坐標法

原著者 A. C. 斯瑪歌賽夫斯基
譯 者 李　英

上海 中外書局 出版

坐標法

A. C. 斯瑪歌賽夫斯基著

李　英譯

上海中外書局出版

坐 標 法

原書名 МЕТОД КООРДИНАТ

原著者 А. С. СМОГОРЖЕВСКИЙ

原出版社 ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

原出版版次 1952 年 版

譯 者 李 英

出版者 發行者 中 外 書 局
上海中山東一路18號

印刷者 東 南 印 書 館
上海新聞路556弄24號

書號: 047 開本:787×1092, 1/32 印張: 1 3/4

字數: 26千字 定價: 二角

1955年6月第一版第一次印刷 印數0001—2000冊

內容介紹

這本小冊子，是由蘇聯數學通俗講座第十集，“坐標法”翻譯成的。數學通俗講座還有很多集，都是蘇聯各數學專家寫成的。有些是在中學生數學比賽大會上的演講；都是用了深入淺出的筆法，週到的敘述了一個題目，但又不失數學的嚴密性，並且都是一般高中學生可看懂的。

這本小冊子也不例外，著者用例題解法的比較——初等幾何學的，解析幾何學的，向讀者剖明了坐標法的原理和功用，適當地給了坐標法正確的估價，啓發了讀者的思想。

序　言

在不同的幾何學發展中，很多地方已是應用代數學來研究幾何圖形的性質了。這在獨立的科學裏就形成了一個分支——解析幾何學。解析幾何學的產生，是和坐標法的發現密切相關的，而坐標法就是它的方法的基礎。

點的坐標就是數，它是確定已知直線上或已知平面上，或也是空間裏點的位置的。假如已經知道點的地理坐標——經度和緯度，那就決定了它在地球表面上的位置。

要尋找點的坐標，必須定方向工作，由它就知道坐標的大小。在地理坐標情况下，是用赤道和零度經度來作定方向的。

假如給了一個定方向，並且告訴了我們如何去找點的坐標，那就說它是一個已知坐標系統。

坐標法的特性就是用方程來定義幾何圖形（§4）。那就是用代數作工具，來進行幾何的探討和解决幾何問題。

代數特性附入了幾何探討，坐標法在幾何學裏給了代數學一個非常重要的特質，就是把代數學做爲唯一解决問題的方法。假如在算術和初等幾何學裏，是對每一問題尋找特別

解法的規律的話，那麼在代數學和解析幾何學裏的解法，是建立在爲一般問題解的目的上的，所以對任何一個問題就容易適合了。可以說解析幾何學對初等幾何學所處的地位關係，就如同代數學和算術所處的關係一樣。在幾何學裏，特別由於代數的轉述，因而問題有了更普遍的解法，這乃是坐標法的主要目的。很明白的，要敬告讀者，不要忽視初等幾何學的方法，因爲在個別的情況下，它找到的解比坐標法得到的更簡潔。

坐標法的另一價值是，由於它的應用，把必須憑藉圖形來表示複雜空間的形狀解放出來。

當實際應用坐標概念時，一對象物體的坐標，在某種意義下攷慮爲一點，祇能近似的定義。所謂已知對象物體的坐標的意思，是用這坐標來定義一點，或者是這對象物體的一點，或者是充分靠近它的。

由於本書的篇幅限制，我們祇能介紹關於坐標法的一些初等知識和它的簡單應用。我們很注意用方程來定義幾何圖形的問題，特別是當第一次遇到坐標法所加多的困難。我們用觀察例題來說明這些問題的意義。

著者。

目　錄

§ 1. 直線上點的坐標

直線上點的位置的確定和坐標的聯繫是最簡單的情形。我們就用這情形來開始敍述坐標法。

我們在直線上取二任意不同點 O 和 E（圖 1），且令它們所定的線段 OE 爲單位長㊀。

我們認爲直線 OE 上任意一點，就有對應的一數，稱爲它的坐標；這數由下法決定：在直線 OE 上一點 P，假如它和 E 同在 O 點的同側，那麼它的坐標爲正數且等於線段 OP 的長度；假如它和 E 在 O 點的異側，那麼它的坐標是負數，絕對值等於線段 OP 的長度；O 點的坐標爲零。

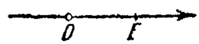

圖 1.

如果這樣，那麼就把直線 OE 稱爲數軸或坐標軸；O 點稱爲坐標原點。數軸所含的點的坐標爲正的部份稱爲它的正的部份；數軸所含的點的坐標爲負的部份稱爲它的負的部份。

已知數軸上每一點都有確定的坐標，所以同一數軸上不同的點就有不同的坐標。另一方面，每一實數是數軸上確定

㊀ 點 O 和 E 可以這樣取，使得線段 OE 等於已知的單位長，如 1 厘米。

點的坐標。 例如：E 點的坐標等於 $+1$，而數 -1 就是關於 O 點與 E 對稱的點的坐標。 $E(1)$，$A\left(-2\frac{1}{3}\right)$，$B(x)$，$C(x_1)$，$D(x_2)$ 等等就表示數 1，$-2\frac{1}{3}$，x，x_1，x_2 是 E，A，B，C，D 各點的坐標。

在數軸上從 O 點到 E 點的方向就是數軸的方向；它規定用箭頭表示(圖 1.)

§ 2. 平面上點的坐標

在平面上，我們作兩互相垂直的數軸 Ox 和 Oy，使得在它們的坐標原點相交為 O (圖 2.)。我們分別叫軸 Ox 和 Oy 為橫坐標軸和縱坐標軸，而它們——橫坐標軸和縱坐標軸所在的平面稱為 Oxy 平面●。我們應當注意在這兩坐標軸上所取的單位長度是一樣的。

軸 Ox 和 Oy 分平面 Oxy 為四個象限；如圖 2. 所示，依着坐標軸的方向順次給象限一個號碼。

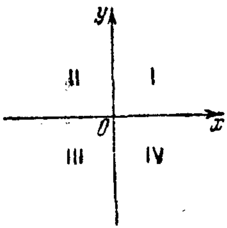

圖 2.

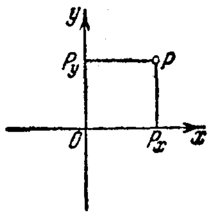

圖 3.

我們在 Oxy 平面上，任取一點 P，從它分別到軸 Ox 和 Oy 所引垂線的垂足 P_x 和 P_y，就是它在這軸上的正投影（圖

● 軸 Ox 和 Oy 同樣也叫做坐標軸。

3.)。在 Ox 軸上用 x 表示點 P_x 的坐標，而在 Oy 軸上用 y 表示點 P_y 的坐標。 數 x 和 y 就叫做 P 點的坐標，把它寫成：$P(x,y)$。 這樣的坐標就叫做笛卡兒直角坐標①。

這樣，在平面上 P 點的坐標的研究就變成了在數軸上兩個點（P_x 和 P_y）的坐標的研究了。

點 P_x 的坐標 x 叫做 P 點的橫坐標，點 P_y 的坐標 y 叫做 P 點的縱坐標。 假如 P 點在 Ox 軸上，那麼它的縱坐標等於零；假如 P 點在 Oy 軸上，那麼它的橫坐標等於零；O 點的兩坐標都等於零。

在圖 4. 裏是表示點的坐標的符號，它是由點所在的象限來決定；左邊是橫坐標的符號，右邊是縱坐標的符號。

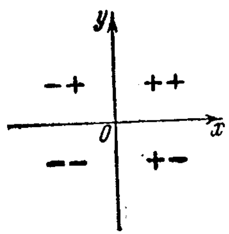

圖 4.

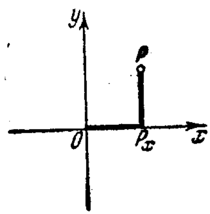

圖 5.

我們來談談，如果已知一點 P 的坐標，如何作它的圖形。我們根據橫坐標 x 在 Ox 軸上作 P_x 點， 根據縱坐標 y 在 Oy

① 為 XVII 世紀有名的哲學家和數學家（René Descartes）雷乃。笛卡兒的名字。

軸上作 P_y 點(見圖 5.)；自 P_x 引 Ox 軸的垂線，自 P_y 引 Oy 軸的垂線；這兩垂線的交點即爲所求的點 P。

上述方法可稍更改(圖 5.)：我們先找 P_x 點，自它作 Ox 軸的垂線，在垂線上取線段 P_xP 使它的長等於坐標 y 的絕對值，假如 $y>0$，它就在 P_x 的上面，假如 $y<0$，它就在 P_x 的下面[1]；假如 $y=0$，那麼 P 點就和 P_x 點重合。

由上述最後作法，可以說，點的坐標指示了自原點到已知點的一條路徑；知道了 P 點的橫坐標 x，我們就可找到這路徑的 OP_x 部份，知道了 P 點的縱坐標，我們就找到它的第二部份 P_xP。

順便提到，我們要注意，坐標概念不是數學家發現的：它是從實際裏得來的，即使數學家們還不知道的時候，坐標法的原始形態已被人們在應用了。例如，我們記得涅克拉索夫的一段詩："誰在俄國生活好"。

在森林裏走，
對着第卅個柱子
筆直一俄里；
在草地上

---

[1] 精確的說，當 $y>0$ 時，P 點和 Oy 軸的正部份應該在 Ox 軸的同一側，而當 $y<0$ 時在異側，同樣的，Ox 正部份在它的負部份的右邊，而 Oy 軸的正部份在它的負部份的上面，這些我們不再敍述了。

長在這塊草地上
兩顆老松樹，
在它下面，松樹下面
埋着一個箱子。
你喚醒她……

這裏 30 和 1 就是柱子的坐標（在這裏的意義，是指對象物的坐標；見緒言）；取一俄里爲一單位長。

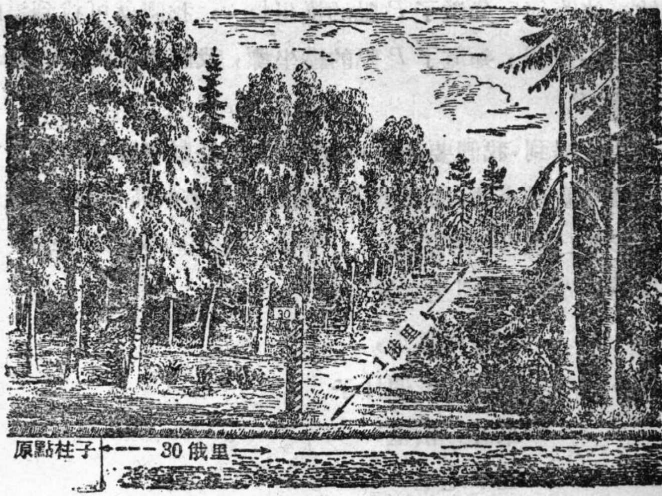

圖 6.

§ 3. 基 本 問 題

複雜問題的解常被引導到一系列簡單問題的解。這些簡單問題中，有一些是很特別的和很簡單的，取爲基本問題。在這一節裏攷慮兩個基本幾何問題：已知兩點之間的距離的計算和已知頂點的三角形的面積的計算。在解析幾何學裏，甚至把上述問題用已知點的坐標組成公式，由它來確定所求的量。

問題 1. 求已知兩點間的距離。

在平面 Oxy 上，令已知點爲 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$。我們自此二點向 Ox 軸作垂線 AA_x 和 BB_x，向 Oy 軸作垂線 AA_y 和 BB_y (圖 7.)。用 d 表示線段 AB 的長。

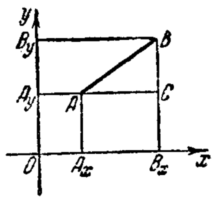

圖 7.

令直線 AA_y 和 BB_x 相交於 C 點。因爲三角形 ABC 爲直角三角形，所以

$$d = AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}。\qquad (1)$$

應注意這裏

$$OA_x = x_1, \ OB_x = x_2, \ OA_y = y_1, \ OB_y = y_2,$$

$$AC = A_xB_x = OB_x - OA_x = x_2 - x_1,$$

$$CB=A_yB_y=OB_y-OA_y=y_2-y_1,$$

從 (1) 式我們得

$$a=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}。\tag{2}$$

這公式當點 A 和 B 在任何位置都正確，這是可以證明的。

問題 2. 用頂點的坐標計算三角形的面積。

令三角形的頂點爲點：$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$。自頂點向 Ox 軸作垂線 AA_1，BB_1，CC_1 (圖 8.)。明顯的，三角形 ABC 的面積能由梯形 AA_1B_1B，AA_1C_1C，CC_1B_1B 表示：

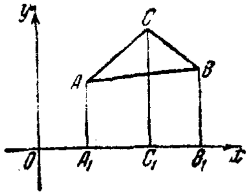

圖 8.

$$S=\text{面積 }AA_1C_1C+\text{面積 }CC_1B_1B-\text{面積 }AA_1B_1B。$$

因爲

$$AA_1=y_1,\quad BB_1=y_2,\quad CC_1=y_3,$$

$$A_1B_1=x_2-x_1,\quad A_1C_1=x_3-x_1,\quad C_1B_1=x_2-x_3,$$

那麼

$$\text{面積 }AA_1C_1C=\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1),$$

$$\text{面積 }CC_1B_1B=\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_2-x_3),$$

$$\text{面積 }AA_1B_1B=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)。$$

所以

$$S=\frac{1}{2}\left[(y_1+y_3)(x_3-x_1)+\right.$$

$$\left.+(y_2+y_3)(x_2-x_3)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\right]。$$

由此簡化，就得

$$S=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]。\qquad (3)$$

我們要注意，當三角形頂點在任何位置，雖然在導出公式時是不明顯的，公式 (3) 除符號外爲正確[一]。

[一] 那就是由公式 (3) 計算出來 S 的值可能爲負，但它的絕對值等於三角形面積的大小。

§ 4. 幾何圖形的方程

在平面上，我們選擇了一些有限或無限多的點。這些選擇了的點就形成平面幾何圖形。如果我們能夠指出這些平面上的點是如何選擇的，這圖形就是由它定義了。例如我們選擇的點是利用圓規或直尺，用鉛筆或墨水畫出來的圓周或者直線㊀。我們又可定義圓周為平面上點的幾何軌跡，它們與定點的距離必須為已知長。這就是說：可以用點的幾何軌跡來說明這些點是如何被選擇的。為了這個目的，我們在下面敍述一個較全面的方法，也就是解析幾何學的應用。

在平面上作笛卡兒直角標系的軸 Ox，Oy。於是已知含兩個量 x 和 y，或僅含這兩個中的一個的方程㊁，它選擇平面上這樣的點，僅當它們的坐標 x 和 y 是適合這已知方程的。這樣選擇的點就形成一個圖形。已知方程就叫做這圖形的方程。

㊀ 從另一方面講，在紙上繪出來的並非點，但可以認為是我們所選擇的點。

㊁ 在命名上，代數學裏取這樣的方程叫做含兩未知數的方程（或者含一未知數，假如在方程裏衹有量 x 和 y 的一個）。