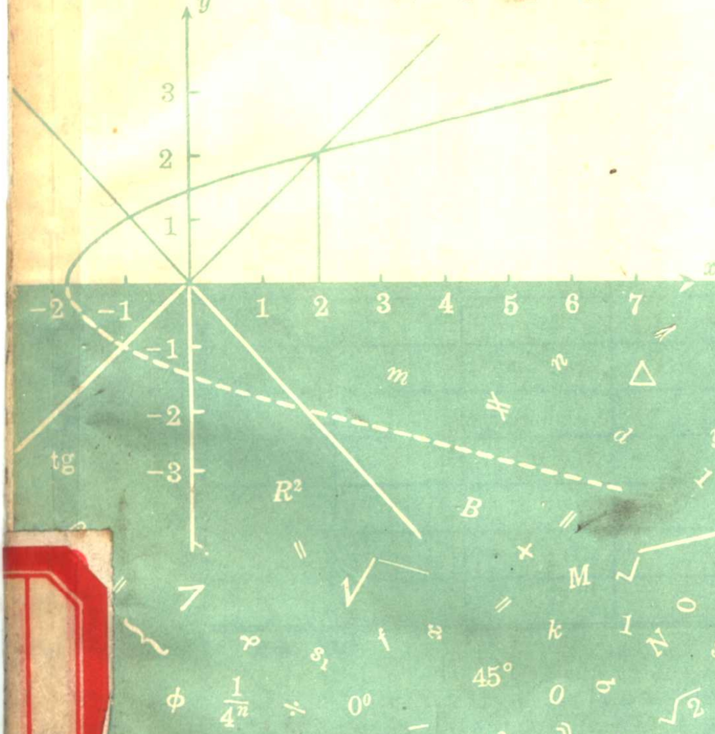
中学课程中的无理方程

吉布什 著



新知識出版社

中学課程中的无理方程

吉 布 什 著

管 承 仲 譯

新 知 識 出 版 社

一九五七年·上海

И. А. ГИБШ

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КУРСЕ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АПН РСФСР
МОСКВА—1954

根据俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育科学院出版社 1954 年版譯出

中学課程中的无理方程

(苏) 吉 布 什 著
管 承 仲 譯

*

新 知 識 出 版 社 出 版
(上 海 湖 南 路 9 号)
上海市書刊出版業營業許可証出 015 号
中科藝文聯合厂印刷　新華書店上海發行所总經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：1　15/16　字數：44,000
1957年7月第1版　1957年7月第1次印刷
印數：1—35,000 本

統一書号：13076・83
定　价：(7) 0.19 元

目　录

緒　論

无理方程在八年級的代数課程里是作为能化成一次方程或者二次方程的一种方程类型来研究的．无理方程的基本特点在于：必須使用方程的新的变形方法把它們化为有理的形式，这种新的变形方法就是取方程的兩边的同次方，这可能化为和已知无理方程不等效的方程；因此在用有理方程代替无理方程后，必須把解有理方程所求得的根加以檢驗（討論），选擇其中适合已知无理方程的根．

这本小册子是闡述所有和这个問題有关的理論并举出一系列的例題加以說明；在这本書里，虽然例題的数目不多，但是每一个例題都具有說明某种可能发生的情形的目的．

在这本小册子里，提出了三种解无理方程的方法——兩种解析法（代数法）和一种图象法．从教学法的观点来看，这三种方法不能同时講解，而是要按照一定的順序来講解．但是，如果教师能够把第一种解析法（取方程的兩边的同次方）和图象法結合在一起进行教学，那自然是很有益处的．为了使教师能够按照这种順序講課，作者用**同样一些例題**来研究无理方程的这三种解法，而在說明这三种方法的实質的三节里都用这些例題加以分析．

解无理方程的第二种解析法（引入輔助未知数）的教育意义并不次于第一种解析法的教育意义，并且在某些情形下，甚至比第一种解析法的教育意义还大；因此，也必須要用一系列的例題来使学生熟悉这种方法．

最后，作者認为有必要作出下列很重要的建議．在这本小册子里所包括的全部材料，是供給学校里的八至十年級学生在研究无理方程时所采用的．在八年級里，主要地应当研究数字无理方程，而文字无理方程只能是最簡單的，并且所含的字母不能多于一个．

如果該班学生的水平不够，还不能順利地解文字无理方程，就需要把某些这种方程放在数学小組里来研究．在課堂上，解数字无理方程的解析法，尤其重要的是图象法，应当是教学无理方程的基本内容．

在九年級里，解数字无理方程和文字无理方程只能作为复习和加深所学过的代数課程的方式来进行，或者在数学小組里进行．

解文字无理方程的最可靠和最恰当的地方应当是在十年級所学习的“方程的討論”一章里，在十年級里，这一章通常是和学生关于方程的等效性以及关于数字方程和文字方程的根的討論的知識系統化和深入研究联系在一起的．但是就在十年級里，教师也要有限度，不要麻煩所有的学生都解那些难題，这样的难題作者已有意識地选在标題为“比較复杂的情形”一节里．虽然这些題对于学生数学知識的获得很有益处，但只能布置給数学成績最好的学生．

1. 定　义

一个方程，它的一边或者两边是关于某一个未知数 x 的无理式时，这个方程就叫做一个未知数 x 的**无理方程**．

例如，方程　$x+\sqrt{2x-3}=4$，$\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$，

$$\sqrt{3x-a}+2x=a, \quad \sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$$
都是含有二次根式的无理方程.

方程 $\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}=0, \dfrac{\sqrt[4]{a+x}}{x}+\dfrac{\sqrt[4]{a+x}}{a}=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{b}$

分别是含有三次根式和四次根式的无理方程.

2. 課題的提出

我們知道，奇次根式对于其中所含字母的每一組值具有唯一的一个值(正值、負值或零值)*. 而偶次根式对于其中所含字母的这一組值来說，或者是正負相反的兩个值，或者沒有一个值.

可以假設每一个偶次根式取它的一个或者另一个数值，来解无理方程.在这种情形下,解无理方程就是求把这个方程的兩边变成正确的等式的未知数的值，而其中的根式至少取它的可能值中的一个.

例如,方程 $\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=1$

有根$-2\frac{3}{4}$，其条件是当 $x=-2\frac{3}{4}$时，根式$\sqrt{3+x}$和 $\sqrt{5+x}$有兩个值,我們对于前一个根式取它的負值$-\frac{1}{2}$,对于后一个根式取它的正值$\frac{3}{2}$.

但是,在初等代数課程里,无理方程通常在这样的条件下才

* 当然是在实数域内.

能解，即我們把其中每一个偶次根式的值理解为它的算术值*．在这个条件下，方程

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=1$$

就沒有根，而方程

$$-\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=1$$

的根为 $-2\frac{3}{4}$.

3. 无理方程的未知数的許可值域

如果无理方程含有偶次根式，那末，我們知道，这种根式只有当根号內的式子为非負值的时候，才具有确定的数值**．

例如，下列方程

$$\sqrt{3x-6}+\sqrt{1+x}=2 \qquad (1)$$

所含的根式，只有在

$$3x-6\geqslant 0 \text{ 和 } 1+x\geqslant 0$$

的条件下，才具有确定的数值，而这兩个条件可以归并为一个条件：

$$x\geqslant 2. \qquad (2)$$

因此，只有能够适合关系式(2)的一些数是方程(1)的根；适合关系式(2)的数的集合是由 2 和大于 2 的一切数所組成的；在数軸上表示这些数的各点組成一条由点 2 引出的射綫，并且这

* 显然，这样作是从它的最簡單的形式——"單值"的形式——来研究問題的．但是不加这种限制条件来解无理方程是理論上更感兴趣的（参看 56—60 頁）．

** 在实数域內．

条射綫具有正的方向(图 1).

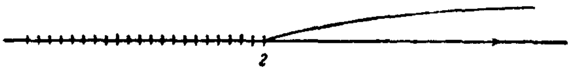


图 1

方程 $$\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2} \quad (3)$$
的根只能是适合下列条件

$$x-1\geqslant 0,\ 3-x\geqslant 0,\ x+2\geqslant 0,$$

即适合条件 $$1\leqslant x\leqslant 3 \quad (4)$$
的一些数.

适合关系式(4)的数的集合是由 1 与 3 以及大于 1 而小于 3 的一切数組成的，或者說，适合关系式(4)的数的集合是由数的区間(1,3)内的数組成的；在数軸上表示这些数的各点組成了由点 1 和点 3 所确定的綫段(图 2).

图 2

被某一共同性質所确定的数的集合叫做数域. 例如，适合关系式(2)的数的集合是一个数域；同样，适合关系式(4)的数的集合也是一个数域.

方程(1)的根必須在关系式(2)所确定的数域内，而方程(3)的根必須在关系式(4)所确定的数域内. 換句話說，如果某一个数不适合关系式(2)或关系式(4)，那末这个数就分别不是方程(1)或方程(2)的根.

这样一来，关系式(2)和(4)是表示某一个数分别是方程(1)和(3)的根的必要条件.

已知无理方程的根所在的数域叫做这个方程的未知数的**許可值域**.

4. 关于方程的兩边平方的定理

定理 1 如果我們把方程

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

的兩边平方[其中 $f(x)$和$g(x)$是含有未知数 x 的式子]，那末我們就得到方程

$$f^2(x)=g^2(x), \tag{2}$$

已知方程(1)的一切根以及和方程(1)共軛的方程

$$f(x)=-g(x) \tag{3}$$

的一切根，並且也只有这些根，适合方程(2)*.

証明 方程(2)和方程

$$[f(x)-g(x)][f(x)+g(x)]=0 \tag{2'}$$

等效，这个方程的左边是下列含有未知数 x 的兩个式子的积：

$$f(x)-g(x) \text{ 和 } f(x)+g(x).$$

为了解方程(2′)，必須解下列每一个方程：

$$f(x)-g(x)=0, \tag{1'}$$

$$f(x)+g(x)=0. \tag{3'}$$

因为方程(1′)的根，也就是使因式 $f(x)-g(x)$变成零的数，不使式子 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中的每一个失去数的意义，从而也不使另一个因式 $f(x)+g(x)$失去数的意义，因此，这些根同时也是方程(2′)的根；同样，方程(3′)的根，也就是使因式 $f(x)+g(x)$变成零的数，不使式子 $f(x)$ 和 $g(x)$中的每一个失去数的意义，从而也

* 我們一般約定把方程 $A=-B$ 叫做和方程 $A=B$ 共軛的方程.

不使另一个因式 $f(x)-g(x)$ 失去数的意义，因此，这个根同时也是方程(2′)的根. 方程(2′)不可能有跟方程(1′)与(3′)的根不同的根. 所以，方程(1′)的一切根和方程(3′)的一切根，并且也只有这些根，能适合方程(2′). 但方程(1′)与(3′)分别和方程(1)与(3)等效，由此定理即被証明.

例 1 如果我們取方程

$$3x=6$$

的兩边的平方，那末就得到方程

$$9x^2=36,$$

这个方程可以用和它等效的方程

$$(3x-6)(3x+6)=0$$

来代替.

这个方程和下列方程的集合等效：

$$3x-6=0 \text{ 和 } 3x+6=0,$$

其中前一个方程和已知方程 $3x=6$ 等效，而后一个方程和已知方程的共軛方程 $3x=-6$ 等效，共軛方程和已知方程所不同的地方是方程一边的符号不同(右边的).

已知方程的根 2 以及和已知方程共軛的方程的根(-2)，都适合已知方程的兩边在平方后所得到的方程.

例 2 如果我們取无理方程

$$\sqrt{x+2}=x$$

的兩边的平方，那末就得到方程

$$x+2=x^2,$$

这个方程可以用和它等效的方程

$$(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)=0$$

来代替.

这个方程可以分为下列兩个方程：

$$\sqrt{x+2}-x=0 \text{ 和 } \sqrt{x+2}+x=0,$$

其中前一个方程和已知方程 $\sqrt{x+2}=x$ 等效，而后一个方程

$$\sqrt{x+2}=-x$$

和已知方程共轭.

巳知方程的根 2 以及和巳知方程共轭的方程的根(-1)，都适合巳知方程的兩边在平方后所得到的方程.

定理 1 的推論

1° 利用把方程的兩边平方的方法由巳知方程(1)所得的方程(2)的每一个根，或者是巳知方程(1)的根，或者是和它共軛的方程(3)的根.

2° 如果和巳知方程(1)共軛的方程(3)沒有根，那末利用把巳知方程(1)的兩边平方的方法从巳知方程(1)所得的方程(2)，必和巳知方程(1)等效.

从这兩个論断应当得出：方程(2)不会有不同于方程 (1) 与方程(3)的根的任何根.

例 3 把方程

$$\sqrt{x-1}=3 \tag{1}$$

的兩边平方，我們得到方程

$$x-1=9, \tag{2}$$

这个方程只有唯一的一个根 10. 同样，10 也就是巳知方程的根. 方程(2)是方程(1)的等效方程. 这是由于方程

$$\sqrt{x-1}=-3, \tag{3}$$

和方程(1)共軛，而式子 $\sqrt{x-1}$ 不可能有負值(-3)，所以沒有根.

5. 含有一个二次根式的无理方程的解法

如果无理方程含有一个根式，那末永远可以把这个根式移在方程的一边，而把方程的所有其他各项移在另一边，并且把方程变为下面的形式:

$$\sqrt[n]{f(x)}=g(x), \qquad (1)$$

其中 $f(x)$和 $g(x)$都是未知数 x 的有理代数式。把含有一个根式的无理方程整理为(1)的形式叫做根式的孤立。

例4 解无理方程:

$$\sqrt{x-1}=3, \qquad (1)$$

1) 首先确定这个方程的未知数的許可值域:

$$x-1>0^{*}. \qquad (2)$$

2) 现在取已知方程的兩边的平方:

$$x-1=9 \qquad (3)$$

再解所得的方程: $x=10$.

3) 10 能适合(2)的条件，从而可能是已知方程(1)的根.

4) 把 10 代入已知方程(1)中，我們即可确信它的确是这个方程的根.

作完 1—4 四个步驟，我們就解出了方程(1)。但是 3)和 4)兩个步驟是多余的.

实际上，从等式

$$x-1=3^{2} \qquad (3)$$

* $x-1=0$ 的等式是不可能的.

可以看出，这个方程的根把方程的左边 $x-1$ 变成了正数 3^2，因而关系式(2)由于等式(3)而成立，并且 3)的检验也可以不必进行.

其次，方程

$$\sqrt{x-1}=-3$$

和已知方程(1)共轭，显然是没有根；因此方程(3)和方程(1)等效，并且检验 4)也是不必要的.

可見，为了解方程(1)，只要完成 1) 和 2) 两个步骤就行了.

例 5 解无理方程：

$$\sqrt{2x-3}=4-x. \tag{1}$$

1) 这个方程的未知数的許可值域是由下列关系式

$$2x-3>0^{*} \tag{2}$$

来确定的.

2) 取已知方程(1)的两边的平方：

$$2x-3=(4-x)^2 \tag{3}$$

并且把所得的方程化为下面的形式：

$$x^2-10x+19=0. \tag{3'}$$

这个方程的根为： $x_{1,2}=5\mp\sqrt{6}.$

3) 这两个数同时也是方程(3)的根，所以

$$2x_{1,2}-3=(4-x_{1,2})^2,$$

由此得 $$2x_{1,2}-3>0,$$

这就是說，方程(3')的根 $x_{1,2}$ 能适合条件(2).

4) 方程(3')是从已知方程(1)的两边平方得出来的，适合方程(3')的根 $x_{1,2}$，根据定理 1 或者适合已知方程(1)，或者适合和已知方程共軛的方程

$$\sqrt{2x-3}=x-4. \tag{1'}$$

* $2x-3=0$ 的等式是不可能的.

为了解答所求的根 $x_{1,2}$ 适合方程(1)和(1′)之中的哪一个，可以把这两个根代入 方程(1)或者方程(1′). 但是这是沒有必要的；只要把这两个根代入一个方程的右边，确定对于未知数 x 的值 $x_{1,2}$ 这一边的值的符号就行了.

因为 $$4-x_1=4-(5-\sqrt{6})=-1+\sqrt{6}>0,$$
所以，当注意到 $$\sqrt{2x_1-3}>0,$$
我們即可作出結論：根 x_1 适合方程(1)而不适合方程(1′).

反过来，由于 $$4-x_2=4-(5+\sqrt{6})=-1-\sqrt{6}<0,$$
以及 $$x_2-4>0,$$
所以我們可以作出結論：根 x_2 适合方程(1′)而不适合方程(1).

可見，在解方程(1)的时候，完全可以不去确定它的未知数的許可值域，并且为了檢驗利用已知方程(1)兩边平方的方法所求得的方程(3)的根 $x_{1,2}$，只要确定对于未知数 x 的值 $x_{1,2}$ 已知方程右边所取的值的符号就行了；使方程(1)右边取正值的那一个值就被認为是已知方程的根.

一般結論 研究例 4 和例 5，就可以作出下面的一般結論.

为了解含有一个二次根式并且可以化为 (1) 的形式的无理方程
$$\sqrt{f(x)}=g(x), \tag{1}$$
只需要：1) 把它的兩边平方，得出方程
$$f(x)=[g(x)]^2 \tag{2}$$
并且求出它的根；

2) 把所求得 的 方程 (2) 的每一个根代入方程 (1) 的右边 $g(x)$；能够适合下列关系式
$$g(x)\geqslant 0 \tag{3}$$
的方程(2)的根就是已知方程(1)的根.

这时，象例 4 和例 5 所說明的一样，如果方程(2)的根是 α，

那末 $$f(\alpha)=[g(\alpha)]^2, \text{即 } f(\alpha)\geqslant 0,$$
因而，根 α 是在已知方程的未知数 x 的許可値域内，这个許可值域是由关系式
$$f(x)\geqslant 0$$
所确定的.

由此，在解形式(1)的方程时，不必要找出它的未知数的許可値域，并且不必要檢驗所求得的方程(2)的根是否在这个許可值域內.

同样，为了从方程(2)的各根里选擇适合已知方程(1)而不适合和它共軛的方程 $\sqrt{f(x)}=-g(x)$ 的根，沒有必要把根代入已知方程来檢驗，只要确定对于所檢驗的方程(2)的根已知方程(1)的右边 $g(x)$ 所取的値的符号就可以了.

根据上述解方程(1)的一般过程可以知道，解方程(1)可归結为解下列关系式組
$$f(x)=[g(x)]^2,\ g(x)\geqslant 0, \qquad (1')$$
这个关系式組是由用已知方程兩边平方的方法所得到的方程(2)以及表示使已知方程(1)的右边和它的左边具有相同符号的关系式(3)所組成的.

很明显的，方程(1)的每一个根同时都是关系式組(1′)的根，反过来，关系式組(1′)的每一个根同时也都是方程(1)的根. **因此方程(1)和关系式組(1′)等效.**

解无理方程(1)就是解和这个方程等效的关系式組(1′).

6. 参变数(文字的)无理方程的解法和討論

例 6 解下列方程并且加以討論:

$$\sqrt{x-1}=a. \tag{1}$$

解 方程(1)只有在

$$a\geqslant 0$$

的条件下才有根,这个条件就是我們所采用的.

在这个条件下,方程(1)和方程

$$x-1=a^2 \tag{2}$$

等效,这个方程的根为 $1+a^2$.

这样一来,如果 $a\geqslant 0$,那末已知方程(1)的根为 $1+a^2$.

例 7 解下列方程并且加以討論:

$$\sqrt{3x-a}=a-2x. \tag{1}$$

解 方程(1)和关系式組

$$3x-a=(a-2x)^2, a-2x\geqslant 0 \tag{2}$$

等效,也就是和关系式組

$$4x^2-(4a+3)x+a^2+a=0,\ x\leqslant\frac{a}{2} \tag{2'}$$

等效.

解这个关系式組的方程,得:

$$x_{1,2}=\frac{4a+3\mp\sqrt{8a+9}}{8},$$

其中 $8a+9\geqslant 0$, 即 $a\geqslant-\dfrac{9}{8}$. (3)