普通高等教育"十五"国家级规划教材

大学数学教程

微积分

刘建亚 主编

刁在筠 许闻天 蒋晓芸 编

2

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学教程

微积分（二）

刘建亚　主　编

刁在筠　许闻天　蒋晓芸　编

本书配有磁盘，需要的读者请与多媒体阅览室（新馆 301 室）联系。

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分.2/刁在筠,许闻天,蒋晓芸编.—北京:高等教育出版社,2003.1

大学数学教程

ISBN 7-04-011691-X

Ⅰ.微… Ⅱ.①刁…②许…③蒋… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第096689号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100009	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2003年1月第1版
印　　张	17.5	**印　　次**	2003年3月第2次印刷
字　　数	320 000	**定　　价**	20.60元(含软盘)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

大学数学教程

丛书

主　编　刘建亚

副主编　陈君华　吴　臻

编　委（按姓氏笔画排列）

刁在筠　包芳勋　许闻天

吕　同　胡发胜　秦　静

傅国华　蒋晓芸　潘建勋

前　　言

按传统的观点，在大学里除数学类各专业外，数学只是理、工等类专业学生的基础课，是学习后续课程和解决某些实际问题的工具．随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高，数学已渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域，人们越来越深刻认识到过去看法的不足，越来越深刻认识到数学教育在高等教育中的重要性．数学不仅是基础、是工具，更重要的，数学是探索物质世界运动机理的重要手段，是一种思维模式——数学思维模式，数学教育是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体，是开发大学生潜在能动性和创造力的重要基础；同时，数学又是一种文化——数学文化，它显示着千百年来人类文化的缩微景象，也是当代大学生必须具备的文化修养之一．因此大学数学不仅是理、工类学生应该学习，而且也是大学各类专业都应该学习的课程，数学教育是大学生素质教育的重要组成部分．当然，不同类型专业对数学的要求和内容会有所不同．

为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的形势和实行学分制的需要，满足新时期高等教育人才培养拓宽口径、增强适应性对数学教育的要求，山东大学数学与系统科学学院从2000年开始按照教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求，在学院领导的亲自参与下，组织部分教师对非数学类专业大学数学的课程体系进行了认真深入的研究和认证．针对大学数学是高校非数学类专业所有大学生应当具有的素质，又考虑到不同专业的要求深浅不同、内容多少各异的实际情况，制订了适应这种情况的新课程体系．新课程体系的主要特点是采取平台加模块的结构，整个大学数学的课程共分三个平台，不同平台反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别要求，体现数学知识结构和大学生认知结构的统一．鉴于人类认识是从感性到理性，由易到难，由浅入深的，因此第一平台（包括微积分（一）、线性代数和概率统计）是体现高等数学的普及和基础，体现所有各专业应当具有的数学素质教育，主要侧重基本概念和基本方法，加强基本运算，努力渗透基本数学思想；第二平台是对第一平台基本概念的加深和知识方法的拓宽，在本平台中还适当体现出数学理论的系统性和严谨性；第三平台（包括数学建模、数值分析、数理方程、复变函数和积分变换、运筹学等）则是为满足某些对数学知识和方法有特殊要求的专业而设置．各平台的教学内容由浅入深，反映不同专业对数学知识和内容的不同要求；各平台

的内容又采取模块组合的方式，模块间相对独立，各专业亦可根据本专业的需要，选用不同的模块组合，这样就使得新的课程体系具有更大的灵活性，能够满足不同层次、不同要求的专业对数学教学的需求．另外，新课程体系还将利用计算机解决数学问题的数学实验融入其中，做到理论和实践的有机结合．

山东大学教务处对新课程体系给予充分的肯定，并大力支持按新课程体系编写相应的教材．在我们完成初稿之后，教务处按排几个专业的学生先行试用，并在此基础上加以修改完善．目前，已完成了前两个平台共计四册的教材编写和修改．其中，微积分为二册，分属二个平台；线性代数和概率统计各一册．这套教材的特点除上述平台加模块的结构外，还有以下特色：

1．内容少而精，体现素质教育，突出数学思想．我们重点介绍高等数学中的基本概念和基本方法；从培养读者的能力和提高素质的着眼点，有选择地保留了部分定理、性质的证明，对那些用类似的技巧方法，或者读者举一反三可以理解或自学的证明部分省略或简化处理．

2．扩大了读者的知识面．我们将各专业不同需求的数学内容融进了一套教材中．主要的做法是：用“＊”号标明不同层次对数学的要求；从不同的学科例题分析中引进基本概念；阐述基本内容在各主要学科中的应用；习题中涉及多学科．这使不同专业的读者可以了解到高等数学中的相关知识在其他专业中的应用．这在知识经济时代是非常必要的．另一方面，可以满足目前多数读者希望跨学科获取更多知识的愿望．如在数学要求较低专业学习的读者希望学习更多数学知识（如跨学科考研或工作需要）时，可以从同一本书中按“＊”号的标示获取．当然，教师在授课时可按本专业的要求有选择地使用．

3．与中学知识相衔接，易教易学．对一些较困难，不易被刚进大学的学生所接受的内容，如极限的“ε-N”，“ε-δ”定义，以及部分不影响整体结构的较困难内容如泰勒中值定理等均放入第二平台．希望能使读者对数学增添兴趣，提高学习的自信心．

4．总学时减少，可在原定学时中学习更多、更新的知识．

5．各节后的习题配置除基本练习外，还有部分综合练习题，以提高读者分析问题、解决问题的能力．综合练习题多置于每节习题后部且配以“＊”号标示．

6．增添了利用计算机解决数学问题的内容，在每章后均有解决本章主题问题的 MATLAB 程序和例题演示．书后附有通用数学软件 MATLAB 简介．并附有软盘．

7．本书附有在数学发展史中一些著名数学家的简介．从这些数学家辉煌成就背后的艰苦奋斗故事中，希望可以激发读者学习的热情和兴趣．

本套书由山东大学数学与系统科学学院组织部分有较高水平和丰富教学经验的教师集体编写，最后聘请有关专家审定. 在长达近两年的编写过程中，学院领导给予了极大的关注、支持和具体指导，为此曾多次召开各种类型的会议反复论证，几易手稿.

大学数学教程的主编是刘建亚. 微积分部分由刁在筠（第1,2,10,11,12章）、许闻天（第3,4,6,8,9章）、蒋晓芸（第5,7章及第9章部分）编写，由刁在筠完成统稿及改写工作；陈绍著审定；各册的数学实验内容及所附教学软盘由傅国华编写和制作；数学家简介由包芳勋编写.

本套教材作为普通高等教育“十五”国家级重点教材正式出版，是教育改革的产物. 在此，我们感谢山东大学教务处、山东大学出版基金委、山东大学数学院领导对改革和教材出版的鼎力支持，感谢仪洪勋、江守礼教授对我们的鼓励和帮助. 我们特别感谢高等教育出版社，由于他们的指导和帮助才使本书顺利与读者见面.

新时期大学数学的教学改革是一项非常紧迫、非常重要，也是非常艰巨的工作. 限于编者水平，本书肯定会有许多不足和缺点，乃至问题，恳请读者批评指正.

编　者

2002 年 4 月

微积分(一)“ * ”号的使用说明：

1. 不加“ * ”号内容是最基本的，建议各专业均采用；

2. 加一个“ * ”号内容为对数学要求中等及较高专业所需，如经济、生化类，理、工科各专业等；

3. 加二个“ * * ”号内容仅对数学要求较高专业所需，如理、工科各专业等.

微积分(二)“ * ”号的使用说明：

1. 不加“ * ”号内容为对数学要求中等及较高专业所需；

2. 加一个“ * ”号内容仅为对数学要求较高专业所需，如理、工科各专业等.

目　　录

第8章 分析基础

——再论极限

我们已经知道，连续、导数、定积分等微积分学的基本概念都是建立在极限的基础上的，因此，极限的概念是微积分学的基础. 在第1章“函数、极限和连续”中，为了易于理解和接受，极限概念是以描述的方式给出了其“粗略”的“定义”，这种“定义”比较直观，易于理解，然而是不严格的，不能用它进行精确的量的分析，也不能对有关结论给出严格的论证. 本章将给出极限的精确定义，并在此基础上给出一些重要结论的严格证明.

本章的后两节分别给出作为第3章中值定理推广的一元函数的泰勒中值定理及其应用和二元函数的泰勒定理.

§8.1 数列极限的 ε-N 定义

1. 数列极限的精确定义

在第1章中我们已经知道，所谓数列 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时以确定的常数 a 为极限，是指“当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于常数 a”. 如何对其定量刻画是精确定义极限概念的关键. 显然，“x_n 无限趋近于常数 a”，从数轴上看，就是动点 x_n 无限靠近定点 a，也就是距离 $|x_n-a|$ 可以任意小. 于是极限 $x_n\to a$ 就是“当 n 充分大时，$|x_n-a|$ 可以任意小，要多么小就有多么小”，亦即“要 $|x_n-a|$ 任意小，只需 n 增大到一定程度”. 数列极限的精确定义，就是要将这句话表达得确切. 先看下面的例子.

例 8.1.1 考察数列 $\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\}$.

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\cdots,$$

当 $n\to\infty$ 时，它以零为极限，即要使 $|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}$ 多么小，只需 n 增大到一定程度，就能实现.

例如，要使 $|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<0.1$，只需 $n>\frac{1}{0.1}=10$；

要使$|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<0.01$,只需$n>\frac{1}{0.01}=100$;要使$|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<0.0003$,则只需$n>\frac{1}{0.0003}=3333\frac{1}{3}$,只需取$n$是大于3333的自然数即可. 为了表示$|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0|$可以任意小,设$\varepsilon$是一个任意给定的可以充分小的正数,一般地提出要使

$$|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon \tag{8.1.1}$$

是否可以做到呢?回答是肯定的,因为只要$n>\frac{1}{\varepsilon}$,即n取大于$\frac{1}{\varepsilon}$的自然数. 例如我们用$[\frac{1}{\varepsilon}]$代表不超过$\frac{1}{\varepsilon}$这个数的最大整数,由于比$N=[\frac{1}{\varepsilon}]$大的正整数$n$显然比$\frac{1}{\varepsilon}$大,因此只需取$n>N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,就可以使(8.1.1)式成立.

上面的例子可以看到,"$|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}$要多么小,只需$n$增大到一定程度后,就能够多么小"这句话的精确表达应该是:对于任意给定的正数ε(它标志着"要多么小"的要求),总可以找到正整数N(它标志着n"增大的程度"),使得当$n>N$,就有

$$|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$$

(即能达到所提出的"要多么小"的要求).

这里所找到的正整数N(例如$[\frac{1}{\varepsilon}]$,或比$[\frac{1}{\varepsilon}]$大的自然数),其大小显然是依赖于给定的正数ε的,如在例8.1.1中,当取$\varepsilon=0.1,0.01,0.0003$时,对应的正整数$N$分别可取10,100,3333. 一般说来,$\varepsilon$给得越小,对应的正整数$N$就越大,因此常常记$N=N_\varepsilon$来表明$N$对$\varepsilon$的依赖性.

由例8.1.1的分析,对于一般的数列$\{x_n\}$,设其极限为a,可以给出下面的精确定义:

定义8.1.1 **设$\{x_n\}$是一个数列,a是一个常数,如果对于任意给定的正数ε,总可以找到正整数$N=N_\varepsilon$,使得当$n>N_\varepsilon$时,恒有**

$$|x_n-a|<\varepsilon \tag{8.1.2}$$

成立,则称数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时以a为极限,或说数列$\{x_n\}$收敛于a,并且记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a \quad (n\to\infty).$$

如果数列$\{x_n\}$没有极限,则称数列$\{x_n\}$发散.

定义8.1.1,亦可简写成:

定义8.1.1′ **如果$\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数N_ε,当$n>N_\varepsilon$时,恒有**

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

从几何上看,数列$\{x_n\}$对应于数轴上一串点,而(8.1.2)表示点x_n与点a的距离小于 ε.任意给定了正数 ε,我们可在数轴上作出一个以点 a 为中心而长为 2ε 的开区间

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon,$$

即$|x - a| < \varepsilon$(通常称它为点 a 的ε- 邻域).当 $n > N$ 时(8.1.2)式成立,即表示:下标大于 N 的一切点x_n,都将进入点 a 的ε- 邻域,而在该邻域之外,最多是前 N 项(图 8.1.1).

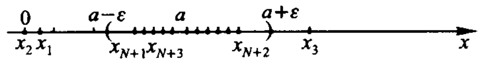

图 8.1.1

假如数列$\{x_n\}$是某一个量的一串近似值,a 是这个量的精确值,则$|x_n - a|$就表示第 n 个近似值的绝对误差,而 $n > N$ 时(8.1.2)式成立则表示:到第 N 步后,绝对误差就永远小于 ε 了.

有了数列极限的精确定义,我们可以明确地判断 a 是不是数列$\{x_n\}$的极限.在论证中,通常采用倒推法,即由$|x_n - a| < \varepsilon$成立时n所满足的条件,确定出所要求的 N_ε,再由此 ε 及N_ε,根据极限定义即可证明.

例 8.1.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0 \quad (0 < p < 1)$.

分析 $\forall \varepsilon > 0$,要找正整数 $N = N_\varepsilon$,使 $n > N$ 时,有

$$|p^n - 0| < \varepsilon$$

成立,即 $p^n < \varepsilon$.两端取对数,得 $n\ln p < \ln \varepsilon$,因为$0 < p < 1$,所以 $\ln p < 0$,因此 $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln p}$,可见应取 $N \geqslant \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln p}\right]$.

证 $\forall \varepsilon > 0$,取正整数 $N = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln p}\right]$,

则当 $n > N$ 时,有 $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln p}$, 即 $n\ln p < \ln \varepsilon$,

从而 $p^n < \varepsilon$, 故 $|p^n - 0| < \varepsilon$.

由定义 8.1.1 知 $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$.

例 8.1.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a > 1)$.

分析 $\forall \varepsilon > 0$,要找正整数 $N = N_\varepsilon$,使 $n > N$ 时,有

$$|a^{\frac{1}{n}} - 1| = a^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon, \text{即 } a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$$

成立.取对数得 $\frac{1}{n}\ln a < \ln(1+\varepsilon)$,即　$n > \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}$,可见应取

$$N \geqslant \left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right].$$

证　$\forall \varepsilon > 0$,取正整数 $N = \left[\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$,当 $n > N$ 时,有

$$n > \frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}, \text{即}\quad \frac{1}{n}\ln a < \ln(1+\varepsilon),$$

从而　$a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$,　即　$|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon$.因此由定义 8.1.1 知

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (a > 1).$$

当直接由 $|x_n - a| < \varepsilon$ 确定 N 比较困难时,可将 $|x_n - a|$ 适当放大成简单形式,再使其小于 ε 而确定 N.

例 8.1.4　证明　$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^3 + 1} = 0.$

分析　$\forall \varepsilon > 0$,欲找正整数 N,使 $n > N$ 时,有

$$\left|\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^3 + 1} - 0\right| = \frac{n^2}{(n+1)^3 + 1} < \varepsilon.$$

直接确定满足上式的 N 比较困难,于是可先将关系式 $\frac{n^2}{(n+1)^3 + 1}$ 适当放大后再讨论,即有

$$\frac{n^2}{(n+1)^3 + 1} < \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

于是可取　$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ 即可.

证　$\forall \varepsilon > 0$,取　$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$,当 $n > N$ 时,有

$$\left|\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^3 + 1} - 0\right| = \frac{n^2}{(n+1)^3 + 1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

于是由定义 8.1.1,有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n+1)^3 + 1} = 0.$$

2. 数列极限的性质

定理 8.1.1(极限的惟一性)　收敛数列 $\{x_n\}$ 的极限必惟一.

即如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$,$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = B$,则 $A = B$.

证　用反证法,假定 $A \neq B$,不妨设 $A > B$.令 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(A - B) > 0$,由

于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$，所以存在 N_1 和 N_2，使 $n > N_1$ 时，恒有

$$|x_n - A| < \varepsilon_0 = \frac{A-B}{2} \tag{8.1.3}$$

成立．而 $n > N_2$ 时，恒有

$$|x_n - B| < \varepsilon_0 = \frac{A-B}{2} \tag{8.1.4}$$

成立．取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，由(8.1.3)和(8.1.4)式，可得

$$\frac{A+B}{2} = A - \frac{A-B}{2} < x_n < B + \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2}.$$

这是矛盾的，因此一定有 $A = B$．

定理 8.1.2(数列收敛的必要条件)　收敛数列必有界．

证明数列 $\{x_n\}$ 有界，即找一个正数 M，使对一切 n，都有 $|x_n| < M$．

证　设数列 $\{x_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，由定义 8.1.1，对于 $\varepsilon = 1$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon = 1$，又 $|x_n| - |a| < |x_n - a|$，故有

$$|x_n| < |a| + 1$$

成立．

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a| + 1\}$，则对所有的 n，都有 $|x_n| \leqslant M$．

推论　无界数列必发散．

例如自然数列 $1, 2, \cdots, n, \cdots$ 是无界的，因此它是发散数列．但是，有界数列并不一定是收敛的，例如 $x_n = (-1)^n$ 有界却是发散的．

定理 8.1.3(极限的保序性)　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，且 $A > B$，则存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $x_n > y_n$．

证　由定义 8.1.1，对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}(A - B) > 0$，$\exists N_1$ 和 N_2，

当 $n > N_1$ 时，有 $|x_n - A| < \frac{1}{2}(A - B)$，

当 $n > N_2$ 时，有 $|y_n - B| < \frac{1}{2}(A - B)$，

取 $N = \max(N_1, N_2)$，则当 $n > N$ 时，

$$x_n > A - \frac{1}{2}(A - B) = B + \frac{1}{2}(A - B) > y_n.$$

推论　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，若存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $x_n > y_n$(或 $x_n \geqslant y_n$)成立，则有 $A \geqslant B$．

证　用反证法，若 $A < B$，则由定理 8.1.3 知，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有 $x_n < y_n$，与假设矛盾，故有 $A \geqslant B$．

定理 8.1.4(极限的保号性)　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 且 $A > 0$，则存在正整数 N，

当 $n > N$ 时,有 $x_n > 0$.

推论　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$**,若存在正整数** N**,当** $n > N$ **时,恒有** $x_n > 0$**,则有** $A \geqslant 0$.

定理 8.1.4 及推论由定理 8.1.3 即可证明.

定理 8.1.5(数列极限的夹逼定理)　设数列 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ **满足条件**

$1°$　**存在正整数** N_0**,当** $n > N_0$ **时,有** $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$;

$2°$　$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$,

则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

证　由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$,故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1$ 和 N_2,当 $n > N_1$ 时,$A - \varepsilon < y_n$,当 $n > N_2$ 时,$z_n < A + \varepsilon$,于是取 $N = \max(N_0, N_1, N_2)$,由条件 $1°$,即有 $n > N$ 时,有 $A - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < A + \varepsilon$,于是 $|x_n - A| < \varepsilon$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

夹逼定理既可用来判断极限存在,又可用来求极限,因此在极限的理论和计算中都有重要意义.

例 8.1.5　求　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3+1} + \dfrac{2}{n^3+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^3+n}\right)$.

解　设　$S_n = \dfrac{1}{n^3+1} + \dfrac{2}{n^3+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^3+n}$,将分母皆取为 n^3+1,则原式放大,皆取为 n^3+n,原式缩小,于是有

$$\frac{n(n+1)}{2(n^3+n)} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^3+n} < S_n < \frac{1+2+\cdots+n}{n^3+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^3+1)},$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^3+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^3+1)} = 0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0.$$

习　题　8.1

1. 由定义证明:

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$;　　(2)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2} = 0$;

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$;　　(4)　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+5}{n^2+n+1}=1$.

2. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.并举例说明反过来未必成立.

3. 若数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $|x_{n+1}|\leqslant K|x_n|\quad(n=1,2,3,\cdots)$,其中 $0<K<1$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

4. 若数列 $\{x_n\}$ 有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

6. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$.

*7. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

*8. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1x^n\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$.

§8.2 函数极限的精确定义

本节将给出自变量 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$ 两种情况下,函数极限的精确定义,并建立函数极限与数列极限的关系,进而再论证函数极限的某些性质.

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

可以用 $x\to+\infty$ 作为代表,当 $x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$ 的情况是完全类似的.

函数极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (或 $f(x)\to A,x\to+\infty$)与数列极限非常类似,不同点仅在于,前者的自变量 x 是连续变化的,而后者的自变量 n 只取离散的正整数值,因此可以仿照数列极限的定义给出这类函数极限的精确定义.

定义 8.2.1 **设函数 $f(x)$ 在 $x>a$ 上有定义,A 是常数,$\forall\varepsilon>0$,$\exists M>0$,使得当 $x>M$ 时,恒有**

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{8.2.1}$$

成立,则称函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时以 A 为极限,并记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\quad 或\quad f(x)\to A\quad(x\to+\infty).$$

同样可定义 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,请读者自己完成.

函数极限的 ε-M 定义的几何意义是:作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$,则总