衛生干部自学文化課本

平面三角

饒婉宜 編

人民衛生出版社

內 容 提 要

这套文化課本，包括代数、平面几何、平面三角、物理学及化学五种。是供衛生干部自学文化或业余学習用的。为便于讀者自学中参考，同时还出版了上述五种書的習題解答。

这套課本的內容，基本上包括了初、高中数理化各科的知識，但根据学習医学的需要做了一些增减。凡是文化水平已經具有高小畢业程度，过去沒有学过中学課程的衛生干部，都可以选学这套課本。学習的順序：最好依次先学代数、几何、三角，再学物理；至于化学，需要的預备知識較少，也可以在学習数学之前先学。

衛生干部自学文化課本

平 面 三 角

開本：850×1168/32　印張：6 $\frac{7}{16}$　字數：165千字

饒 婉 宜 編

人 民 衛 生 出 版 社 出 版

（北京書刊出版業營業許可証出字第〇四六號）

北京崇文區繖子胡同三十六號

北 京 五 三 五 工 厂 印 刷

新华書店科技發行所發行·各地新华書店經售

統一書號：14048·2197　1960年4月新1版—第1次印刷

定　价：0.48 元　（北京版）印數：1—15.000

目　录

怎样学这本書

凡是具有代数与几何基础（代数要学完对数、几何要学完相似三角形）的同志，都可以自学这本三角，并且一定可以学好这本三角。但是自学的时候，要注意以下几点：

（1）学習定义和定理时，一定要先了解它們的意思，然后边記忆边画圖，决不可以只背式子而脫离圖形，特別是三角函数的定义、正弦定理与余弦定理，由于用途很广，所以必須熟記；

（2）由于三角里的公式較多，但是每一組或几組公式，都可以概括为几句簡單的話。所以記忆时，只要記住这些話（必須弄清它們的意思），然后把它們用式子表示出来，就是公式；

（3）解三角形的时候，必須准确地画出圖形，才能檢驗計算結果；

（4）書中的〔解題方法〕、〔画圖方法〕或"注意"等都不屬于解題規格，因此，做題时不要列入这些項目；

（5）必須对課文有了較深刻的了解，并能記忆定义、公式和定理后，再做習題。而且要尽可能地自己做題，做完后再与題解对照更正。对于自己做錯的地方，要特別注意研究發生錯誤的原因，以便今后克服。决不可依賴題解而放弃独立思考；

（6）自学这本三角需要的工具是：圓規、量角器、刻度尺和"四位数学用表"（本表附在書后）。

編　者

第一章　銳角三角函数

1. 三角学　三角学是数学的一个分科，是研究三角函数和它的应用的一門科学（什么是三角函数，以后再講）。三角学在理論科学上和实用上都很重要，例如，在高等数学、天文学、物理学、測量学以及其它科学方面，都有广泛的应用。

三角学和其它科学一样，是在解决生产实踐的具体問題中成長起来的。三角学發展的最初阶段和天文学有密切关系。

我国古代的天文学很發达，在古代历法的某些計算中，已构成一个余切函数表。

現在我們所用的三角函数的名称（正弦、余弦、正切、余切、正割和余割），都是十六世紀我国已有的名称。

十七世紀后半叶，我国数学家梅文鼎已經編了一本平面三角学和一本球面三角学。十八世紀以后，我国还出版了許多三角学方面的書籍。

2. 銳角三角函数的定义

（1）直角三角形各边的名称　在本章里，我們規定直角三角形ABC中，直角的頂点用C表示，两个銳角的頂点分别用A、B表示（如圖1）。每个角的对边用同样的小写字母表示。例如，∠A的对边記为a；∠B的对边記为b；∠C的对边記为c。此外，每个銳角都有它自己的对边和邻边（除斜边外，与銳角相邻的直角边，叫做这个銳角的

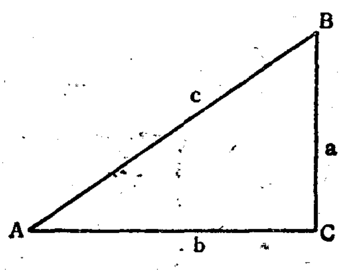


圖 1

邻边）。例如，∠A的对边是 a（或 BC），邻边是 b（或 AC）。而∠B的对边是 b（或AC），邻边是 a（或 BC）。

（2）**直角三角形中每两边的比** 我們用直角三角形的任一边作分母去除其它两边，就得两个比。例如在圖 1 中，用斜边AB做分母就得：$\frac{BC}{AB}$和$\frac{AC}{AB}$；用其它两边各做分母，又得：$\frac{BC}{AC}$和$\frac{AB}{AC}$；$\frac{AC}{BC}$和$\frac{AB}{BC}$。因此，任何一个直角三角形，它的两边的比共有六个。这六个比也可以写成：$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$、$\frac{a}{b}$、$\frac{c}{b}$、$\frac{b}{a}$和$\frac{c}{a}$。

現在我們研究一下，如果∠A 的大小不变，这六个比与每边的長短有无关系？例如在圖 2 中，∠A 的两边原是 AB 和 AC，現在縮短为 AB′ 和 AC′；或放大为 AB″ 和 AC″，我們看看$\frac{BC}{AB}$与$\frac{B'C'}{AB'}$或$\frac{B''C''}{AB''}$有什么关系；$\frac{AC}{AB}$与$\frac{AC'}{AB'}$或$\frac{AC''}{AB''}$有什么关系？………。

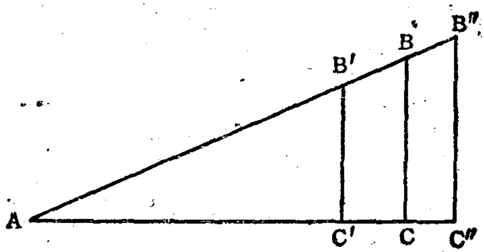


圖 2

在△AB′C′ 和△ABC 中，

$\because$ ∠A＝∠A，（公共角）

則 △AB′C′～△ABC；（一銳角相等，两直角三角形相似）

$\therefore$ $\frac{B'C'}{AB'}=\frac{BC}{AB}$；（相似三角形的对应边成比例）

$$\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC}{AB};$$ （相似三角形的对应边成比例）

……………………………。

同理 $\because$ $\triangle AB''C''\sim\triangle ABC$，

则 $$\frac{B''C''}{AB''}=\frac{BC}{AB};$$

$$\frac{AC''}{AB''}=\frac{AC}{AB};$$

……………………………；

$\therefore$ $$\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\frac{BC}{AB};$$ $\left(都等于\frac{BC}{AB}\right)$

$$\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}=\frac{AC}{AB};$$ $\left(都等于\frac{AC}{AB}\right)$

……………………………。

所以，在直角三角形中，只要銳角的大小不变，无論它的边是多長多短，每两边的比是不变的。也就是說，**只要銳角不变，这六个比与边的長短无关，并且与度量边長的單位无关**（平面几何第83节（2）里講过，两条綫段的比与測量綫段的長度單位无关）。例如，画$\angle A$是30°的直角三角形，这样的三角形虽然可以画无数多个（如圖3），但是根据測量的結果可知，不管在

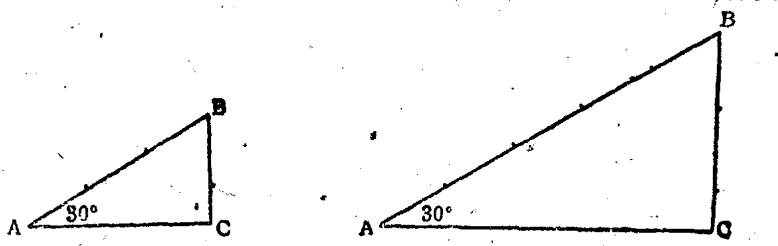


圖 3

哪个三角形里，$\frac{BC}{AB}$总是等于$\frac{1}{2}$。这就說明了$\frac{BC}{AB}$与边長无

关；其它各个比，也可以用測量方法来說明它們与边長无关。

現在我們再研究一下，这六个比与$\angle A$的大小有无关系。如果画$\angle A$是30°和$\angle A$是45°的两个直角三角形（如圖4），斜边的長同是4，就可以看出各个比不一样。例如$\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2}$；

$\frac{B'C'}{AB'}=\frac{\overset{1.4}{\cancel{2.8}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{1.4}{2}$，就是当$\angle A$的大小变更时，对边与斜边的比也随着变更。用測量方法，也可以說明其他各个比也是随着角度而变化的。根据代数里所講“函数的定义”，这六个比都是銳角的函数。

（3）銳角三角函数的定义　因为$\frac{BC}{AB}$、$\frac{AC}{AB}$、$\frac{BC}{AC}$、$\frac{AB}{AC}$、$\frac{AC}{BC}$和$\frac{AB}{BC}$这六个比是銳角的函数，又因为它們的用途很广，所以数学里把它們叫做銳角的三角函数。并且每一个比都給它一个特定的名称和特定的符号。現在就圖1的記法，把这些名称和符号列在下面：

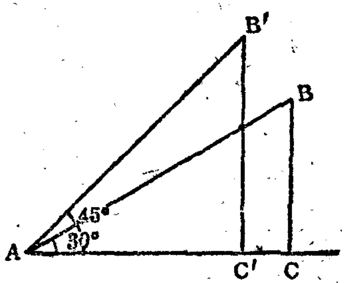


圖 4

$\frac{BC}{AB}$即$\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}$叫做$\angle A$的正弦，用$\sin A$表示；

$\frac{AC}{AB}$即$\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}$叫做$\angle A$的余弦，用$\cos A$表示；

$\frac{BC}{AC}$即$\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}$叫做$\angle A$的正切，用$\operatorname{tg} A$（或$\tan A$）表示；

$\frac{AC}{BC}$即$\frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}$叫做$\angle A$的余切，用$\operatorname{ctg} A$（或$\cot A$）表示。

注意 1. sin A讀做“赛因A”；cos A讀做“扣賽因A”；tg A讀做“談金特A”；ctg A讀做“扣談金特A”。

2. $\frac{AB}{AC}$叫做∠A的正割，用sec A表示，讀做“賽根特A”；$\frac{AB}{BC}$叫做∠A的余割，用cosec A（或csc A）表示，讀做“扣賽根特A”。因为这两个函数在本書里用处不多，所以不講了。

3. sin A、cos A等等是一个記号，只代表一个数值，就是角A的正弦、角A的余弦等等。sin、cos等等并不和A發生相乘的关系。

把上面的叙述写成式子就是：

$$\angle A\text{的正弦}=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}\text{或}\sin A=\frac{\text{对}}{\text{斜}}=\frac{a}{c};$$

$$\angle A\text{的余弦}=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}\text{或}\cos A=\frac{\text{邻}}{\text{斜}}=\frac{b}{c};$$

$$\angle A\text{的正切}=\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}\text{或}\operatorname{tg} A=\frac{\text{对}}{\text{邻}}=\frac{a}{b};$$

$$\angle A\text{的余切}=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}}\text{或}\operatorname{ctg} A=\frac{\text{邻}}{\text{对}}=\frac{b}{a}。$$

前面說过，直角三角形的每两边所組成的六个比叫做銳角的三角函数，而sin A、cos A等等是分别代表这六个比的。所以，**sin A、cos A等等叫做∠A的三角函数**。由于各个比与边的長短沒有关系，因此，sin A、cos A等等，与∠A的边的長短也沒有关系。同样地，∠B的三角函数是：

$$\angle B\text{的正弦}=\frac{\angle B\text{的对边}}{\text{斜边}}\text{或}\sin B=\frac{\text{对}}{\text{斜}}=\frac{b}{c};$$

$$\angle B\text{的余弦}=\frac{\angle B\text{的邻边}}{\text{斜边}}\text{或}\cos B=\frac{\text{邻}}{\text{斜}}=\frac{a}{c};$$

$$\angle B\text{的正切}=\frac{\angle B\text{的对边}}{\angle B\text{的邻边}}\text{或}\operatorname{tg} B=\frac{\text{对}}{\text{邻}}=\frac{b}{a};$$

$$\angle B\text{的余切}=\frac{\angle B\text{的邻边}}{\angle B\text{的对边}}\text{或}\operatorname{ctg} B=\frac{\text{邻}}{\text{对}}=\frac{a}{b}。$$

注意 1. 記忆三角函数时，要記后一种表示法。例如，$\sin A=\frac{对}{斜}$，$\cos A=\frac{邻}{斜}$等等。不过要記住，式中的“邻”和“对”是随着角而变的。如求∠A的正弦，“对”是指∠A的对边；求∠B的正弦，则“对”是指∠B的对边。“邻”也相同。

2. 只要記住前面三个三角函数的定义（即正弦、余弦、正切），因第四个是与第三个互为倒数的，就是把tg A的分子分母对調就得ctg A。

3. ∠A的三角函数与∠A的边的長短无关（也就是可以把边取得長一些或短一些，計算出来的三角函数是一样的）。

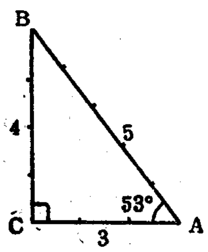


圖 5

4. 三角函数的用途很广，必須記得烂熟，才便于应用。

例 1 在圖5中，量得各边与角的近似值是：AC＝3單位，AB＝5單位，BC＝4單位，∠A＝53°。求53°角的正弦、余弦、正切和余切。

解 根据三角函数的定义，可以知道：

$$\sin 53^\circ=\frac{对}{斜}=\frac{4}{5}=0.8;$$

$$\cos 53^\circ=\frac{邻}{斜}=\frac{3}{5}=0.6;$$

$$\mathrm{tg}\,53^\circ=\frac{对}{邻}=\frac{4}{3}=1.3;$$

$$\mathrm{ctg}\,53^\circ=\frac{邻}{对}=\frac{3}{4}=0.75。$$

例 2 在直角三角形ABC中，C为直角，已知AC＝5，CB＝4。求角A的正弦、余弦、正切和余切。

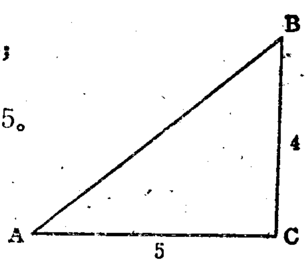


圖 6

〔解題方法〕因为求銳角的三角函数，要用到各边，所以应先求出斜

边的長，然后再求∠A的三角函数。

解 $\because$ $AB^2=AC^2+BC^2$, （勾股定理）

$\therefore$ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$。

根据三角函数定义得：

$$\sin A=\frac{4}{\sqrt{41}};\quad \cos A=\frac{5}{\sqrt{41}};$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{4}{5};\quad \operatorname{ctg} A=\frac{5}{4}。$$

注意 1. ∠A的正弦、余弦等，可以記为sin∠A或sin A或sin BAC。余弦的記法也是这样。

2. 在 sin A、cos A等等中，角 A 是自变数，而 sin A、cos A等等是∠A的三角函数（即函数）。正如在$\frac{x}{2}$、$3x^2$等等中，x 是自变数，而$\frac{x}{2}$、$3x^2$等是 x 的函数一样。在代数里，我們学过已知 x 值，求它的函数值的方法。以后我們要講，已知∠A的度数（如 ∠A＝10°、20° ……），求∠A的函数（如sin 10°，cos 20°，……）的方法。本节例一，就是求 53°角的三角函数的一种方法。

習 題 1

1. 就例 1 的已知条件和圖形，求∠B 的四个三角函数。
2. 在 △ABC 中，∠C是直角，a＝5，b＝12，求∠A的四个三角函数。
3. 一等腰直角三角形的腰長 4 厘米，求底角的四个三角函数。
4. 圖中設 ED⊥AB，BC⊥AC，用 AD、DB、AE、ED、EB、EC、BC 表示下面各三角函数：

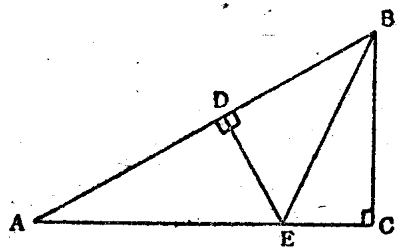
   sinEAD; tgEAD; cosDBE; ctg DBE; sin BED;
   tgBED; cosDEA; ctg DEA; cosBEC; ctg BEC;
   sinEBC; cosEBC。

5. 在上题的圖中，下列各比表示什么角的正弦、余弦、正切或余切

$\frac{AD}{ED}$； $\frac{ED}{BD}$； $\frac{DE}{BE}$；

$\frac{DB}{BE}$； $\frac{DE}{AE}$； $\frac{AD}{AE}$；

$\frac{EC}{BC}$； $\frac{BC}{EC}$。



（第4題）

6. 在△ABC中，∠C是直角，且 $a=5$ 寸，$b=12$ 寸，求∠A的四个三角函数。与2題的結果是否相同？由此說明銳角的三角函数与測量边長的單位有无关系？

3. 余角的三角函数　根据三角函数的定义，由圖1得知：

因为
$$\sin A=\frac{a}{c},\quad \cos B=\frac{a}{c};$$
$$\cos A=\frac{b}{c},\quad \sin B=\frac{b}{c};$$
$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b},\quad \operatorname{ctg} B=\frac{a}{b};$$
$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a},\quad \operatorname{tg} B=\frac{b}{a}。$$

所以
$$\sin A=\cos B,$$
$$\cos A=\sin B,$$
$$\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg} B,$$
$$\operatorname{ctg} A=\operatorname{tg} B。$$

又因为 $A+B=90°$，即 $B=90°-A$，上式可以写成：

$$\left.\begin{array}{l}\sin A=\cos(90°-A)\\ \cos A=\sin(90°-A)\\ \operatorname{tg} A=\operatorname{ctg}(90°-A)\\ \operatorname{ctg} A=\operatorname{tg}(90°-A)\end{array}\right\}\text{叫做余角函数公式}$$

由于$90°-A$就是角A的余角，因此上述结果可以这样説：一个銳角的正弦、余弦、正切和余切，分别等于它的余角的余弦、正弦、余切和正切。如果我們把正弦和余弦称为互余的函数（就是：正弦的余函数是余弦，余弦的余函数是正弦），正切和余切也称为互余的函数（就是：正切的余函数是余切，余切的余函数是正切），那末上列的四个公式可以用一句話来概括：**一个銳角的三角函数等于他的余角的余函数。**

根据以上公式，我們計算三角函数时可以得到很大的方便。例如，我們已求得30°角的各个三角函数是：$\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3}$，那末60°的三角函数就不必再計算了。因为60°是30°的余角，所以

$$\sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60°=\sin 30°=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60°=\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60°=\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

注意 因为三角中的公式較多，其中有大部分是可以用一句話来概括的，記忆这一句話比較方便，只要弄清这句話中的特殊名詞的含意就行了。如在上述的那句話中，只要弄清什么是余角，余角怎样表示，各个三角函数的余函数是什么，就可以根据这句話写出余角函数公式来。

4. 特殊角的三角函数

（1）什么是特殊角 因为在应用中，常遇到0°角，30°角，45°角，60°角，所以把它們叫做特殊角。

（2）特殊角的三角函数的求法 求任何一个銳角的三角函数，本来不需要計算只要查表就行（查的方法以后講），不过特

殊角的三角函数是經常要用的，所以要掌握它們的求法，应用起来才方便。

① 30° 的三角函数：作 $\angle A=30°$ 的直角三角形 ABC（如圖 7），由几何定理（平面几何第 61 节）知道 AB＝2BC。

設 BC＝1，則 AB＝2，

根据勾股定理：

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}$$

$=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$。根据三角函数定义可知：

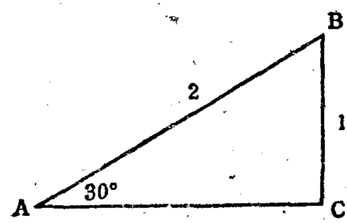


圖 7

$$\sin 30°=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{2},$$

$$\cos 30°=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30°=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30°=\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}。$$

注意 1. 作圖的方法是这样：作 $BC\perp AC$，以 B 为圓心，以 2BC 为半徑画弧交 AC 于 A，連結 AB，則根据几何定理知道，BC 的对角就是 30°。又法：先作等边三角形 ABC（圖 8），再作 BC 上的高 AD，那末 $\angle B=\angle BAC=\angle C=60°$，$\angle BAD=30°$。

2. 由于三角函数与测量边長的單位无关，所以，无論 BC 有多長，都可以假設它是 1（就是 1 个單位）。

② 45° 的三角函数：作等腰直角三角形 ABC（圖 9），則 AC＝BC，$\angle A=\angle B=45°$。設 AC＝BC＝1，

則 $$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}。$$

所以 $$\sin 45°=\frac{BC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45°=\frac{AC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

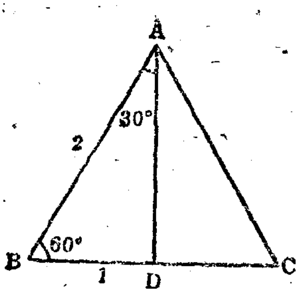


圖 8

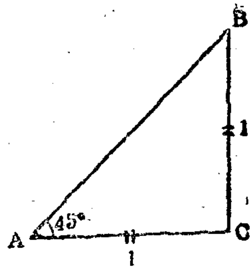


圖 9

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{1} = 1。$$

③ 60° 的三角函数：因为 60° 是 30° 的余角，根据余角函数公式，就可以得到：

$$\sin 60^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 60^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 60^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}。$$

注意 記忆特殊角的三角函数时，不要死記各个函数的値，最好記住求法。就是先記住圖 7 和圖 8（記圖 7 的方法是：30°的对边是 1；斜边是 2；邻边可記可不記，因为利用勾股定理可以立刻求出它来。这时另一个銳角就是60°。因此无論要求哪个三角函数，可以根据三角函数的定义立刻求得。記忆圖 8 时，只要記住两条直角边都是 1 就行了。这里要特別强調記住三角函数的定义），要用哪个函数时，隨便画出草圖，根据三角函数定义，从圖上立刻求出它来。

例 1　求 $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ 的值（$\sin^2 30^\circ$ 就是 $\sin 30^\circ$ 的平

方，也就是$\frac{1}{2}$的平方。$\cos^2 30^\circ$ 的意义也相同）。

解 $$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1。$$

例 2 已知A是直角三角形的一个銳角証明：

（1）$\frac{\cos A}{\sin A} = \operatorname{ctg} A$；　　（2）$\frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A$。

証明

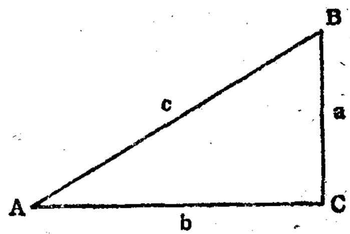


圖 10

（1）$$\because \quad \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}$$

$$= \frac{b}{c} \times \frac{c}{a} = \frac{b}{a},$$

而 $$\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a};$$

$$\therefore \quad \frac{\cos A}{\sin A} = \operatorname{ctg} A。$$

（2）$$\because \quad \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \div \frac{b}{c}$$

$$= \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} = \frac{a}{b}。$$

而 $$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b},$$

$$\therefore \quad \frac{\sin A}{\cos A} = \operatorname{tg} A。$$

注意 例 2 中的两个式子都是同角的函数关系式。在習题二中，还要再