全同的集。

在這樣形式下計數的運算，僅僅是在人類文化發展的夠高階段才發生的。

兩個集有同一的幕，如果在它們的元素間可以建立一個互相惟一的對應關係的話，也就是說這樣一個對應關係，它使得一個集的每一元素可以與另一個集一個惟一的元素相比對，而且，反之，一個集的每一元素又可以與第一個集的一個惟一的元素相比對。為着判斷兩個集是否等幕，不一定要實行計數：為了這，僅僅使兩集的元素成互相對應並跟着做出適當的結論已經完全足夠的了。而且我們也證明過，所有從根據它們的幕而進行的各個集的比較中得出的結論，當其中任一個集用另一個與它等幕的集來代替時，也一樣有效。

這種情況使得我們有可能在實施算術運算時採用一些具體的，先前的經驗方法來研究過的集：手指，石子，刀痕，果核等等，它們在已與的情況下是作為某類等幕集的代表，而且也就是在這種意義下充當數的具體替代者。實際上，既然所有等幕集是由任一個屬於它的集來描寫特性，就當然有可能把考究中的具體的集與某標準集（手指的集，石子的集，刀痕的集，果核的集等）比較，即在考究中的集與選來作比較標準的集之間建立起互相惟一的對應關係過程中進行比較。決定這些或那些標準集充當某類等幕集的具體代表者時，只須要按照純粹實用的理由：可接近性，經驗，不變性，可考究性等。

譬如元素是手指的集就是一個標準集的例子：大指，食指，中指，無名指，小指，是這個集的元素。

很明顯，如果一個集用小指來描寫特性，那就是說，這個集是和某一類的等冪集聯系着，它在我們的表示中是用數 5 來描寫特性的。因此，在已與的情況下數 5 就叫做小指了。像這樣的數的稱呼，即與那些用來幫助計算的事物的稱呼相符合的，在文化發展的早期已經出現了。

隨着時間的過往，這些稱呼漸漸失去它最初的意思，而開始在計算中特別被用為這些或那些自然數的稱呼。

隨着文化的發展，人們常常有必要去研究一些集，它們的冪是比較取作標準集的冪還要更高的。用在高冪集與細究過的標準集的元素間建立互相惟一對應這個方法來考究高冪集的實際需要終於做成了新的標準集，即無窮的自然數列，它本身是數的記號的制度，一個一個地照着數密確定了的次序排好而且被用作集的冪的描寫與比較之用。

計算的過程終結到在所考究的具體集的元素以及自然數列的數之間去建立互相惟一的對應關係，而在這裏扮演標準集的角色，却是自然數列，它的元素就是自然數。

在發展的早期階段，計算的過程是由於在所考究的具體集及某標準集之間建立互相惟一的對應關係所組成。

對於原始民族這種過程的研究指出，被取作標準集的是一些確定而非非常明顯的集的部分，它們當着有需要去考究更大的冪的集時，逐步隨着需要而擴大。

常常是一個手或兩個手的指，一個足或兩個足的趾，腕，臂等充當標準集的全部元素。

標準集元素間次序的不變性使得有可能去用計算中最後所用的標準集的元素的名稱來描寫所考究的集的特徵。

現在用下面的例子來說明：假定我們要計算某一班學生的數

目，先把他們按照次序排好，並且計劃按照次序對於每一個學生給予一個號數，先從 1 起，然後接續下去，使得每一個學生所得的號數，直接在他相鄰者之後。這樣，每一個學生都有一個號數。假定 30 是這樣計算中用來稱呼的最後一個數字，則 30 個學生之中的每一個都被安排與用來編號 30 個數字的某一個成惟一的對應，也就是說，學生的集與這些數的集是等羈。如果我們現在再計算任何其他的集，例如學生帽子的集或筆桿的集，而計算的結果也一樣數到 30，那麼這些集就與 1—30 的數目的集等羈。但是，由上面所說，所有這些集應該互相等羈。所以最後一個數字 30 就描寫出某類等羈集的特徵。

這樣，在原始的建立兩個集的數值相等（等羈）的方法裏也好，在後來更加完善的計算事物的方法裏也好，都有着同一的基本原則，那就是把某些集帶到互相惟一對應的關係上去。

§4. 零

如上所言，自然數可以答復這樣的問題：已與的集包含多少個元素？我們確知，最小的羈的集包含一個元素。

現在引入空集的概念。所謂空集即連一個元素都沒有的集。如果承認在人羈中沒有一個學生，或者錢袋中空無一文，那我們就牽涉到空集了。在這些情況下，零字就是對‘多少’這個問題的自然答復。

因此，0 是一個給與空集類的概念的數。

習慣地，0 不當作自然數而不加入數的自然數列內。但若我們由於理論上的考慮要把它加入數的自然數列內，而且這樣做也常是有益的，那麼就要把 0 放在開端，在 1 之前，寫作 0; 1; 2; 3; 4; ……。

这种情况，即自然數列的第一个元素現在是 0 而不是 1，在理論方面沒有原則上的重要性的。

§5. 自然數的性質

所有自然數列的數都有下面的性質，這些性質我們當作是明顯的真理，不加證明來應用：

1) 反射性

凡自然數都自己等於自己 ($a = a$)。

2) 对称性

如果自然數 a 等於自然數 b ，則反之 b 也等於 a 。

3) 傳遞性

如果自然數 a 等於自然數 b ，自然數 b 又等於自然數 c ，那麼 $a = c$ 。

第二章 計數制度

§6. 計數制度的概念

在所有計數的制度裏都有着下面的原則：一定數的單位組成一個高一位的單位，這個數就叫做計數制度的底。一個記數制度就隨着它的底而接受特別的名稱，即：如果 12 被取為記數系統的底，那麼這個記數制度就叫做十二進的，如果是 2，就叫做二進的，依此類推。一個藉這個或那個計數制度來表的數，叫做制度數。

在文化發展的最初階段，差不多各種的民族都因實際生活的需要的影響，而感到有必要去創製帶着或多或少缺點的計數制度。

用特殊的符號來做數的文字上的表示，以後才顯著地發展起

來，而且最初的時期，甚至在具有高度文化的民族中間如希臘人羅馬人等，也還是非常之不完善。至於藉助於不多個規定了的符號來作某制度內的任一數的文字表示的問題，則是在我們紀元之初才給印度人解決了的。他們為了這個目的，提供了使用符號的位置意義來表示數這一天才的意見。這個意見的本質在於，同一的符號隨着它在所給與的數的表示中所佔的位置而有不同的意義。

取某數 k 作為計數制度的底之後，我們就得下列的數聽由處理，供給計數之用：

$$\text{I. } 1, 2, 3, 4, \dots, (k-1).$$

$$\text{II. } k, 2k, 3k, 4k, \dots, (k-1) \cdot k.$$

$$\text{III. } k^2, 2k^2, 3k^2, 4k^2, \dots, (k-1) \cdot k^2.$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$(n+1) \cdot k^n, 2k^n, 3k^n, 4k^n, \dots, (k-1) \cdot k^n.$$

在 k 底的給與計數制度內，所有的數 N 都可以寫成下列和的形式：

$$N = a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \dots + a_3 \cdot k^3 + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^1 + a_0,$$

其中 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是用來表示由 0 至 $(k-1)$ 間所有的數的符號。

我們現在用例子來說明，如果取 10 做計數制度的底就可以有下面各個位：

$$\text{I. (單位)} \dots 1, 2, 3, 4, \dots, 9$$

$$\text{II. (十位)} \dots 1 \cdot 10, 2 \cdot 10, 3 \cdot 10, \dots, 9 \cdot 10$$

$$\text{III. (百位)} \dots 1 \cdot 10^2, 2 \cdot 10^2, 3 \cdot 10^2, \dots, 9 \cdot 10^2$$

$$\text{IV. (千位)} \dots 1 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^3, 3 \cdot 10^3, \dots, 9 \cdot 10^3$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$n \dots 1 \cdot 10^{n-1}, 2 \cdot 10^{n-1}, 3 \cdot 10^{n-1}, \dots, 9 \cdot 10^{n-1}$$

$$n+1 \dots 1 \cdot 10^n, 2 \cdot 10^n, 3 \cdot 10^n, \dots, 9 \cdot 10^n$$