中級物理实验

（一）

江苏师范学院

一九八一年八月

目　录

一、误差理论和数据处理　误1:1～52
二、声学实验　超2:1～42
1、超声基本物理量的测定
2、超声探伤技术
3、超声测液体中的比热比值 $\gamma\left(=\frac{C_p}{C_v}\right)$
4　声波导管
5、光测超声
附　录
三、光学实验　原3:1～22
1、摄谱仪的调节
2、光谱定性分析
3、钠光谱
四、真空技术　真4:1～13
1、真空镀膜
五、固体物理实验
1、半导体（Ge）霍尔效应的研究　固5:1～17
2、弱磁性物质磁化率的测定　固5:18～22
六、X射线技术　X6:1～21
1、德拜相　X6:22～34
2、X射线物相定性分析　X6:35～40
3、X射线晶体定向（劳厄相）　X6:41～50
七、微波技术　微7:1～19
1、同轴传输线　微7:20～26

2、速调管的工作特性和波导管的工作状态……微7:27～30
3、微波器件衰减的测试……微7:31～35
4、微波的传输与检测……微7:36～38
八、激光全息
1、激光全息照相……全8:1～8
九、磁共振技术
1、电子顺磁共振……磁9:1～11
十、核物理实验……核10:1～14
1、G－M计数管的特性测定……核10:15～20
2、β粒子在物质中的射程及其能量测定……核10:21～28
3、γ能谱测量……核10:29～38
4、Wilson云室技术……核10:39～54

一、测量误差及数据处理

物理学是一门实验和理论密切结合的科学。任何物理概念的提出，物理规律的发现都必须以严格的科学实验为基础，物理理论的是否正确必须通过实验和实践来检验，在近代物理学各个领域的发展中，实验更有着特殊重要的地位。

物理实验不仅是定性地观察现象的物理变化过程，更主要的是定量地测量某些物理量的大小和变化，从而了解和研究有关现象的变化规律和条件，深刻揭示其物理实质。所以通过实验我们不仅要学会正确选择，合理使用各种常用的物理仪器，比较系统地掌握各物理量测量的基本方法和进行物理实验和基本技能，还要学习误差理论，学会对所测的实验数据进行正确的分析和合理的处理，估计所得实验结果的可靠程度，从而总结归纳作出正确的理论分析，进一步深入理解和掌握客观事物的物理规律。

一、测量与误差

一切物理量的测量，可分为直接测量和间接测量两种。用一定的测量仪器经过比较就能直接得出结果的测量，叫做直接测量。例如用米尺测量长度，用停表测时间，用电流计测电流强度等。而另外有一些测量要先用仪器测出各有关的量，然后再根据一定的公式经过运算才能得到结果。或者说：被测量的量是由直接测量的量通过确定的函数关系求得的，称为间接测量。在物理实验中绝大多数是间接测量，如电阻率，光速，光谱波长，基本粒子的质量，寿命等。不论是直接测量还是间接测量，最终目的是希望得到物理量的真值。然而，实际的测量是通过一定的仪器，一定的方法，在一定的环境下由某一观测者去完成的，由于这几方面必然存在的某些不理想情况以致测量结果并非真值。亦即由于①测量仪器的精密度②测量方法的不完善③环境和人的种种影响，使测量值 x 和真值 a 之间存在一定偏离，这就称为测量误差 $\triangle$，$\triangle = x - a$。

实践表明，一切实际测量的结果都具有误差。那么，在真值不知道的情况下（假如真值已经知道，测量似乎就没有必要了），怎样确定测量结果是否可靠，如何表示测量结果的可靠值并作出恰当的评价，以及进一步寻找实验发生误差的根源，从而使测量结果足够准确等等，这些就是误差理论要讨论的问题。误差理论还可以帮助我们正确地组织实验和测量，合理地设计仪器、选用仪器及选定最佳测量方法，使测量的误差减至最小，获得最好的结果。由此可见，了解误差的性质，误差出现的规律，掌握数据处理的方法，对实验工作具有非常重要的意义，这是实验人员必须具备的基础知识。

根据误差的性质，可把测量误差分为三类：

(1) 系统误差：在一定条件下（指使用的仪器、方法、环境和观测的人一定），对同一量进行多次测量时（常称为等精度测量），测量误差的绝对值（即大小）和符号保持恒定，或者按照一定的规律变化的，这种测量误差称为系统误差。系统误差是带有系统性和方向性的误差。

系统误差可来源于仪器（未经校准，制造时的误差，安装不正常，元件的老化等）方法（公式的近似，操作的不当等）环境（温度，湿度，气压，电磁场的变化等）和观测者（某些习惯和偏向）。

系统误差的出现一般是有规律的，其产生的原因往往是可知或能掌握的。有些可以确定其符号和大小，对测定值加以修正，另一些系统误差的符号和大小都不知道，可以采取一些办法去抵消掉或估计其误差范围。系统误差经常是测定误差的重要组成部分，发现、消除和估计系统误差对于一切实验测量都是非常重要的。

(2) 随机误差（偶然误差）：在同一条件下多次重复测量同一物理量，每次测量结果都有些不同（在末位数字或末两位数字上不相同），它们分散在一定范围内，其误差符号时正时负，绝对值时大时小，

无确定的规律性。这种测量误差是随机性变化的，所以数学上称为随机误差。

随机误差的产生取决于测量过程中一系列随机因素的影响。所谓随机因素是指实验者不能加以严格控制的因素，如温度、湿度、空气振动及电子学测量时电波的随机干扰电源电压频率的变化，光学测量时的瞄准误差以及观测时不定的读数误差等等。随机误差尽管表面上看没有什么规律性，但根据大量测量实践知道在一定的观测条件下随机误差呈现着统计规律性。

偶然误差：在一定的观测条件下进行一系列的观测，如果观测的误差是随机误差，且误差的平均值随观测次数的增加而趋于零，则称这种误差为偶然误差。即误差平均值为零的随机误差称为偶然误差。

鉴于系统误差与偶然误差在实验的数据处理中的重要性，有必要着重的讨论一下，为此，我们对系统误差和偶然误差给出严格的定义。

设在相同的实验条件下，对某一物理量x进行等精度的（即指用同一仪器，同一方法，同一实验者）独立的n次测量，得到

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$$

则测定值的算术平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1}$$

当$n\to\infty$时，算术平均值$\bar{x}$的极限值称为测定值的期待值x_∞，即

$$x_\infty=\lim_{n\to\infty}\bar{x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{2}$$

则定义：

系统误差ε为测定值的期待值x_∞与测定值的真值a之差。即

$$\varepsilon=x_\infty-a \tag{3}$$

偶然误差 δ 为测量中各次测定值 x_i 与测定值的期待值 x_∞ 之差，即

$$\delta_i = x_i - x_\infty \qquad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (4)$$

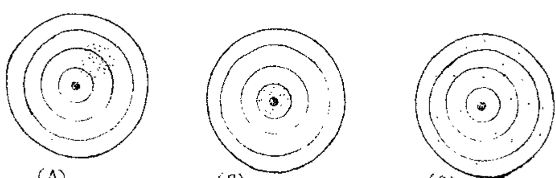
因此有

$$\varepsilon + \delta_i = x_i - a = \Delta_i \qquad (5)$$

Δ_i 等于系统误差和偶然误差之代数和，代表了每次的测量误差。

由(3)式可见系统误差 ε 越小，则测量结果越准确，因此系统误差可以衡量测定值的期待值与其真值符合的程度，因此，反映了测量的准确度。由(4)式可见偶然误差 δ_i 说明各次测量值与期待值的离散程度，测量数据越离散，则测量的精密度越低，反之越高。偶然误差表征了测量的精密度，即精密度是反映测量的重复性好坏。而由(5)式 Δ_i 是反映了系统误差与偶然误差的综合影响，因此它可用来衡量测量精确度。

由以上分析可知，在一组测量中存在着三种情况：(A)尽管精密度很高，但准确度不一定很好，因为这时可能存在着较大的系统误差。(B)反之，若准确度好，则精密度一定高。因为这时基本上消除了系统误差，而又由于偶然误差的统计性，多次测量正负误差相抵消，所以重复性一定是好的。(C)很不成功的测量，即准确度与精密度都较差。为了形象的说明 A B C 三种情形，我们用如下打靶的例子来作例子。



(A) (B) (C)

图 1

(3) 粗差或过失误差：

凡是在测量时不能用合理的客观条件来解释的那些误差称为

粗差或过失误差。粗差明显地歪曲了测量结果，含有粗差的测量值称为反常值。反常值是不可取的，应从结果中剔除。

具体的粗差有：

①测量错：不均匀读数（对数）按均匀读数来读，或标尺反读，如将 0.3 读成 $1-0.3=0.7$，

②记录错：如 396记为 369。

③运标错误。

④测量条件意外地突然改变，如测量时产生了机械冲击，外界振动等。

⑤操作不当，仪器有毛病与巨大误差等。

显然过失误差在实验中是不允许发生的，只要工作仔细，加强责任心，就可防止出现粗差。

防止出现粗差可用校核测量法，物理判别法和剔除粗差的 Grubbs标准。

二、几种常用的分布

在上述三种误差中，系统误差和过失误差通过精心设计，检查，鉴别是可以消除或降到最低程度。而偶然误差一般讲是无法消除的，所以由于实验技术水平的限制，即使系统误差及过失误差都已消除，也还总是存在着观测者尚不能完全控制的某些偶然因素，使得各次观测的实验条件发生变化，如观测时的环境条件，测量仪器的状况等等，从而造成测量结果的随机性。要对这些随机量进行处理和解释，就必须应用随机量数学—概率论、数理统计和随机过程理论。

1、一些概念：

① 物理量的实验观测值是随机变量，对于某一次测量，随机变量取该次测量的测量值。由于测量的偶然误差和物理现象本身随机性，一次测量得到的某个特定测得值是一个随机事件。

② 只能取有限个或可数个数值的随机变量叫离散型随机变

量，而可能值布满某个区间的随机变量叫连续型随机变量。

③只用一个独立的数值显然不能代表一个随机变量，即使列举出随机变量的全部可能值，仍然不能称是完全地描述了一个随机变量。要完整地掌握一个随机变量，必须了解它取各种可能值的概率，即必须了解随机变量的概率分布。

④分布函数 $P(x)$ 和概率函数 $p(x)$：

随机变量的概率分布可用分布函数 $P(x)$ 表示，分布函数在 x 处的值，等于随机变量 X 取值小于或等于 x 这样一个随机事件的概率，

$$P(x)\equiv P_r(X\leqslant x)$$

显然，任何一个分布函数都必须满足条件：

$$P(x=-\infty)=0\ ;\qquad P(x=\infty)=1$$

对离散型随机变量除了分布函数外，还可以用概率函数 $p(x)$ 来描述它的概率分布，概率函数在某一点 x 处的值等于随机变量 X 取值 x 的概率，即

$$p(x)\equiv P_r(X=x)$$

分布函数 $P(x)$ 和概率函数 $p(x)$ 之间的关系为：

$$P(x)=\sum_{x_i\leqslant x} p(x_i)$$

$$p(x_i)=P(x_i)-P(x_{i-1})$$

$$\sum_{x} p(x)=P(x=\infty)=1$$

⑤对于连续型随机变量 X，可以定义概率分布密度函数：

$$p(x)\equiv \frac{dP(x)}{dx}$$

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P_r(x<X\leqslant x+\Delta x)}{\Delta x}$$

概率密度函数在某一点的值是随机变量在该点的概率密度(由于概率不可能取负值，所以 dx 应为绝对值)。

概率密度函数和分布函数的关系为

$$P(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = P(x=\infty)=1,$$

概率密度函数曲线是一条连续曲线，密度曲线图在横轴上任一点 x' 左边曲线下的面积，就是分布函数在该点的值。

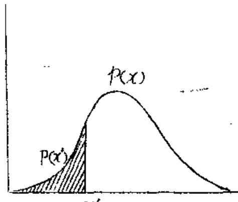


图 2

2、几种常用的分布：

(1) 二项式分布 (binominal distribution)

例如有一个由 N 个自旋为 1/2，磁矩为 μ_0 的粒子所组成的系统，假设此系统在一个外磁场 $\vec{B}$ 的作用下，因此每个磁矩可以"朝上"(与 $\vec{B}$ 平行)，也可以"朝下"(即与 $\vec{B}$ 反平行) 假设这系统处于平衡状态，又设对每个粒子而言磁矩朝上的几率为 p，则朝下的几率为 q，因为在外磁场作用下，它的磁矩只可能有两个取向：不是朝上，就是朝下。即 $p+q=1$。因此

$$q=1-p$$

在这 N 个磁矩中，有 n 个是朝上的磁矩，$n=0, 1, 2, \cdots N$。现在要问：对所有可能的 n 值来说，在 N 个磁矩中，有 n 个朝上的几率是多少？

显然 n 是个离散型随机变量，由上述例子可求得概率函数为

$$P(n)=C_N(n)\,p^n q^{N-n}$$

係数 $C_N(n)$ 为由 N 物件中取 n 件出来的不同组合数目。

$$C_N(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!} \tag{6}$$

则概率函数为

$$P(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-n} \tag{7}$$

对于给定的N值，$\overline{P}(n)$ 是为n的函数，而由数学的二项式定理：

$$(p+q)^N=\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n q^{N-m} \tag{8}$$

这两式比较，上式右边的每一项就是概率函数 $P(n)$，因此我们称(8)式 $P(n)$ 为二项式分布。

二项式分布最简单的例子就是掷骰子，由于一个骰子有六面，每次只能出现一面，即 $p=\frac{1}{6}$，因而 $q=\frac{5}{6}$，则在求掷N个骰子中有 n个同样的数（例为"2"）出现的几率 $P(n)$ 就是用二项式分布就能解决的。

(2) 泊松分布（Poisson distribution）

若有一个放射源在一定时间间隔T内的衰变数为n，当放射性核的平均寿命远大于T时，实验测得的衰变数在某一个平均值m左右摆动，设总的放射性核数为N，（$N\gg 1$）则记录到的衰变数就是这相互独立的核是否衰变的结果，而且在时间T内，每个核衰变的几率都是一样的，则各次测量到的衰变数n就服从泊松分布。

泊松分布是当二项式分布中$N\to\infty$时，且离散型随机变量n有一个期待值m时，即

$$m=\lim_{N\to\infty}Np \tag{9}$$

则 $$\lim_{N\to\infty}p(n)=\frac{m^n}{n!}e^{-m}=p(n;m) \tag{10}$$

泊松分布是一个常见的分布，物理实验中不少测量结果服从泊松分布，在工农业生产和日常生活中，也有不少随机变量服从泊松分布。例如：在一定的生产条件下，每批产品的废品数；同

一批稻谷每斤中的稗子数；正常情况下某一地区的死亡数和婴儿出生数等都近似地服从泊松分布。

因为 n 是离散型随机变量，所以泊松分布曲线是不连续的，只有一个峰，而且是左右不对称的。

(3) 正态分布—高斯分布 (Normal distribution—Gaussian distribution)

正态分布又叫高斯分布，是最常见的一种连续型分布。很多物理测量值都近似服从正态分布。例如工厂生产的一批螺柱直径的分布，一块田中某种农作物长度的分布，射手射击时砲弹在靶上命中点距靶心的分布等等，都近似地服从正态分布，在实验测量中的偶然误差往往是观测者还不能控制的大量偶然因素作用的结果。假定在系统误差及过失误差已消除的条件下，对某一物理量进行大量的独立的测量，通过实践的经验可以归纳出三点关于偶然误差的高斯定律。

① 绝对值小的误差比大的误差出现的机会多，即所谓单峰性。

② 绝对值相等，符号相反的误差出现的机会相等，即所谓对称性。

③ 超过某一限度的误差，实际上不出现，即所谓有界性。

由上述三点内容可以推导出正态分布的概率密度函数

$$p(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-h^2\Delta^2\right]$$

或　$h=\frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}$　得概率密度函数的又一种表式：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{12}$$

式中　$\sigma=\sqrt{\overline{(x-\bar{x})^2}}$

正态分布的概率密度曲线是单峰对称曲线，曲线峰值在随机变易的期待值处。由图可见 h 越大（σ 越小）$p(x)$ 的峰值越大，曲线衰减得越快，即曲线越尖锐，小误差出现的概率大，而大误差出现的概率小，反之，h 越小（σ 越大）曲线越平坦，大误差出现的概率和小误差出现的概率差不多，可见 h 作为测易精密度的标志，称之为精密度常数。

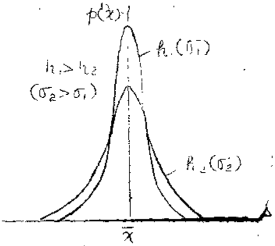


图 3

图 不同参数值的正态密度曲线

正态分布在误差理论中占有重要地位，这已被大易随机现象的中心极限定理所确定：若研究的随机变易可以表示成数目众多的相互独立的随机变易之和，而每个随机变易对总和的影响很小时，则该随机变易的分布必是正态的。

(4)指数分布——间隔分布（Interval distribution）

指数分布是实验物理工作常见的一种分布形式。如果单位时间内的事件数 n 服从泊松分布：

$$p(n)=\frac{\lambda^{n}}{n!}e^{-\lambda}$$

则两个事件之间的时间间隔 t 服从指数分布，即指数分布的概率密度函数为：

$$p(t)=\lambda e^{-\lambda t} \tag{13}$$

可以选取任意时刻作为零时刻，而事件时间 t 的分布都是同一个指数分布。

用计数器记录宇宙线粒子，若平均计数率为 m，实际计数率 n 服从泊松分布，即

$$p(n)=\frac{m^n}{n!}e^{-m}$$

而计数器的死时间可以忽略，则相邻两次计数之间的时间间隔t服从指数分布，即

$$p(t)=m\,e^{-mt}$$

三、测量精密度的估计

在同一条件下对某一物理量进行测量，得到一组测量值，通常称为等精度的测量列。测量列中各个测量值的可靠性是相同的，这一测量列中任一测定值与最可几值之间的偏差程度，称为测量的精密度。测量值的精密度常用三种不同方式来表示。

(1) 均方误差（标准误差）σ：

在一组等精度的测量中，若各次测量的偶然误差分别为δ_1，δ_2，……，δ_n，则误差同时出现在$\delta_1-\delta_1+d\delta_1$，$\delta_2-\delta_2+d\delta_2$，……，$\delta_n-\delta_n+d\delta_n$区间内的概率为

$$p=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\sum\delta_i^2}d\delta_1\,d\delta_2\cdots d\delta_n \tag{14}$$

如果参数h可有不同的选择，那末概率最大的是h的最佳值，即将上式对h微分，并令$\frac{dp}{dh}=0$，得

$$\frac{dp}{dh}=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2\sum\delta_i^2}\left(-2h\sum\delta_i^2\right)+e^{-h^2\sum\delta_i^2}\,n\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}=0,$$

$$n-2h^2\sum\delta_i^2=0$$

或

$$\frac{1}{\sqrt{2}h}=\sqrt{\frac{\sum\delta_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots\cdots+\delta_n^2}{n}}$$

我们取$\frac{1}{\sqrt{2}h}$作为测量列的精密度标志，并以σ表示，则

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}h}=\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2}{n}} \tag{15}$$

称为测量列的标准误差，它是各次测量值（偶然）误差平方

和的平均值的平方根，故又称均方误差。

因为σ不仅是一组测量中各个观测值的函数，而且对一组测量中的较大误差或较小误差感觉比较灵敏，它表示的是测量值分布的离散程度，标准误差越大表示测量值在期待值左右分布得愈宽，愈不集中．我国和很多国家科技报告中数据结果都用标准误差表之。

(2) 概率误差（或然误差）γ：

在一组测量列中若不计正负号，误差大于γ的测量值与误差小于γ的测量值将各占观测次数的一半。即测量的误差落在$\pm\gamma$区间内的概率和落在$\pm\gamma$区间之外的概率相等。它不能直接计算，是根据和均方误差的关系求出，即

$$\gamma = 0.6745\sigma \cong \frac{2}{3}\sigma \tag{16}$$

(3) 平均误差 η：

平均误差定义为各测量值误差的绝对值的算术平均值，即

$$\eta = \frac{\sum|\delta_i|}{n} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{17}$$

与σ的关系为

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma = 0.7979\sigma \cong \frac{4}{5}\sigma \tag{18}$$

应当指出，上述几种误差均为对一组测量中各测定值的可靠程度的估计，而不是对测量结果（算术平均值）的可靠程度的估计（这在后面会讲到）。为了加以区别，称上述误差为测量列的（标准、概率、平均）误差。

我们在实验中要求用均方误差或平均误差来表示测量的精密度。测量结果常用$\bar{x}\pm\sigma$（或$\bar{x}\pm\eta$）来表示；当σ（或η）越小，表示测量的精密度越好。

(4) 概率积分表：

在实验中常需要知道给定误差落在某一范围内的概率的大小，

从而判断误差是属于系统误差或偶然误差，或者判断用各种不同方法去测定同一物理量时，所得结果彼此符合不符合。

根据正态分布的密度函数，可以计算误差落在 $\pm\delta$ 区间的概率

$$p(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}\,d\delta \quad , \tag{19}$$

以 $t=\frac{\delta}{\sigma}$ 替换变量得

$$p(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt \tag{20}$$

将不同的 t 值代入上式，便可得变量 t 落在不同范围的概率值，一般可根据 t 值，查表得到 p 值。(20) 式称为概率积分或误差函数。

附表 1　误差函数表

$$p(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t} e^{-t^2/2}\,dt$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0797	0.1585	0.2358	0.3108	0.3829	0.4515	0.5161	0.5763	0.6319
1.0	6827	7287	7699	8064	8385	8664	8904	9109	9281	9426
2.0	9545	9643	9722	9786	9836	9876	9907	9931	9949	9963
3.0	9973	9981	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9999	9999

例 1　当 $\delta=\sigma$ 时，则 $t=1$，查误差函数表得误差落在 $\pm\sigma$ 区间的概率为

$$p\{-\sigma\leq\delta\leq+\sigma\}=0.683=68.3\%$$

这就是说在一系列观测中，误差值处于 $+\sigma$ 到 $-\sigma$ 之间的数目占误差总数目（即总的观测次数 n）的 68.3%，即大约每 3 次测量中可能有一次 $|\delta|>\sigma$。

例2. 当 $\delta=\eta=0.7979\sigma$ 时，$t=0.7979$，查得

$$p\{|\delta|\leq\eta\}=0.575=57.5\%$$

即测量值的误差落在 $\pm\eta$ 区间内的数目仅占总测量数的57.5%。

例3：当 $\delta=3\sigma$ 时，$t=3$，查得

$$p\{|\delta|\leq 3\sigma\}=0.997=99.7\%$$

即误差落在 $\pm3\sigma$ 区间内的概率为99.7%，而落在 $\pm3\sigma$ 区间外的概率仅为0.3%，即大约1000次测量中可能有三次 $|\delta|>3\delta$。故一般可以认为误差超过 $\pm3\sigma$ 是几乎不可能的，因此把 $\pm3\sigma$ 称为极限误差。如果在实际测量中发现有一次观测值的误差在 $\pm3\sigma$ 之外，则可以判断它一定不属于偶然误差而为系统误差或过失误差。

可以证明，在误差曲线上，均方误差 σ 之值是曲线拐点的横坐标；平均误差 η 是纵轴一侧曲线下所包面积的重心的横坐标；或然误差 γ 则是将此面积分为两等分的横坐标。如图4所示。图中还标出了极限误差 $\pm3\sigma$。现以证明在误差曲线上，标准误差 σ 之值是曲线拐点的横坐标为例。众所周知，拐点的横坐标应为函数的二阶导数等于零时解出的值。

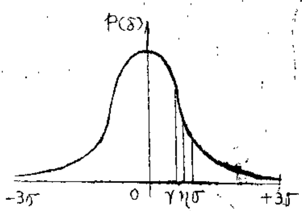


图 4

由 $$p(\delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$$

$$\frac{d^2p}{d\delta^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^3}\exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right)\left(\frac{\delta^2}{\sigma^2}-1\right)=0 \qquad \text{则 } \delta=\pm\sigma$$

所以标准误差是误差曲线拐点的横坐标。