高等学校课程教材

高等数学

（第二版）

胡去非　刘金铎　葛正洪　主编

中国标准出版社

高等数学

高等学校课程教材

高等数学

（第二版）

胡去非　刘金铎　葛正洪　主编

中国标准出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/胡去非等主编．—北京：中国标准出版社，2003

高等学校课程教材

ISBN 7-5066-3243-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．胡…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 067387 号

中 国 标 准 出 版 社 出 版
北京复兴门外三里河北街 16 号
邮政编码：100045
电话：68523946　68517548
中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 19¼　字数 420 千字
2003 年 9 月第二版　2003 年 9 月第一次印刷

*

印数 1—3 500　定价 28.50 元
网址 www. bzcbs. com

第二版前言

本教材自2001年正式出版发行以来，已在专科学生的数学教学中使用。实践表明，它是一部在一定程度上渗入教改新意的教材，保持了学科的系统性与科学性，体现了良好的适用性。

为使本教材在保留原有特色的基础上，在整体结构，文字叙述，例题典型及术语的规范等方面更为完善，在广泛征集意见后，由胡去非、刘金铎、葛正洪、闫守峰、王文祥等同志重新进行修订。同时增补了部分习题，以增强学生基本运算能力及运算方法的训练。

因水平所致，不妥与错误可能难免，敬请读者批评指正。

编　者

2003年7月

前　　言

本书是工程类高职高专高等数学教材，也可供经贸类及文科类各专业选用。它是根据教育部《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》及编者数年来在高职高专数学教学与教改经验的基础上，并借鉴国内同类教材编写而成。

近年来的教学实践与研究表明，高职高专的数学教育必须与高职高专的人才培养模式紧密联系，使数学教学成为培养应用型人才的一个重要环节。因而本书的编写不仅强调有益于学生掌握高等数学的基本概念、基本方法与基本技巧，而且还强调培养学生利用数学工具分析问题解决实际问题的能力。

本书在编写上尽量体现以下几个特点：

1. 从高职高专的教改要求出发，适度弱化一些纯数学理论及一些有难度的定理的证明，而代之以直观的几何说明。

2. 强调培养学生的应用意识与应用能力，增加数学建模实例与训练，在例题与习题选编上，侧重于与实际问题的联系，未编入理论性较强的证明题与概念题。

3. 本书编入了函数、微积分在经济方面的应用。

4. 本书编入了数学软件 Mathematica 的使用方法，以使学生获得更快捷解决问题的能力。

本教材的编写，参考了高等教育出版社出版：同济大学应用数学系编本科少学时《高等数学》，盛祥耀主编《高等数学》，李志煦等编著的《微积分》。

本教材的教学学时为 110 学时，标有 * 号的内容可根据专业不同进行取舍。

本书各章分别由刘金铎（第一、七章）、葛正洪（第二、三章）、汪永高（第四、五、六章）、胡去非（第九、十、十一章）、贾敬（第八、十二章）、闫守峰（第十三章）执笔。刘艳、王文祥、王涛、刘海生、王昕等人为本书编选了习题。全书由刘金铎、胡去非统稿定稿。

本书的编写得到了南开大学梁科教授与华南师范大学易法槐教授的支持与多方指教，在此表示衷心的谢意。

本书中的不妥及错误之处，真诚希望读者批评指正。

编　者

2001 年 8 月

目　录

第一章　函数与极限

第一节　函数 ······ 1
第二节　极限的概念 ······ 6
第三节　无穷大与无穷小　极限运算法则 ······ 10
第四节　无穷小量的比较 ······ 15
第五节　函数的连续性 ······ 17
*第六节　常用的经济函数 ······ 21
第一章习题 ······ 24

第二章　导数与微分

第一节　导数的概念 ······ 30
第二节　函数的求导法则 ······ 35
第三节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 ··· 41
第四节　高阶导数 ······ 44
第五节　微分及其应用 ······ 46
*第六节　牛顿切线法求方程的近似解 ······ 51
第二章习题 ······ 53

第三章　中值定理与导数的应用

第一节　中值定理 ······ 59
第二节　罗必塔法则 ······ 62
第三节　用导数研究函数 ······ 66
第四节　最大值与最小值问题 ···73
*第五节　曲线的曲率 ······ 75
*第六节　导数在经济学中的应用 ······ 79
第三章习题 ······ 81

第四章　不定积分

第一节　不定积分的概念与性质 ······ 85
第二节　换元积分法 ······ 90
第三节　分部积分法 ······ 100
第四节　有理函数的积分举例 ······ 103
第四章习题 ······ 107

第五章　定积分

第一节　定积分的概念与性质 ······ 110
第二节　微积分基本公式 ······ 116
第三节　定积分的换元积分法与分部积分法 ······ 120
第四节　反常积分 ······ 124
第五章习题 ······ 128

第六章　定积分的应用

第一节　定积分的微元法 ······ 131
第二节　平面图形的面积 ······ 132
第三节　体积　平面曲线的弧长 ······ 135
第四节　定积分在物理学中的应用举例 ······ 140
*第五节　经济应用问题举例 ···142
第六章习题 ······ 143

第七章　微分方程

第一节　微分方程的基本概念 ······ 147

第二节　一阶微分方程……… 149
第三节　可降阶的高阶微分方程……………………… 156
第四节　二阶常系数线性微分方程………………… 158
第五节　微分方程应用举例 …164
第七章习题…………………… 168

第八章　向量代数与空间解析几何

第一节　二阶和三阶行列式 … 170
第二节　空间直角坐标系…… 172
第三节　向量及其坐标表示法… 174
第四节　向量的数量积与向量积……………………… 176
第五节　空间平面及其方程 … 179
第六节　空间直线及其方程 … 181
第七节　二次曲面与空间曲线……………………… 183
第八章习题…………………… 188

第九章　多元函数微分学

第一节　多元函数的基本概念……………………… 190
第二节　偏导数……………… 194
第三节　多元函数的微分法 … 199
第四节　全微分……………… 204
第五节　偏导数的应用……… 207
第九章习题…………………… 213

第十章　二重积分

第一节　二重积分的概念与性质……………………… 216
第二节　二重积分的计算…… 219
第三节　二重积分的应用…… 224
第十章习题…………………… 228

第十一章　曲线积分

第一节　对坐标的曲线积分 … 230
第二节　格林公式…………… 234
第三节　平面上曲线积分与路径无关的条件……… 237
*第四节　对弧长的曲线积分 … 239
第十一章习题………………… 242

第十二章　无穷级数

第一节　无穷级数的概念和性质……………………… 244
第二节　正项级数…………… 247
第三节　任意项级数………… 250
第四节　幂级数……………… 252
第五节　函数展开成幂级数 … 256
*第六节　傅立叶级数………… 262
第十二章习题………………… 269

*第十三章　数学软件 Mathematica 简介

第一节　Mathematica 的安装、运行及退出………… 272
第二节　Mathematica 的各种运算………………… 273
第三节　Mathematica 的图形 … 280
第四节　特殊格式和特殊字符的输入……………… 281

习题答案………………………… 283

附录　特殊平面曲线及其方程………………………… 300

注：带 * 为选学内容。

第一章　函数与极限

函数与极限都是近代数学中最重要的基本概念.高等数学就是以函数为主要研究对象，以函数的微分与积分理论为主要研究内容的数学课程，而极限理论是建立函数微分学与积分学的基础.本章的任务是首先在初等数学关于函数知识的基础上进一步讨论函数，然后介绍极限、无穷小、无穷大等概念，并建立极限运算法则，最后以极限为工具讨论函数的连续性的概念.

第一节　函　　数

一、函数的概念

变量与函数的概念抽象于物质世界的各种运动与变化，变量变化过程中的相依关系产生了函数概念.

1. 函数的定义

定义　设有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在实数的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数**，记为

$$y = f(x) \quad x \in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**，x 的取值范围 D 称为这个函数的**定义域**.

当 x 取定数值 $x_0 \in D$ 时，通过对应法则 f，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 函数值的集合称为函数的**值域**，记为 M，即

$$M=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

通常对于确定的 $x_0\in D$，函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之对应，称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义；如果函数 y 在某个区间上每一点都有定义，则称函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

不难看出，函数是由定义域 D 与对应法则 f 所确定的，所以定义域与对应法则是函数的两个要素.对于两个函数当且仅当它们的定义域与对应法则都分别相同时，它们才表示同一函数.至于自变量与因变量用什么字母表示，则无关紧要.

因此在给出一个函数时，一般都应标明其定义域，即自变量取值的允许范围，这可由所讨论问题的实际意义所确定．凡是未标明实际意义的函数，其定义域是使该数学式有意义的自变量的取值范围.通常使用不等式、区间或集合记号来表示定义域.例如 $y=x^2$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，或表示为$-\infty<x<+\infty$，又可用实数集 R 表示.

例 1　确定函数 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-1)$的定义域.

解　该函数的定义域应使式中的两项同时有意义，即满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0,\\ x-1>0\end{cases}$$

的 x 值的全体.

解此不等式组,得函数的定义域

$$1<x\leqslant 3,\quad 即\quad (1,3],$$

用集合的形式表示为 $D=\{x\mid x\in(1,3]\}$.

在后面的课程中,常在定义域中某定点 x_0 的邻近讨论函数的性质,为此我们引入邻域的概念.

设 δ 为一正数,点集 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 **δ-邻域**,记为 $N(x_0,\delta)$;点集 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**去心 δ-邻域**,记为 $N(\hat{x}_0,\delta)$.

对于函数对应法则的作用,可以通过下面的例题加以体会.

例 2 设 $f(x)=x^3-2x+3$,求 $f(1)$,$f\left(-\dfrac{1}{a}\right)$,$f(x+1)$.

解 $f(1)=1^3-2\cdot 1+3=2$,

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\left(-\frac{1}{a}\right)^3-2\left(-\frac{1}{a}\right)+3=-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}+3,$$

$$f(x+1)=(x+1)^3-2(x+1)+3=x^3+3x^2+x+2.$$

例 3 设 $f(x+2)=x^2-2x$,求 $f(x)$.

解 令 $x+2=t$,则 $x=t-2$,于是

$$f(t)=(t-2)^2-2(t-2)=t^2-4t+4-2t+4=t^2-6t+8.$$

所以

$$f(x)=x^2-6x+8.$$

例 4 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数,$y=\sqrt{x}$ 与 $w=\sqrt{u}$ 是相同的函数.

二、函数的表示法

函数的表示法通常有三种:公式法、表格法和图形法.对这些表达函数的方式的一般性介绍,在中学课程中已经进行,这里不再重复.

下面用**分段函数**这一名称来记述某些函数.所谓分段函数也是用公式法描述的函数,但是它们在定义域的不同部分具有不同的对应法则.例如已学过的绝对值函数 $y=|x|$,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,定义式为

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

这个函数在 $(-\infty,0)$ 与 $[0,+\infty)$ 两个区间内各有不同的对应法则,这是一个构成较简单的分段函数.

例 5 某人以 250 m/min 的速率骑自行车外出,骑行 3 min 后,发现车胎气不足,打气耗费了 5 min 的时间,以后又以相同的速率骑行 10 min 到达目的地,求此人骑行的路程与时间的函数关系.

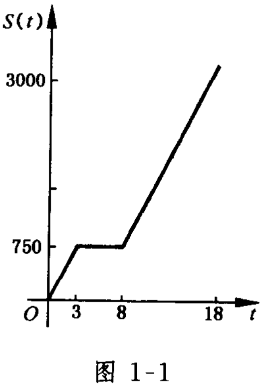


图 1-1

解 设骑行时间为 t(单位为 min),路程函数为 $S=S(t)$(单位为 m).

在时间段 $[0,3]$ 内,$S=250\,t$;

在时间段 $(3,8]$ 内,$S=750$;

在时间段$(8,18]$内，$S=750+250(t-8)$. 所以 S 与 t 的函数关系可表示为

$$S(t)=\begin{cases}250\,t, & 0\leqslant t\leqslant 3,\\ 750, & 3<t\leqslant 8,\\ 750+250(t-8), & 8<t\leqslant 18.\end{cases}$$

用图形描述这个函数，如图 1-1 所示.

这个函数的定义域为$[0,18]$，要注意的是，这是一个函数，不是多个函数.

例 6 作函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的图形，且求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$.

解 函数图形由图 1-2 所示. 因为 $-1\in(-\infty,0)$，$0\in[0,+\infty)$，$2\in[0,+\infty)$，所以 $f(-1)=1$，$f(0)=1$，$f(2)=3$.

在求分段函数的函数值时，应先确定自变量的取值所在范围，再按相应的对应法则进行计算.

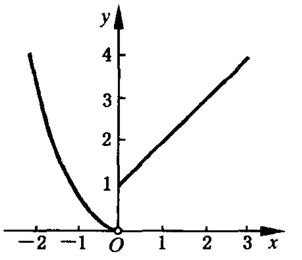


图 1-2

三、函数的几种基本性状

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $E\subset D$. 如果存在正数 M，使得对于 E 中每个数 x，总成立$|f(x)|\leqslant M$，则称函数$f(x)$在 E 上**有界**. 如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在 E 上**无界**.

例如，当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，所以 $\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界 . 而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上**单调增加**；如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上**单调减少**. 函数单调增加或单调减少的区间统称为**单调区间**.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称 . 如果对于任意 $x\in D$，恒成立 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$是**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，恒成立 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在不为零的数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且有$f(x+T)=f(x)$总成立，则称 $f(x)$为**周期函数**，T 称为 $f(x)$的周期，通常所说的周期函数的周期指最小正周期.

四、反函数

设 $y=f(x)$为定义在定义域 D 上的函数，其值域为 M. 若对于数集 M 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x，使 $f(x)=y$，即说变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数称为函数 $y=f(x)$的**反函数**，记为$x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D. 函数 $y=f(x)$与

$x=f^{-1}(y)$二者图形相同.

习惯上人们总用 x 表示自变量,y 表示因变量,因而总将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 用 $y=f^{-1}(x)$ 表示,此时,$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

五、初等函数

1. 基本初等函数

幂 函 数 $y=x^{\mu}$(μ 为任意实常数);

指数函数 $y=a^{x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$;

对数函数 $y=\log_{a}x(a>0$ 且 $a\neq 1)$;

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$;

这五类函数统称为**基本初等函数**.这些函数的定义域、性质及图形在中学已学过,在高等数学中还会进一步研究和应用它们.

2. 复合函数

设 $y=f(u)$,而 $u=\varphi(x)$,当 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域中,则 y 通过 u 成为 x 的函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$,称为以 x 为自变量,u 为中间变量的**复合函数**.

例 7 $y=u^2$ 与 $u=\sin x$ 复合而成的函数为 $y=\sin^2 x$,只要将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^2$ 即可得到,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成,其定义域为 $[-1,1]$,它是 $u=1-x^2$ 定义域的一部分.$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 不能构成一个复合函数.

例 8 设 $f(x)=x^2, g(x)=2^x$,求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=2^{2x}$.

$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

有时复合函数可能由三个或更多个函数构成,应学会正确分解复合函数的复合过程.

例 9 指出 $y=(2x+5)^{100}$ 与 $y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 的复合过程.

解 $y=(2x+5)^{100}$ 是由 $y=u^{100}$ 与 $u=2x+5$ 复合而成的.

$y=\sqrt{\log_a(\sin x+2^x)}$ 是由 $y=\sqrt{u}, u=\log_a v$ 与 $v=\sin x+2^x$ 复合而成的.

3. 初等函数

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算及有限次复合构成,并且可用一个数学式表示的函数,称为**初等函数**.例如例 9 中的两个函数.分段函数一般不是初等函数.

高等数学中所讨论的函数,绝大多数是初等函数.

六、建立函数关系举例

建立函数关系,或说用数学模型去描述几何、物理、经济等学科中实际问题的数量关系,这是一件有一定难度但又不能回避的工作.我们必须不断实践,总结经验,掌握使用适宜的数学工具解决实际问题的方法.

例 10 将一个圆心角为 θ,半径为 R 的圆扇形围成一个漏斗,试将漏斗的容积 V 表示成 θ 的函数(如图 1-3).

解 记漏斗的底半径为 r，高为 h，则由于漏斗的底圆周长与圆扇形的圆弧长相等，得

$$R\theta=2\pi r,$$

因而有 $r=\dfrac{R}{2\pi}\theta$.

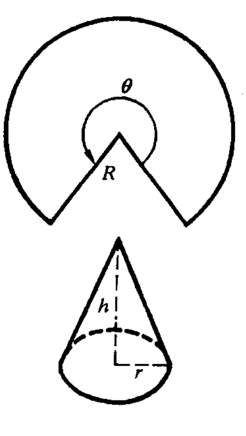


图 1-3

又因漏斗的母线、底半径与高构成直角三角形，所以

$$h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2}=\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}.$$

再由圆锥的体积公式，得

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{2\pi}\theta\right)^2\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-\theta^2}=\frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\quad(0<\theta<2\pi).$$

所求的函数关系为

$$V=\frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}\quad(0<\theta<2\pi).$$

例 11 由直线 $y=x$，$y=2-x$ 及 x 轴所围的等腰三角形，如图 1-4. 在底边上任取一点 $x\in[0,2]$，过 x 作垂直于 x 轴的直线，将图上阴影部分的面积表示成 x 的函数.

解 设阴影部分的面积为 A，当 $x\in[0,1)$ 时，$A=\dfrac{1}{2}x^2$，

当 $x\in[1,2]$ 时，$A=1-\dfrac{1}{2}(2-x)^2$.

所以

$$A=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\in[0,1),\\[2mm] 2x-\dfrac{1}{2}x^2-1, & x\in[1,2].\end{cases}$$

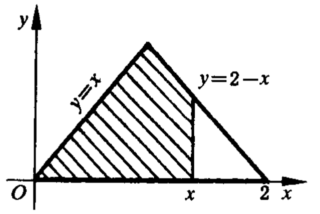
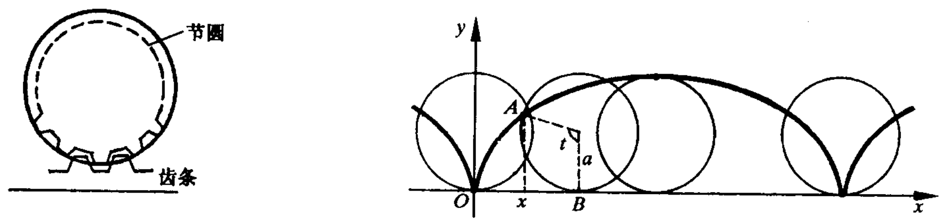


图 1-4

例 12 齿轮与齿条啮合的运动，相当于节圆在齿条的节线上滚动. 若节圆半径为 a，求节圆上的一定点 A 的运动轨迹的方程(图 1-5).



(a) (b)

图 1-5

解 这个轨迹应该是一个半径为 a 的圆，在一条直线上作无滑动的滚动时，圆上一定点 A 在平面上划出的图形，如图 1-5(b).

如图 1-5(b)建立坐标系，设定点 A 的起始位置与原点重合，t 表示过 A 的半径在节圆滚动时转过的角度. 可知，$OB=\overset{\frown}{AB}=at$，于是有

$$x=at-a\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=a(t-\sin t),$$

$$y=a+a\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=a(1-\cos t),$$

因此 A 点的运动轨迹的方程为

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases} \quad t\geqslant 0.$$

这条曲线称为摆线. 这时变量 y 与变量 x 都是参数 t 的函数，y 与 x 的函数关系是通过参数 t 建立的，因而称 y 与 x 的函数关系为由参数方程给出的函数.

例 13(抵押贷款模型) 设二室一厅商品房价值 100000 元，王某自筹了40000 元，要购房还需要以月息 $r=1\%$借款 60000 元，条件是每月还款一部分，25 年还清．假如还不起，房子就归债权人，王某具有怎样的还款能力才能借款呢?

解 模型假设:

起始借款 60000 元，借款月利率 $r=0.01$，借期 n(月)=25(年)×12(月/年)=300(月)，每月还 x 元，y_n 表示第 n 月末仍欠债主的钱.

模型建立:

$$\begin{aligned}
&y_0=60000, \\
&y_1=y_0(1+r)-x, \\
&y_2=y_1(1+r)-x=y_0(1+r)^2-x[(1+r)+1], \\
&y_3=y_2(1+r)-x=y_0(1+r)^3-x[(1+r)^2+(1+r)+1], \\
&\cdots\cdots \\
&y_n=y_0(1+r)^n-x[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+\cdots+(1+r)+1] \\
&\quad =y_0(1+r)^n-\frac{x[(1+r)^n-1]}{r}.
\end{aligned}$$

当贷款还清时，$y_n=0$，可得 $x=\dfrac{y_0r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$，把 $n=300$，$r=0.01$，$y_0=60000$ 代入得 $x\approx 631.93$，即王某每月拿不出 632 元，就不要借款.

第二节　极限的概念

极限概念是高等数学中最重要的概念之一，它是研究微积分学的基础．许多重要概念，如导数、定积分等都要通过极限概念来定义. 我们先利用下述例 1 初步认识极限作为一种重要数学工具如何去求得一些量的精确数值.

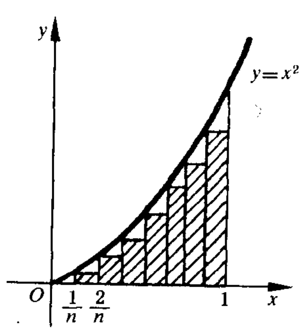


图 1-6

例 1 求由曲线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围图形(称为曲边三角形)的面积(图 1-6).

解 该图形有一条边为曲线，仅用初等数学的方法求面积，在这里是不能奏效的. 我们的具体做法是：将区间[0,1]等分为 n 个小区间 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$，$\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]$，…，$\left[\frac{n-1}{n},1\right]$，在每个小区间上依次作 n 个内接小矩形，它们的面积依次为 $\frac{1}{n}\times 0$，$\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}\right)^2$，$\frac{1}{n}\times\left(\frac{2}{n}\right)^2$，…，$\frac{1}{n}\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$. 记曲边三角形面积的真值为 S，n 个小矩形面积之和为 S_n，则有

$$S \approx S_n = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^3 [1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

$$= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

对图 1-6 稍加分析即可发现，n 越大，S_n 与 S 的误差就越小，当 n 无限增大时，S_n 与 S 的差就会无限接近于零，即 S_n 无限趋向于 S. 另外，由 S_n 的表达式可知，当 n 无限增大时，S_n 无限趋向于$\frac{1}{3}$. 于是可断言，该曲边三角形的面积为$\frac{1}{3}$.

在上例中，我们通过研究函数值的变化趋势来解决问题. 这种研究问题的方法叫做极限方法. 但自变量的变化除了可以取无限增大的正整数 n 外，还有其它变化方式. 下面我们将就函数在自变量不同的变化过程中的变化趋势引入极限的定义.

一、$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

1. 记号 $x \to x_0$ 的意义

记号 $x \to x_0$，读作"x 趋向于 x_0"，它包含以下几点含义：一是其表示 x 从点 x_0 的两侧无限接近于点 x_0；二是自变量 x 将在点 x_0 的某个去心邻域内连续取值，所以说 x 趋近于 x_0 的过程是一个无限过程；三是 x 是以任意的程度接近 x_0，但不会"到达"x_0.

2. $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限定义

先考查下面的三个函数当 $x \to 1$ 时，函数值的变化趋势(图 1-7)：

(1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$； (2) $g(x) = x + 1$； (3) $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

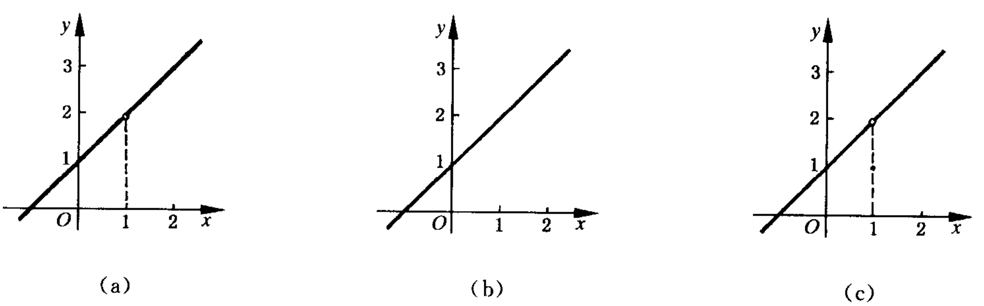


图 1-7

这三个函数的定义方式尽管有差别，但有一个共同的特征就是当 x 无限接近于 1 时，对应的函数值无限趋近于 2. 由此引出以下定义.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内有定义，如果当 x 无限接近于 x_0 时，相应的函数值无限趋向于常数 A，则称 A 为 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**极限**. 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to x_0).$$

从以上三个函数可以看出，函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限是研究当$x \to x_0$时函数 $f(x)$ 的变化趋向，这种变化趋向与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义是无关的，所以定义 1 中只要求函数$f(x)$在某去心邻域 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内有定义即可.

例 2 (1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$；

(2) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

3. 左极限与右极限

当只考虑 x 从点 x_0 的左侧或从点 x_0 的右侧趋向于 x_0 时(分别记作 $x\to x_0^-$ 与 $x\to x_0^+$),就产生了左极限与右极限的概念.

定义 2 若 x 小于 x_0 而趋向于 x_0 时,$f(x)$趋向于常数 A,则称 A 为当 x 趋向于 x_0 时 $f(x)$的**左极限**或简称为 $f(x)$在 x_0 处的左极限为 A,记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A;$$

若 x 大于 x_0 而趋向于 x_0 时,$f(x)$趋向于常数 A,则称 A 为当 x 趋向于 x_0 时函数$f(x)$的**右极限**或简称 $f(x)$在 x_0 处的右极限为 A,记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A.$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**.

显然,函数 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件为 $f(x)$在 x_0 处的左、右极限都存在并且相等,即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$,这个值就是$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases} x+1,\ x<0, \\ x^2,\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1,\ x>1. \end{cases}$ 画出该函数的图形,且求函数在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的极限.

解 $f(x)$的图形如图 1-8 所示.

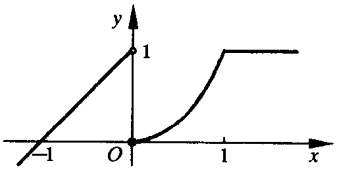


图 1-8

在 $x=0$ 处,因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$,$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0$,即 $f(x)$在 $x=0$ 处的左右极限都存在但不相等,所以它在 $x=0$ 处的极限不存在.

在 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 1=1.$$

即 $f(x)$在 $x=1$ 处左右极限都存在且相等,所以它在 $x=1$ 处极限存在且为 1.

二、$x\to\infty$时函数 $f(x)$的极限

1. 记号 $x\to\infty$的意义

记号 $x\to\infty$,读作"x 趋向于无穷大",意即$|x|$无限增大,其含义为 x 既趋向于$+\infty$,又趋向于$-\infty$,此时 x 为连续变化的变量.

2. $x\to\infty$时 $f(x)$极限的定义

考查实例,当$|x|$无限增大时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$无限趋向于 0,由此引出如下定义.

定义 3 如果当$|x|$无限增大时,函数 $f(x)$无限趋向于常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 x 趋向于无穷大时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

显然 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}=0$.

如果仅考虑 x 取正值且无限增大,函数 $f(x)$以 A 为极限,则记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$;而$x$ 仅

取负值且无限减小，$f(x)$以 A 为极限，则记为 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

例如，$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

下面不加证明介绍一个定理——函数的有界性定理.

定理 1 如果 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$的极限存在，则存在 x_0 的某个去心邻域 $N(\hat{x}_0,\delta)$，使得 $f(x)$在该邻域内有界.

在 $x\to\infty$的情况中，有界性定理表述为

定理 1′ 当 $x\to\infty$时，函数 $f(x)$的极限存在，则存在正数 X，使得$|x|>X$ 时，函数 $f(x)$有界.

三、数列的极限

1. 数列及其基本性质

定义 4 按一定次序排列的一列数 $u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$，称为**数列**，简记为$\{u_n\}$. 数列的每一个数都称为数列的**项**，其中称 u_n 为数列的**一般项**或**通项**.

例如 (1) $2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,1+\dfrac{1}{n},\cdots$；

(2) $1,\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{3},\dfrac{9}{4},\dfrac{9}{5},\cdots,2+\dfrac{(-1)^n}{n},\cdots$；

(3) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$；

(4) $1,4,9,\cdots,n^2,\cdots$

都是数列，它们的通项分别为 $1+\dfrac{1}{n}$, $2+\dfrac{(-1)^n}{n}$, $(-1)^{n-1}$与 n^2.

由于数列的每一项都与一个正整数相对应，所以可以将数列看作是定义在正整数集上的函数 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，我们称这样的函数为**整标函数**.

关于数列的基本性质，我们讨论有界性与单调性，这与函数的相应性质基本一致，即若存在一个常数 $M>0$，使得$|u_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$恒成立，则称数列$\{u_n\}$**有界**；若数列$\{u_n\}$满足条件 $u_n\leqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$或 $u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则分别称$\{u_n\}$为**单调递增数列**或**单调递减数列**. 单调递增数列与单调递减数列统称为**单调数列**. 上述四个数列中，(1)为单调递减且有界数列；(2)、(3)为有界数列但不单调；(4)为单调递增数列但无界.

2. 数列的极限

定义 5 对于数列$\{u_n\}$，当 $n\to\infty$时，如果数列$\{u_n\}$各项的值无限趋向于某常数 A，则称 A 为数列$\{u_n\}$的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A \quad 或 \quad u_n\to A\ (n\to\infty).$$

极限存在的数列称为**收敛数列**，极限不存在的数列称为**发散数列**.

根据定义，数列(1)，(2)为收敛数列. 显然，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1;\quad \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)=2.$$

数列(3)，(4)都是发散数列.

3. 两个定理

我们不加证明再介绍两个定理.