Gailülun yu Shuli Tongji

财经类高等数学系列教材

概率论与数理统计

李亚琼　主编

湖南大学出版社

财经类高等数学系列教材

概率论与数理统计

主　编　李亚琼
副主编　谭德俊　蔡晓春

湖南大学出版社
2003年·长沙

内　容　提　要

本书根据高等学校财经类专业核心课程教学大纲的要求编写.主要内容包括概率论、数理统计、随机过程初步三部分.每章都有大量的例题以及习题,并且许多例题都与经济专业相关.

本书可作为高等学校财经类本科的教材使用,也可供从事财经、管理等类的科研及教学人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/李亚琼主编.—长沙:湖南大学出版社,2003.7

ISBN 7—81053—670—2

Ⅰ.概...　Ⅱ.李...　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 056041 号

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

李亚琼　主编

□责任编辑　厉　亚
□特约编辑　彭亚新
□封面设计　张　毅
□出版发行　湖南大学出版社
社址　长沙市岳麓山　邮码　410082
电话　0731—8821691　0731—8821315
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　湖南大学印刷厂

□开本　850×1168　32 开　□印张　15　□字数　350 千
□版次　2003 年 8 月第 1 版　□2003 年 8 月第 1 次印刷
□印数　1～5 000 册
□书号　ISBN 7—81053—670—2/O·49
□定价　21.00 元

财经类高等数学系列教材

总主编 苏 醒 胡宗义

《微积分》 主编 **李建平**
《线性代数》 主编 **刘再华**
《概率论与数理统计》 主编 **李亚琼**

编写说明

随着我国社会主义经济建设的不断发展和我国经济体制改革的日益深入，随着社会主义市场经济体制的建立和日臻完善和经济管理水平的逐步提高，经济决策的科学化、计量化和经济理论的数学化已成必然趋势．经济学（至少是实证经济学）的发展，已经与数学密不可分了．因而经济数学方法的研究和应用越来越受到广大经济理论教学、研究人员和实际工作者的重视．未来社会对高等财经人才的数学素质和专业水平的要求也将愈来愈高．为此，很多院校加强了数量经济学方面的研究和教学工作，相继增开了一些有关的必修与选修课程，以适应未来社会发展对于高等财经人才的需要．

《财经类高等数学系列教材》根据《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》的要求编写，同时吸取了《经济数学基础》教材和以往编写的《财经类高等数学系列教材》的优点．这套教材力求更进一步体现高等数学作为一门基础理论课程的功能，以提高高等学校财经类专业学生的数学素质为目的．本套教材在体系结构上力求更为科学、合理；在内容上着力更广泛、更密切地与经济实际相结合，着力于培养和提高财经类专业学生应用经济数学方法解决经济问题的能力．

为方便读者理解和领会一些基本概念，我们对概念的现实背景和实际含义予以说明和解释．对于一些较为冗繁的论证过程，我们予以省略而直接引用结论．考虑到学科的科学性和系统性，以及教学上的灵活性与适应性，同时也为后续课程和知识的

拓广奠定基础，我们对有些章节加了“*”号，这些加“*”号的章节可供教学时灵活掌握(加“*”号章节的略讲，不会影响下一章节的学习).每章末都配备了一定数量的习题，以供学生练习.

《财经类高等数学系列教材》包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》三个分册.财经类高等数学系列教材由苏醒教授、胡宗义教授任主编，由李建平副教授、刘再华副教授、李亚琼副教授分别任分册主编.

《概率论与数理统计》分册由李亚琼(1、2、4、10章)、苏醒(3章)、谭德俊(5、6、7章)、蔡晓春(8、9章)编写.

这套《财经类高等数学系列教材》的出版，得到了湖南大学教务处、数学与计量经济学院和湖南大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心感谢.

《财经类高等数学系列教材》

编写组

2003年7月

目　次

第一章　概率论的基本概念

当我们多次观察自然现象和社会现象后，会发现许多现象在一定条件下必然会发生. 例如，在没有外力作用下作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动. 又如在标准大气压下，水加热到 100 ℃时必然会沸腾，等等，这类现象称为**确定性现象**.

但是在自然现象和社会现象中也还广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象，例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么；用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置. 这类现象，在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果，这种现象我们称之为**不确定现象**. 但人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果都呈现出某种规律性. 例如，多次重复抛一枚硬币得到正面朝上大致有一半，同一门炮射击同一目标的弹着点按照一定规律分布等. 这种不确定现象在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是我们今后所说的**统计规律性**.

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，我们称之为**随机现象**. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

第一节 随机试验

在这里我们把对自然现象的一次观察或进行一次科学试验统称为一个**试验**.下面给出一些实验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H,反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H,反面 T 出现的情况.

E_3:将一枚硬币抛掷三次,观察出现正面的次数.

E_4:抛一颗骰子,观察出现的点数.

E_5:记录某电话交换台一分钟内接到的呼叫次数.

E_6:在一批同型号灯泡中任意抽取一只测试它的寿命.

E_7:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

上面举出了七个试验的例子,它们有着共同的特点.例如,试验 E_1 有两种可能结果,出现 H 或者出现 T,但在抛掷之前不能确定出现 H 还是出现 T,这个试验可以在相同条件下重复地进行.又如试验 E_6,我们知道灯泡的寿命(以小时计)$t\geqslant 0$,但在测试之前不能确定它的寿命有多长.这一试验也可以在相同的条件下重复地进行.概括起来,这些试验具有以下的特点.

1.一个试验可以在相同条件下重复进行(**可重复性**).

2.每次试验的可能结果不止一个,但事先能明确试验的所有可能结果(**确定性**).

3.进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现(**随机性**).

在概率论中,我们将具有上述三个特点的试验称为**随机试验**,简称**试验**,用字母 E 表示.

第二节　样本空间　随机事件

一、随机事件

随机试验的每个可能的结果称为该试验的**随机事件**，简称为**事件**. 一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$来表示.

例如上述试验 E_1 中，“出现 H”这是试验 E_1 的一个可能结果，故它是 E_1 的一个随机事件. 在试验 E_4 中“出现的点数是偶数”及“出现的点数是 6 点”都是试验 E_4 的一个可能结果，故都是 E_4 的一个随机事件.

对于一个试验来说，在每次试验中必然要发生(出现)的结果称为此试验的**必然事件**，记为 Ω；在每次试验中必然不发生(出现)的结果称为此试验的**不可能事件**，记为 $\varnothing$. 例如，在试验中 E_4 中，“出现的点数小于 7”是一个必然事件，“出现的点数为 2.5”则是一个不可能事件.

二、样本空间

对试验 E，我们把其最简单的不能再分的事件称为该试验的**基本事件**. 由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**.

例如，在试验 E_4 中，“出现的点数为 i”($i=1,2,\cdots,6$)均为 E_4 的基本事件；而“出现的点数为偶数”为 E_4 的复合事件.

由所有基本事件组成的集合称为该试验的**样本空间**，记为 Ω，样本空间 Ω 中的元素称为**样本点**，用 ω 表示. 因而基本事件又称作样本点.

下面给出第一章第一节中试验 E_k($k=1,2,3,\cdots,7$)的样本空间 Ω_k：

$\Omega_1:\{H,T\}$；

$\Omega_2:\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$；

$\Omega_3:\{0,1,2,3\}$；

$\Omega_4:\{1,2,3,4,5,6\}$；

$\Omega_5:\{0,1,2,3,\cdots\}$，这个样本空间含有无穷多个样本点，但这些样本点可以依照某种次序排列出来，以后我们将称它的点数为可列个；

$\Omega_6:\{t\mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_7:\{(x,y)\mid T_o\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度. 并设这一地区的温度不会小于 T_0 也不会大于 T_1.

Ω_6 与 Ω_7 这两个样本空间都包含有无穷多个样本点，它们充满一个区间，不是一个可列集.

注意　样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 例如，在 E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币连抛三次，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样.

我们也可将随机事件定义为样本点的某个集合，称某事件发生当且仅当它所包含的某一个样本点出现.

我们把样本空间 Ω 也作为一个事件，因为在每次试验中必然出现 Ω 中的某个样本点，也即 Ω 必然发生，所以常称样本空间 Ω 为必然事件. 必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 可以说不是随机事件但为了今后研究的方便，我们还是把必然事件与不可能事件作为随机事件的两个极端情形来处理.

在今后讨论中，经常把样本空间认为是预先给定的，这是必然的抽象，这种抽象使我们能更好地把握随机现象的本质，而且得到的结果能广泛地应用. 事实上，一个样本空间可以概括各种实际内容大不相同的问题；例如只包含两个样本点的样本空间

既能作为掷硬币出现正,反面的模型,也能用于产品检验中出现"正品"及"废品",又能用于气象中"下雨"与"不下雨"以及公用事业排队现象中"有人排队"与"无人排队"等等. 尽管问题的实际内容如此不同,但有时却能归结为相同的概率模型.

只含有限个或可列无穷个样本点的样本空间称为**离散样本空间**. 对离散样本空间,它的任何子集都是事件.

三、事件间的关系与运算

在一个样本空间中显然可以定义不止一个事件. 在实际问题中,往往要求我们同时考察几个在同样条件下的事件及它们之间的联系. 详细地分析事件之间的关系,将帮助我们更深刻地认识事件的本质.

下面就讨论事件间的关系及事件的运算. 事实上,由于引进了样本空间,并建立了事件和集合间的联系,于是事件的关系和运算完全可以运用集合间的关系和运算来处理.

设试验 E 的样本空间为 Ω,而 $A,B,A_k(k=1,2,3\cdots)$ 是 Ω 的子集.

1. 若 $A\subset B$,则称事件 B 包含事件 A,这指的是事件 A 发生必导致事件 B 发生.

若 $A\subset B$,且 $B\subset A$,即 $A=B$,则称事件 A 与事件 B 相等或称事件 A 与 B 等价.

2. 事件 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件. 当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A\cup B$ 发生.

类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件;称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

3. 事件 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件，当且仅当 A,B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生，$A\cap B$ 也记作 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

4. 事件 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，当且仅当 A 发生而 B 不发生时事件 $A-B$ 发生.

5. 若 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的，或互斥的. 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生.

基本事件是两两互不相容的.

6. 若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，又称事件 A 与事件 B 互为对立事件. 即对每次试验而言，事件 A,B 中必有一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A}=\Omega-A$.

用图 1-1～1-6 可直观地表示以上事件之间的关系与运算. 例如，在图 1-1 中矩形表示样本空间 Ω，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A. 又如在图 1-2 中矩形表示样本空间 Ω，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，而阴影部分表示和事件 $A\cup B$.

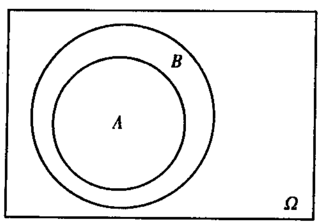

图 1-1　$A\subset B$

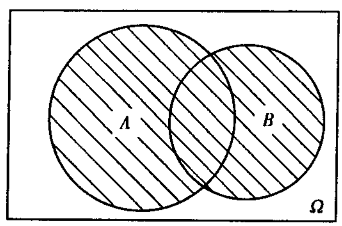

图 1-2　$A\cup B$

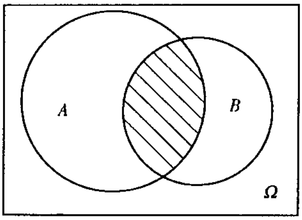

图 1-3 $A\cap B$

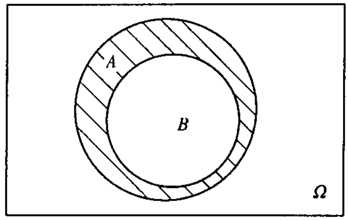

图 1-4(a) $A-B$

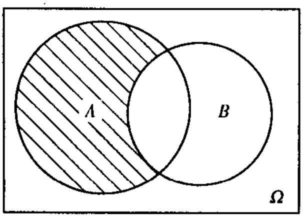

图 1-4(b) $A-B$

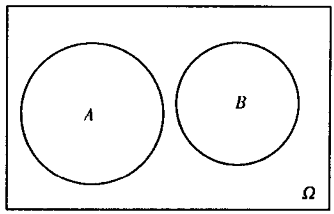

图 1-5 $A\cap B=\emptyset$

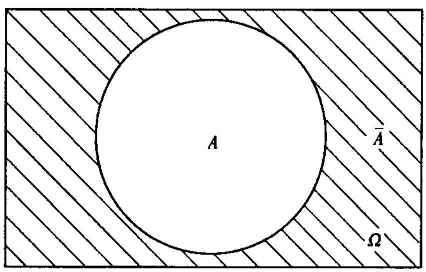

图 1-6 $\bar{A}$

四、事件的运算性质

随机事件的运算满足以下基本性质：

1. 交换律