海淀大归纳

[国内惟一一套

全面归纳总结中学生解题关键和解题类型的讲练题集]

高中数学

北京市海淀区重点中学特级高级教师 编写

黑龙江朝鲜民族出版社

BEIJINGSHIHAIDIANQU
ZHONGDIANZHONGXUE
TEJIGAOJIJIAOSHI
BIANXIE
HEILONGJIANG
CHAOXIANMINZU
CHUBANSHE

修订本

Haidian
Daguina

穿针引线，梳理思路从头到底！

修订本

Haidian

Daguina

BEIJINGSHIHAIDIANQU
ZHONGDIANZHONGXUE
TEGAOJIJIAOSHI
BIANXIE
HEILONGJIANG
CHAOXIANMINZU
CHUBANSHE

海淀大归纳

[国内惟一一套
全面归纳总结中学生解题关键和解题类型的讲练题集]

高中数学

北京市海淀区重点中学特高级教师　编写

黑龙江朝鲜民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

海淀大归纳.高中数学/韩乐琴,黄万端,赵祖培主编.—2版(修订本).—牡丹江:黑龙江朝鲜民族出版社,2003.5
ISBN 7-5389-1052-2

Ⅰ.海... Ⅱ.①韩...②黄...③赵... Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第010581号

书　　名/ **海淀大归纳　高中数学(修订本)**
主　　编/ 韩乐琴　黄万端　赵祖培
责任编辑/ 全成光
责任校对/ 张国海
封面设计/ 风晓渐
出版发行/ 黑龙江朝鲜民族出版社
印　　刷/ 牡丹江书刊印刷厂
开　　本/ 787×1092　1/16
印　　张/ 29
字　　数/ 868千字
版　　次/ 2003年7月修订第2版
印　　次/ 2003年7月第4次印刷
印　　数/ 28 001-46 000册
书　　号/ ISBN 7-5389-1052-2/G·282
定　　价/ 30.00元

《大归纳》丛书撰稿人：

韩素兰	齐大群	李长健	闵贵云	赵文惠	郑宝琴
任宝利	黄　永	陈树华	金嘉珮	高慧娟	冉工林
吴淑芳	李泉林	赵德庆	黄革良	赵勖予	张　岩
赵　维	韩乐琴	黄万端	赵祖培	孙家麟	温　洪
黄彩英	耿京波	陈　平	王忠钦	李桂春	刘　红
黎栋才	欧湘易	朱兴国	王爱莲	张景山	李勇成
常　青	王小征	韩纪娴	张　燕	韩大年	闫世东
茅　宁	赵佳丽	刘玉鑫	纪国栋	樊　福	王　铭
李　里	周　全	高贤发	孙　涛	刘建国	张　颖
孙大久	田　丽	金　云	田大方	石志华	高云涛
许兰珍	唐　洁	王明堂	刘　鸿	张淑芬	李新黔
魏新华	刘淑娴	王晓萍	孟平芬	邹淑琴	于晓霞
吴　琼	姚桂珠	辛福海	刘海燕	孙永忆	邹淑霞

书山有捷径　学海荡轻舟

——《海淀大归纳》丛书修订版序

《海淀大归纳》丛书自2002年问世以来，以超前的创新意识，独特的编写思路，深受广大师生的好评。在2002年全国书市上着实火了一把，全年持续热销大江南北，在多如牛毛的学生教辅书中独领风骚，一时洛阳纸贵，订单如潮，刮起了强劲的“归纳”旋风。

据使用这套丛书的师生反映，这套丛书的亮点不仅在于质量上乘，版式清秀，而且编写思路令人耳目一新，完全跳出了众多跟风教辅图书的雷同模式，具有鲜明的个性特色。这套丛书系统地归纳了目前中高考的各种题型，并详细点拨解题思路，实用性强，使学生事半功倍，明明白白理出头绪，轻轻松松杀出重围。

面对广大师生的认可与厚爱，编写人员在欣慰之余更觉路之修远，对增加这套丛书的含金量和拾遗补阙工作给予了高度的重视。为了真真切切地帮助万千学子早日成才“鱼跃龙门”，增补修订时参考了新教材、实验教材、《新课程标准》以及《考试说明》，认真采纳了广大师生的中肯建议，增补了第一版所欠缺的新内容（高中数学增补量较大），删除了旧题，更正了错误，并努力做到内容的非同步或半同步性，从而使这套丛书不受教材变化的影响。打造一套真正叫得响的精品教辅，不仅需要精雕细刻，千锤百炼，还要符合实际，与时俱进。只有编者与学者携起手来，双向互动，才能出好书，出人才。

这套丛书的编写修订，饱含着北京市海淀区众多知名教师的辛勤劳动，集中展示了首都现代教育的最新科研成果，希望能成为广大师生的最佳参谋。

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，我们殷切期待广大读者对这套丛书提出宝贵的意见。

编　者

2003年5月

学会了归纳的方法，你将无敌！

■1.学会了归纳，才能做到融会贯通。

归纳是中学阶段至关重要的学习方法。事实上，在每一个学习阶段（一个学年、一个学期，甚至一个单元），很多学生都在不知不觉地使用着这种学习方法。可以这样说，归纳始终贯穿在整个学习过程当中。

与发散思维着重训练灵活跳脱、出奇制胜的思维能力不同，归纳着重训练的是高度概括、强度梳理的逻辑思维能力。如果说发散思维能够让你拥有一个灵活的创造性的头脑，归纳则会送给你一个大局的眼光。拥有这种大局的眼光，你就会看到那条隐藏在零零散散的知识或试题后面的逻辑红线。发散能力不强，你会固步自封而趋于死板；归纳功夫不好，你就会亦步亦趋而陷人题海，甚至被题海淹没。事实上，每一道题都可以归纳到一种解题类型，如果你掌握了归纳的方法，浩如烟海的习题便会化解为几种清晰的模式。

■2.《海淀大归纳》全面体现了归纳思维的逻辑魅力。

《海淀大归纳》集中了北京市海淀区重点中学部分特级、高级教师的集体智慧和多年的教学经验，全套丛书以单元或知识点为单位，着重归纳总结了中学生在解题过程中所遇到的关键问题和习题类型。对概念和概念的关系、知识与知识的衔接、习题与考点之间的关系、习题的基本样式以及基本的解题方法等问题，《海淀大归纳》都进行了条分缕析的总结和归纳，条理清晰，层次分明，重点突出。应该说，《海淀大归纳》丛书是帮助你把书读薄的助手，是帮助你学习突飞猛进，能力大幅度提高的阶梯。

事实上，在中高考应试中，每位学生所面对的几十道试题，与平常学习时所解答的习题数量相比，简直就是九牛一毛，但有时又确实让你无所适从。而学会归纳这种学习方法，注意随时随地归纳整理所学过的知识，使庞杂的知识有机地形成一个能力的网络，这样你就会从一个比较高的角度化繁为简、化散为整，从而能把握大局，胜券在手。

可以说，尽管中高考试题千变万化，让人眼花缭乱，穷于应付。但是，林林总总的试题却不外乎是命题内核的个别展现。如果你能够掌握知识网络的内在脉络，千变万化的试题就不外乎是表面上的花拳绣腿，不堪一击。

■3.如果学会了归纳的方法，你将无敌！

理论上的讲解终究是理智上的认识，能力上的真正提高，还需要动手解题。更何况解题模式的熟悉、认识和归纳，是以解题实践为基础的。《海淀大归纳》各单元中特别汇集的自我测试题的意义在于完全涵盖解题的基本类型。动动手，看看你的实战能力到底如何。

《海淀大归纳》丛书不仅以一种归纳的思维方式对初高中所必须掌握的知识进行了彻底的阐述，更重要的是想通过这样一种摹本，在帮助你整理归纳学习内容的同时，全面掌握归纳的学习方法。因为对每一个中学生来说，熟练地掌握这种学习方法比什么都更重要。

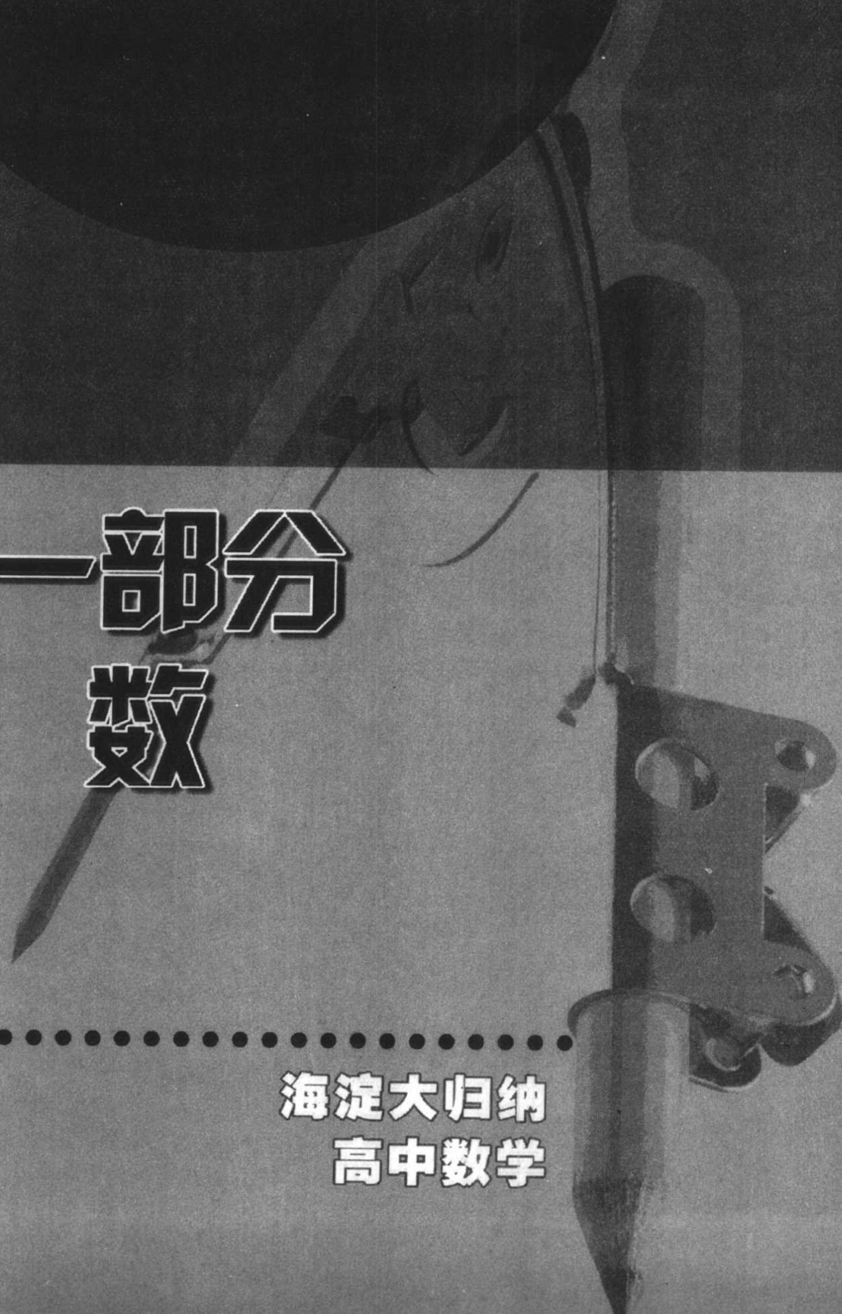
目 录

第一部分 代 数

第二部分 几 何

Haidian
Daguina

第一部分 代数



海淀大归纳
高中数学

第一章　集合与简易逻辑

第一节　集　　合

一、关键问题归纳

1.1　集合的概念

■1. 集　合

集合是数学中最原始的概念之一，不能用其他的概念给它下定义，所以集合是不定义的概念，只能作描述性的说明.

■2. 集合的特性

构成集合的元素具有以下特性：

(1)元素的确定性；

(2)元素的互异性；

(3)元素的无序性(不考虑元素间的顺序).

■3. 集合的表示法

(1)字母表示法；

(2)列举法；

(3)描述法；

(4)图示法.

■4. 集合与元素间的关系

元素与集合间的关系是“属于”或“不属于”的关系，即元素 $a\in A$ 或 $a\notin A$，二者必居其一.

■5. 常见的数集(包括奇数集、偶数集)及其表示法

(1)子　集

A 是 B 的子集的含义是：A 的任何一个元素都是 B 的元素. A 是 B 的子集记作 $A\subseteq B$.

若 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$.

不含任何元素的集合叫做空集，记作 $\varnothing$.

如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则称这两个集合相等，记作 $A=B$.

对于任何 A,B,C 三个集合，有如下性质：

① $A\subseteq A$；

② $\varnothing\subseteq A$；

③ $A\subseteq B,B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

$A\subsetneqq C,B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$.

④ 若集合 A 非空，则 $\varnothing\subsetneqq A$.

(2)交　集

① 定义：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

② 性质：由交集定义推出如下性质：

$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap B=B\cap A$(交换律)，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

(3)并　集

① 定义：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

② 性质：由并集定义可推出如下性质：

$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup B=B\cup A$(交换律)，$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

(4)补　集

① 定义 $\complement_I A=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$.

② 性质：$A\cap\complement_I A=\varnothing$，$A\cup\complement_I A=I$，$\complement_I(\complement_I A)=A$.

■6. 重要公式

$\complement_I(A\cup B)=\complement_IA\cap\complement_IB$，$\complement_I(A\cap B)=\complement_IA\cup\complement_IB$(摩根律)；

$A\cap B=\varnothing$且$A\cup B=I\Leftrightarrow A=\complement_IB$

$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

■7. 有限集合的计算公式

(1)$Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$.

(2)$Card(A\cup B\cup C)$

$=Card(A)+Card(B)+Card(C)-Card(A\cap B)-Card(B\cap C)-Card(A\cap C)+Card(A\cap B\cap C)$.

1.2 含绝对值的不等式

■1. 不等式的同解原理

不等式的同解原理是解不等式的基础，是解含参数不等式分类讨论的重要依据.

(1)如果$a>b$，那么$a+c>b+c$(a,b,c可以是数或整式).

(2)如果$a>b,c>0$，那么$ac>bc$.

(3)如果$a>b,c<0$，那么$ac<bc$.

利用数轴表示解集是常用的基本方法.

■2. 一元一次不等式的解法

(1)若$ax>b,a>0$，则$x>\frac{b}{a}$.

(2)若$ax>b,a<0$，则$x<\frac{b}{a}$.

(3)若$ax>b,a=0$且$b\geqslant0$时，$x\in\varnothing$；

若$ax>b,a=0$且$b<0$时，$x\in\mathbf{R}$.

■3. $|ax+b|<c$与$|ax+b|>c$型的不等式的解法

(1)$|ax+b|<c$型

当$c>0$时，转化为$-c<ax+b<c$求解；

当$c<0$时，$x\in\varnothing$.

(2)$|ax+b|>c$型

当$c\geqslant0$时，转化为$ax+b>c$或$ax+b<-c$求解；

当$c<0$时，$x\in\mathbf{R}$.

解含绝对值的不等式，要根据绝对值意义，去掉绝对值符号，转化为不含绝对值符号的不等式求解.对含两个以上绝对值符号的不等式常用区间讨论法.

1.3 一元二次不等式

■1. 一元二次不等式的标准形式

(1)$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$；

(2)$ax^2+bx+c<0\ (a>0)$.

■2. 一元二次不等式的解法

一元二次不等式都可以转化为如下两种类型之一来解.

(1)不等式$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$型的解法：

① 当$\Delta>0$时，

$x<\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$或$x>\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

② 当$\Delta=0$时，$x\neq-\frac{b}{2a}$；

③ 当$\Delta<0$时，$x\in\mathbf{R}$.

(2)不等式$ax^2+bx+c<0\ (a>0)$型的解法：

① 当$\Delta>0$时，

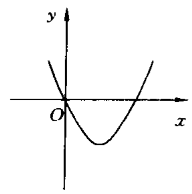
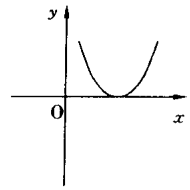
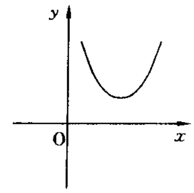
$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

② 当$\Delta\leqslant0$时，$x\in\varnothing$.

注意：判别式的符号$\Delta>0,\Delta=0,\Delta<0$是解含参数的一元二次不等式进行分类讨论的依据.

■3. 一元二次不等式与一元二次方程、一元二次函数间的关系

见下页表：

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的根	有两相异实根 x_1,x_2 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_1=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
一元二次不等式的解集 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\left\{x\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$x\in\mathbf{R}$
一元二次不等式的解集 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$x\in\varnothing$	$x\in\varnothing$

说明：

(1)一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解就是一元二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的值满足 $y>0$ 时所对应的自变量 x 的取值范围.

(2)若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$的两个实根为 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$，则一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集为$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$，不等式$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集为$\{x\mid x_1<x<x_2\}$.

二、习题类型例说

在高考中，集合内容一般以两种方式考查：一是考查集合本身的内容，即集合的概念、集合与集合之间的关系、元素与集合之间的关系；二是把集合作为工具在考查其他内容时加以应用，用集合语言叙述问题.

1. 准确理解集合的概念，正确使用有关符号

集合与对应是近代数学中最基础、最重要的概念，是建立近代数学的基础，对集合概念我们只给出描述性的解释.集合中元素的确定性、互异性、无序性对确定集合有决定性的意义.注意集合的表示法，符号“$\in$”及“$\subset,\subseteq$”的用法以及子集、交集、并集、补集、等集的严格定义.

例 1 设集合 $A=\{x\mid x\leqslant3\sqrt{2}\}$，$a=\sqrt{11}$，则(　　).

A. $a\subsetneqq A$　　　B. $a\in A$

C. $\{a\}\notin A$　　　D. $\{a\}\subset A$

解：由元素与集合的关系可排除 A，由集合与集合的关系可排除 C，又$\sqrt{11}<\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，故 $a\in A$. 所以应选 B.

★解题心得归纳：

元素与集合的关系、集合与集合的关系是两类不同的关系，表示它们的符号也是不相同的.

例 2 数集 $A=\{(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(4m\pm1)\pi,m\in\mathbf{Z}\}$之间的关系是(　　).

A. $A\subsetneqq B$　　　B. $A\subsetneqq B$

C. $A=B$　　　D. $A\neq B$

解法 1：因为 $2n+1$ $(n\in\mathbf{Z})$表示奇数，而 $4m\pm1$

$(m\in \mathbf{Z})$也表示奇数．若令 $m=0,\pm1,\pm2\cdots$由不完全归纳法可知:$4m\pm1$ $(m\in \mathbf{Z})$也表示全体奇数，故选 C.

解法 2:排除法.

由题意知 B,C 中必有且仅有一个正确，由答案惟一可知 A,B 不正确，否则 D 也正确，与答案惟一矛盾．同时取特殊值，令 $m=0,1$ 得 $4m\pm1$ 为 $-1,1,3,5$ 等，知 C 正确.

解法 3:定义法.

任取$(2n+1)\pi\in A$，当 $n=2m$ 时，$2n+1=4m+1\in B$，令 $n=2m-1$，则有 $2n+1=2(2m-1)+1=4m-1\in B$，$\therefore A\subseteq B$；任取$(4m\pm1)\pi\in B$，当令 $n=2m$ 时，有 $2n+1\in A$，又当 $n=2m-1$ 时，有 $4m-1=2n-1\in A$，$\therefore B\subseteq A$，综上有 $A=B$.

解法 4:利用单位圆.

在单位圆中，分别画出$(2n+1)\pi$与$(4m\pm1)\pi$所表示的角的终边，它们都表示终边位于 x 轴负半轴上的角的集合，故 $A=B$，$\therefore$选 C.

解法 5:分类讨论.

按余数分类，被 2 除余 1 的整数是全体奇数$2n+1$ $(n\in \mathbf{Z})$，被 4 除余 1 或 3(或 -1)的整数也是全体奇数．$\therefore$选 C.

★解题心得归纳:

解法 1 利用观察法来确定 A,B 关系，解法 3 直接利用定义判定 $A=B$，解法 2 使用了间接法(排除法)，这是几种基本方法．解法 4 是利用“形”来说明 $A=B$ 的，解法 5 是从“数”的方面进行推理论证的，此法简明而严谨.

例 3　求符合条件$\{a\}\subsetneqq A\subseteq\{a,b,c\}$的集合 A.

解:欲求集合 A，即求集合 A 中的元素；A 中的元素受条件$\{a\}\subsetneqq A\subseteq\{a,b,c\}$制约．两个关系逐一处理:(1)由$\{a\}\subsetneqq A$ 知 $a\in A$，且 A 中至少有一个元素不在$\{a\}$中，即 A 中除了 a 还有其他元素；(2)由$A\subseteq\{a,b,c\}$，知 A 中其他元素必在$\{a,b,c\}$中．由此知集合 $A=\{a,b\}$或 $A=\{a,c\}$或 $A=\{a,b,c\}$.

★解题心得归纳:

两个集合 A 与 B 之间可能具有 $A\subseteq B$，$A\subsetneqq B$，$A=B$ 这三种关系；而这些关系都是由 A,B 所属的元素来决定的．当问题中出现了多个集合的复杂关系时，应利用三种基本关系对元素进行分析．子集与真子集是较重要的两个概念，解题时应注意这两个概念的区分.

例 4　设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{2x-1}{x+2}<1\right\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围______.

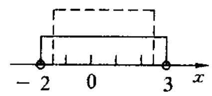


图 1 - 1

解:由$|x-a|<2$得 $a-2<x<a+2$，

$\therefore A=\{x|a-2<x<a+2\}$.

由$\frac{2x-1}{x+2}<1$得$\frac{x-3}{x+2}<0$，$-2<x<3$.

$\therefore B=\{x|-2<x<3\}$.

又 $A\subseteq B$，结合图 1 - 1，可得:$\begin{cases}a-2\geqslant-2,\\a+2\leqslant3.\end{cases}$

于是解得 a 的取值范围是 $0\leqslant a\leqslant1$.

★解题心得归纳:

研究两个由实数构成的数集间的关系时，应注意运用数轴的直观性来解题.

例 5　已知:集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$，$B=\{0,|x|,y\}$．若 $A=B$，求:$\left(x+\frac{1}{y}\right)+\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2001}+\frac{1}{y^{2001}}\right)$的值.

解:由 $A=B$ 且 $xy>0$，得 $\lg(xy)=0$，于是 $xy=1$，

$\therefore |x|=1$ 或 $y=1$，$\therefore\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=-1.\end{cases}$

当 $x=y=1$ 时，$A=\{1,1,0\}$这与集合元素的互异性相矛盾，故舍去.

当 $x=-1$，$y=-1$ 时，$A=\{-1,1,0\}$，$B=\{0,1,-1\}$满足条件，故当 $x=y=-1$ 时，

原式 $=\underbrace{(-1-1)+(1+1)+\cdots+(-1-1)+(1+1)}_{2000}+(-1-1)=-2$.

★解题心得归纳:

用列举法表示集合时，特别要注意集合元素的互异性.

例 6　已知:集合 $A=\{x\mid -x^2+3x+10\geqslant0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$．若 $B\subseteq A$，则实数 m 的取值范围是______.

解:(1)若 $B\neq\varnothing$,即 $m+1\leqslant 2m-1\Leftrightarrow m\geqslant 2$.

由已知,$B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}\Leftrightarrow 2\leqslant m\leqslant 3$.

若 $B=\varnothing$,即 $m+1>2m-1\Leftrightarrow m<2$,此时仍有 $B\subseteq A$.

★解题心得归纳:

要重视空集的特殊性,空集是一个特殊的重要的集合,它不含任何元素,是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集,它具有以下性质:

$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cup\varnothing=A$.

本题易误解为 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$,

由 $B\subseteq A$ 得 $\begin{cases}m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}\Leftrightarrow -3\leqslant m\leqslant 3$.

错因在于:忽略"空集是任何集合的子集"这一重要性质,而没有考虑 $B=\varnothing$ 的情况.

2. 求给定集合的交集、并集和补集

集合的运算主要有两类问题:一是直接求两个或两个以上集合的交、并、补集;二是已知其运算结果,求其中某些元素应具备的条件.

例 1 已知 $P=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$,则 $P\cap Q$ 等于(   ).

A. $\{(0,1),(1,2)\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $[1,+\infty)$

解:数集 P,Q 中的代表元素是 y,它表示函数的值域.本题实际上是求两个函数值域的交集.由 $P=\{y\mid y\geqslant 1\}$,$Q=\{y\mid y\in\mathbf{R}\}$知,$P\cap Q=P$,故选 D.

★解题心得归纳:

本题出错率颇高,容易误选 A,原因就是未能正确理解集合概念所致,误认为是求抛物线与直线的交点.

例 2 已知 I 为全集,集合 $M,N\subsetneqq I$,若 $M\cap N=N$,则(   ).

A. $\complement_I M\supseteq\complement_I N$　　B. $M\subseteq\complement_I N$

C. $\complement_I M\subseteq\complement_I N$　　D. $M\supseteq\complement_I N$

解:本题未给出具体元素,故宜用文代图进行.

满足 $M\cap N=N$ 的集合 M,N 之间的关系只能是图 1 - 2,图 1 - 3 中的两种情况.

于是可知,$\complement_I M\subseteq\complement_I N$.结合图形本题应选 C.

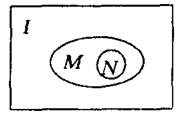


图 1 - 2

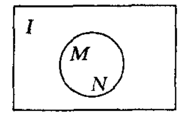


图 1 - 3

例 3 已知 $A=\{x\mid 2x^2+x+m=0\}$,$B=\{x\mid 2x^2+nx+2=0\}$,且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,求 $A\cup B$.

解:集合 A 是方程 $2x^2+x+m=0$ 的解集,集合 B 是方程 $2x^2+nx+2=0$ 的解集.由 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$可知,$\frac{1}{2}$既是方程 $2x^2+x+m=0$ 的解,又是方程 $2x^2+nx+2=0$ 的解.故可解得 $m=-1,n=-5$.由韦达定理可知方程 $2x^2+x+m=0$ 的另一解是 -1,方程 $2x^2+nx+2=0$ 的另一解是 2,所以 $A\cup B=\left\{\frac{1}{2},-1,2\right\}$.

★解题心得归纳:

欲求 $A\cup B$,须先求 A 与 B,而确定 m 与 n 的值是关键.

例 4 设集合 $A=\{-3,a^2,1+a\}$,$B=\{a-3,a^2+1,2a-1\}$,若 $A\cap B=\{-3\}$,求实数 a 的值.

解:由 $A\cap B=\{-3\}$得 $a^2\neq -3$,$1+a\neq -3$,而 $a-3,a^2+1,2a-1$ 中恰有一个值为 -3,若 $a-3=-3$,则 $a=0$;若 $2a-1=-3$,则 $a=-1$.当 $a=0$ 时,$A=\{-3,0,1\}$,$B=\{-3,1,-1\}$,这时 $A\cap B=\{-3,1\}$与 $A\cap B=\{-3\}$相矛盾,故 $a\neq 0$;当 $a=-1$时,$A=\{-3,1,0\}$,$B=\{-4,2,-3\}$,符合条件$A\cap B=\{-3\}$,故所求为 $a=-1$.

★解题心得归纳:

上述解法求得的 a 值是$A\cap B=\{-3\}$的必要条件,但不是充分条件.为得到使 $A\cap B=\{-3\}$的 a 值,应当进行检验.为什么要进行检验呢?原因在于原题中的 a 是作为$A\cap B=\{-3\}$的充分条件给出来的,忽略了原条件的充分性,很容易出错.

3. 注意集合语言转译的准确性

对于用集合语言叙述的问题,求解时往往需要转译成代数语言或几何语言;如果转译不准确,就会导致错误.

例 1　设全集 $I=\{(x,y)\mid x\in \mathbf{R},y\in \mathbf{R}\}$，集合 $M=\left\{(x,y)\left|\dfrac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$，$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $\complement_I(M\cup N)$ 等于(　　).

A. $\varnothing$　　　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

解：集合 M 是由直线 $y=x+1$ 除去点 $(2,3)$ 后的点组成的，集合 N 是由坐标平面上不在直线 $y=x+1$ 上的点组成的，因此 $M\cup N$ 是由坐标平面上除去点 $(2,3)$ 的点组成的，它关于坐标平面上的点组成的集合 I 的补集 $\complement_I(M\cup N)=\{(2,3)\}$，故应选 B.

★解题心得归纳：

本题易错选为 A. 原因是将集合 M 转译成了直线 $y=x+1$ 上的点的集合.

■4. 确定有限集合的子集、真子集及其个数

例 1　设集合 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，且 $B=\{0,1,2,3,4,5\}$，$C=\{0,2,4,6,8\}$，则集合 A 的个数是(　　).

A. 4　　　　B. 8

C. 16　　　　D. 32

解：由 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$ 知 $A\subseteq B\cap C$. 又 $B\cap C=\{0,2,4\}$，所以满足条件的集合 A 有：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{2\}$，$\{4\}$，$\{0,2\}$，$\{0,4\}$，$\{2,4\}$，$\{0,2,4\}$ 共 8 个. 本题应选择 B.

★解题心得归纳：

一个含有 n 个元素的集合，共有 2^n 个子集，2^n-1 个真子集.

例 2　若集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{1,x^2\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则满足条件的实数 x 的个数有(　　).

A. 1 个　　　　B. 2 个

C. 3 个　　　　D. 4 个

解：由 $A\cup B=\{1,3,x\}=A$ 易知 $B\subseteq A$，于是有 $x^2=3$ 或者 $x^2=x$，解之得 $x=\pm\sqrt{3}$ 或 $x=0$ 或 $x=1$，若 $x=1$，则与集合的元素互异性矛盾，所以满足条件的实数 x 有 3 个，故本题应选 C.

■5. 注意数形结合

集合问题大都比较抽象，解题时要尽可能借助数轴、直角坐标系或韦氏图等工具，将抽象问题直观化、形象化，然后利用数形结合的思想方法使问题灵活直观地获解.

例 1　设全集 $I=\{x\mid 0<x<10,x\in \mathbf{N}\}$，若 $A\cap B=\{3\}$，$A\cap\complement_I B=\{1,5,7\}$，$\complement_I A\cap\complement_I B=\{9\}$，求集合 A，B.

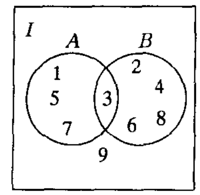


图 1 - 4

解：$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

画出韦氏图并根据题意填数如图 1 - 4. 由图可得：

$A=\{1,3,5,7\}$，

$B=\{2,3,4,6,8\}$.

★解题心得归纳：

所给集合是有限集时，首先要将全集 I 用列举法表示出来(具体化)，然后画出韦氏图，采取"填数法"来解决.

例 2　50 名学生报名参加 A，B 两项课外科技制作小组，报名参加 A 组的人数是全体学生人数的五分之三，报名参加 B 组的人数比报名参加 A 组的人数多 3 人，两组都没有报名的人数是同时报名参加两组的人数的三分之一还多 1 人，求同时报名参加 A，B 两组的人数及两组都没有报名的人数.

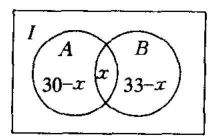


图 1 - 5

解：这是一道典型应用题. 易知参加 A 组和 B 组的人数分别为 30 和 33，如图 1 - 5，设集合 $A\cap B$ 的元素个数为 x，则由方程 $(30-x)+x+(33-x)+\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)=50$，可解得 $x=21$，$\dfrac{1}{3}x+1=8$，问题顺利获解.

■6. 注意利用分类讨论进行元素分析

有关求集合的个数和求参数的取值范围的范围，常常需要对集合中的元素进行分类讨论.

例 1　已知集合 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0,x\in \mathbf{R}\}$，若 $A\cap \mathbf{R}_+=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

解：$A\cap \mathbf{R}_+=\varnothing$ 等价于方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 没有实根(即 $A=\varnothing$)或者只有非正实根.

(1)若 $A=\varnothing$，即方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 无实数根 $\Leftrightarrow\Delta=(a+2)^2-4<0\Leftrightarrow -4<a<0$.

(2)若 $A\neq\varnothing$，方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 只有非正实数根 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4\geqslant0,\\-(a+2)\leqslant0\end{cases}\Leftrightarrow a\geqslant0$.

由(1)，(2)得 $a>-4$.

★解题心得归纳：

由交集定义可知，$A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$ 时，$A=\varnothing$ 或 $A\neq\varnothing$. 而本题常犯错误是丢掉 $A=\varnothing$ 的情形.

例 2 已知全集 $S=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$，$C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$，若 $A\cap B\subseteq C$，求实数 a 的取值范围.

解：集合 A,B,C 中的元素均是用不等式描述的，A,B 中不含参数，可先求出

$A=\{x\mid -2<x<3\}$，$B=\{x\mid x>2$ 或 $x<-4\}$，$A\cap B=\{x\mid 2<x<3\}$.

又 $C=\{x\mid (x-a)(x-3a)<0\}$.

欲使 $A\cap B\subseteq C$，须分类讨论：

(1)当 $a>0$ 时，$C=\{x\mid a<x<3a\}$，结合数轴知 $\begin{cases}a\leqslant2,\\3a\geqslant3,\end{cases}\therefore 1\leqslant a\leqslant2$；

(2)当 $a=0$ 时，$C=\varnothing$，不合题意；

(3)当 $a<0$ 时，$C=\{x\mid 3a<x<a\}$，结合数轴知 $\begin{cases}3a\leqslant2,\\a\geqslant3\end{cases}$ 无解. 综上，a 的取值范围是 $[1,2]$.

★解题心得归纳：

此例从集合关系 $A\cap B\subseteq C$ 入手进行分类讨论，在讨论过程中又借助数轴确定 a 的取值范围. 由此可知，在解题过程中，应该注意集合关系、基本图形（韦恩图和数轴）和分类讨论的综合运用.

例 3 集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，求 a 取何实数时，$A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立？

解：$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，

$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}=\{2,-4\}$.

由 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立可知，3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，将 3 代入方程得 $a^2-3a-10=0$，解之得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，$A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，此时 $A\cap C=\{2\}$ 与题设 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾.

当 $a=-2$ 时，$A=\{x\mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$，此时满足 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 与 $A\cap C=\varnothing$，故 $a=-2$ 为所求.

★解题心得归纳：

由题可知，$B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$. 由 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 可知，$A\cap B$ 非空，即 2 或 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解. 又由 $A\cap C=\varnothing$ 可知 2 和 -4 都不是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解，所以 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解.

7. 运用集合思想解题

集合的思想已成为现代数学思想向中学渗透的重要标志. 集合知识中隐含的着眼于全体、把握共性的基本思想以及探索个体、整体及相互之间关系的思维方法对整个中学数学有着极大的影响，子、交、并、补集等为我们认识事物之间的关系也提供了数学模型. 合理运用集合的有关知识及注意集合思想的渗透，将有助于探索其规律性，挖掘其应用价值，并使得某些数学问题的解决更为简单、明了. 举例说明如下.

(1)用集合模型判断充要条件

若视“一组研究对象的全体”为集合，把命题的总体设为集合 A（非空集合），把使命题结论成立的所有条件设为集合 B（非空集合）.

① 若 $A\subseteq B$，则命题的条件是命题结论成立的充分条件；

② 若 $A\supseteq B$，则命题的条件是命题结论成立的必要条件；

③ 若 $A=B$，则命题的条件是命题结论成立的充分必要条件；

④ 若 $A\nsubseteq B$，且 $B\nsubseteq A$，则命题的条件是命题结论成立的既非充分，又非必要条件.

于是借助以上模型可以将命题的条件与结论的关系转化为集合之间包含或相等关系，从而提高判断充要条件的正确率.

例 1 已知 p 是 r 的充分条件，r 是 s 的充分条件，q 是 s 的必要条件，试判断 s 是 p 的什么条件？p 是 q 的什么条件？

解：运用集合知识，有 $p\subseteq r\subseteq s\subseteq q$，即 $p\subseteq s$，$p\subseteq q$，因此 s 是 p 的必要条件，而 p 是 q 的充分条件.

★解题心得归纳：

当 $p(x)$ 是 $q(x)$ 成立的充分条件，用集合的知识解释为集合 $A=\{x\mid p(x)\}$ 是集合 $B=\{x\mid q(x)\}$ 的子集合；$p(x)$ 是 $q(x)$ 成立的充要条件用集合的知识

解释为集合 $A=B$.

例 2 判断 $x^2+y^2\leqslant 1$ 是 $|x|+|y|\leqslant 1$ 的什么条件?

解:设 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,$B=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$,则 A 是以原点为圆心、以 1 为半径的圆周及其内部,而 B 是以 $(0,1)$,$(1,0)$,$(-1,0)$,$(0,-1)$ 为顶点的正方形边界及其内部,因此 $A\supset B$.根据集合理论模型判断,$x^2+y^2\leqslant 1$ 是 $|x|+|y|\leqslant 1$ 的必要非充分条件.

(2)利用子集思想,确定参数取值范围

例 1 若 $M=\left\{x\mid \dfrac{\lg 2ax}{\lg(a+x)}<1\right\}$,$N=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$,且 $N\subseteq M$,求 a 的取值范围.

解:根据子集概念将原题转化为:

"当 $1<x\leqslant 2$ 时,$\dfrac{\lg 2ax}{\lg(a+x)}<1$ 恒成立,求 a 的取值范围".

会使问题获得简解,即

$\because x>1$,又 $2ax>0$,$\therefore a>0$.

从而 $a+x>1$,$\therefore \lg(a+x)>0$.

$\therefore \dfrac{\lg 2ax}{\lg(a+x)}<1\Leftrightarrow \lg 2ax<\lg(x+a)$

$\Leftrightarrow 2ax<a+x\Leftrightarrow a<\dfrac{x}{2x-1}$.

要使原不等式恒成立,只要

$0<a<\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)_{\min}=\dfrac{2}{3}$,即 $0<a<\dfrac{2}{3}$.

★解题心得归纳:

解答此类问题的基本思路是根据子集概念将问题转化为"确定恒成立的不等式中的参数范围"问题,然后根据函数的图像和性质求解.

例 2 设集合 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\}$,函数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}$ 的值域为 B,求使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的取值范围.

解:注意到 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

集合 $A=\{x\mid -3<x<2\}$,

$\therefore$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $-3<x<2$ 成立.

$\because x^2-x+1>0$,

$\therefore \begin{cases}x^2+ax-2>-3(x^2-x+1),\\ x^2+ax-2<2(x^2-x+1),\end{cases}$

即 $\begin{cases}4x^2+(a-3)x+1>0,\\ x^2-(a+2)x+4>0\end{cases}$ 恒成立.

$\therefore \begin{cases}\Delta_1=(a-3)^2-16<0,\\ \Delta_2=(a+2)^2-16<0.\end{cases}$ $\therefore -1<a<2$.

★解题心得归纳:

这里的集合 B 是一个"非必求量",若先求 $f(x)$ 的值域,再通过数轴,由 $B\subseteq A$ 列出关于 a 的不等式组,然后解不等式组,求出 a 的取值范围,无疑是十分繁琐的.如果根据子集概念,将 $B\subseteq A$ 转化为对任一函数值 $f(x)$ 都有 $f(x)\in A$,则问题就变得简单、明了.

例 3 设 $A=\{x\mid 1<x<3\}$,又设 B 是关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0,\\ x^2-2bx+5\leqslant 0\end{cases}$ 的解集,且 $A\subseteq B$,试确定 a,b 的取值范围.

解:根据子集概念,原题等价于"不等式组 $\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0, & ①\\ x^2-2bx+5\leqslant 0 & ②\end{cases}$ 对 $1<x<3$ 恒成立,试确定 a,b 的取值范围".

①,②可化为 $\begin{cases}a\leqslant -(x-1)^2+1,\\ b\geqslant \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{5}{x}\right).\end{cases}$

当 $1<x<3$ 时,$-3<-(x-1)^2+1<1$,

$\sqrt{5}\leqslant \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{5}{x}\right)<3$,$\therefore a\leqslant -3,b\geqslant 3$.

★解题心得归纳:

此题的常规解法是利用二次函数的图像求解.

(3)利用交集思想解题

例 1 已知不等式 $\lg(20-5x^2)>\lg(a-x)+1$ 的整数解只有 1,试求 a 的取值范围.

解:由题意,有 $\{x\mid 1-\sqrt{5-2a}<x<1+\sqrt{5-2a},x\in\mathbf{Z}\}=\{1\}$,则 $0<\sqrt{5-2a}\leqslant 1$,解之得 $2\leqslant a<\dfrac{5}{2}$.

★解题心得归纳:

本题中设 $A=\{x\mid 20-5x^2>0\}$,$B=\{x\mid a-x>0\}$,$C=\{x\mid 20-5x^2>10(a-x)\}$ 转化为求:满足 $A\cap B\cap C=\{1\}$ 时 a 的取值范围.

(4)利用并集思想解题

例 1 过点 $M(0,1)$ 作直线 l,使它被两条已知直线 $l_1:x-3y+10=0$ 和 $l_2:2x+y-8=0$ 所截得的线