华章数学译丛

1

Principles of Mathematical Analysis

数学分析原理

(原书第3版)

(美) Walter Rudin 著

赵慈庚 蒋铎 译

机械工业出版社
China Machine Press

华 章 数 学 译 丛

1

Principles of Mathematical Analysis

数学分析原理

（原书第3版）

（美）Walter Rudin 著

赵慈庚 蒋铎 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书是根据 W. Rudin 所著《Principles of Mathematical Analysis》译出的。原书是为数学专业的高年级本科生和一年级研究生写的数学分析教材。本书可供数学专业高年级学生、研究生和教师参考。

本书版权登记号：图字：01-2003-7233

图书在版编目（CIP）数据

数学分析原理：（原书第 3 版）/（美）卢丁（Rudin，W.）著；赵慈庚，蒋铎译.
—北京：机械工业出版社，2004．1
（华章数学译丛）
书名原文：Principles of Mathematical Analysis
ISBN 7-111-13417-6

Ⅰ．数…　Ⅱ．①卢…②赵…③蒋…　Ⅲ．数学分析—教材　Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 104980 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：蒋　祎
北京瑞德印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行
2004 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 19.75 印张
印数：0 001-5 000 册
定价：28.00 元

凡购本书，如有倒页、脱页、缺页，由本社发行部调换
本社购书热线：（010）68326294

前　　言

本书是为大学数学专业高年级学生或一年级研究生编写的，可作为分析课程的教科书。

这一版包含的论题，本质上与第二版相同，有些增加，有一点小的削减，还有一项重要的改组。我希望这些变动，能使这本教材更易接受，也更能吸引学习这门课程的学生。

经验使我相信，一开始就从有理数建立实数，从教学法上说，并不妥当(虽然逻辑上正确)。许多学生在初学之时完全不体会这样做的必要性。因此，将实数系做为具有最小上界性的有序域而引入，并且很快就对这个性质做了一些有益的应用。但是 Dedekind 结构没有略去。现在把它放在第 1 章的附录中，在适当时读者可以深入学习。

多变量函数的材料差不多完全重写了，补了许多细节，又添了不少例题和许多启示。反函数定理——第 9 章的关键项目——的证明，用压缩映像的不动点定理把它化简了。微分形式的讨论更加详细。加入了 Stokes 定理的一些应用。

关于其他的改变是：把 Riemann-Stieltjes 积分这一章做了一点调整，关于 Γ 函数，把读者自证的那一小段加到第 8 章里去了，并且有许多新的习题，其中大多数都给了十分详细的提示。

我又在几处说到了美国数学月刊或数学杂志上出现的作品，以期学生逐渐养成查阅期刊文献的习惯，这些旁涉多半是由 R. B. Burckel 的惠示。

在过去几年里，许多学生和教师及其他读者，对于本书的前两版，给我送来了更正、评论和其他注释。对此，我都非常尊重。借此机会对所有给我写信的各位致以真诚的谢意。

Walter Rudin

目 录

前言

第1章 实数系和复数系 …… 1
- 导引 …… 1
- 有序集 …… 2
- 域 …… 4
- 实数域 …… 7
- 广义实数系 …… 10
- 复数域 …… 10
- 欧氏空间 …… 13
- 附录 …… 15
- 习题 …… 18

第2章 基础拓扑 …… 21
- 有限集、可数集和不可数集 …… 21
- 度量空间 …… 26
- 紧集 …… 31
- 完全集 …… 35
- 连通集 …… 36
- 习题 …… 36

第3章 数列与级数 …… 41
- 收敛序列 …… 41
- 子序列 …… 44
- Cauchy 序列 …… 45
- 上极限和下极限 …… 47
- 一些特殊序列 …… 49
- 级数 …… 50
- 非负项级数 …… 52
- 数 e …… 54
- 根值验敛法与比率验敛法 …… 56
- 幂级数 …… 59
- 分部求和法 …… 60
- 绝对收敛 …… 61
- 级数的加法和乘法 …… 62
- 级数的重排 …… 65
- 习题 …… 67

第4章 连续性 …… 73
- 函数的极限 …… 73
- 连续函数 …… 74
- 连续性与紧性 …… 77
- 连续性与连通性 …… 81
- 间断 …… 81
- 单调函数 …… 83
- 无限极限与在无穷远点的极限 …… 84
- 习题 …… 85

第5章 微分法 …… 91
- 实函数的导数 …… 91
- 中值定理 …… 94
- 导数的连续性 …… 95
- L'Hospital 法则 …… 95
- 高阶导数 …… 97
- Taylor 定理 …… 97
- 向量值函数的微分法 …… 98
- 习题 …… 100

第6章 RIEMANN-STIELTJES 积分 …… 107
- 积分的定义和存在性 …… 107
- 积分的性质 …… 114
- 积分与微分 …… 119
- 向量值函数的积分 …… 120
- 可求长曲线 …… 122
- 习题 …… 123

第7章 函数序列与函数项级数 …… 129
- 主要问题的讨论 …… 129
- 一致收敛性 …… 132
- 一致收敛性与连续性 …… 133
- 一致收敛性与积分 …… 136
- 一致收敛性与微分 …… 136
- 等度连续的函数族 …… 139
- Stone-Weierstrass 定理 …… 142

习题 …………………………… 148
第 8 章　一些特殊函数 ……… 155
幂级数 ………………………… 155
指数函数与对数函数 ………… 160
三角函数 ……………………… 164
复数域的代数完备性 ………… 166
Fourier 级数 ………………… 167
Γ 函数 ………………………… 173
习题 …………………………… 177
第 9 章　多元函数 …………… 185
线性变换 ……………………… 185
微分法 ………………………… 191
凝缩原理 ……………………… 199
反函数定理 …………………… 200
隐函数定理 …………………… 202
秩定理 ………………………… 207
行列式 ………………………… 210
高阶导数 ……………………… 213
积分的微分法 ………………… 214
习题 …………………………… 216
第 10 章　微分形式的积分 …… 223
积分 …………………………… 223
本原映射 ……………………… 225
单位的分割 …………………… 227
变量代换 ……………………… 228
微分形式 ……………………… 230
单形与链 ……………………… 242
Stokes 定理 …………………… 248
闭形式与恰当形式 …………… 251
向量分析 ……………………… 255
习题 …………………………… 262
第 11 章　LEBESGUE 理论 …… 275
集函数 ………………………… 275
Lebesgue 测度的建立 ………… 276
测度空间 ……………………… 283
可测函数 ……………………… 283
简单函数 ……………………… 286
积分 …………………………… 286
与 Riemann 积分的比较 ……… 294
复函数的积分 ………………… 296
$\mathscr{L}^2$ 类的函数 ……………………… 297
习题 …………………………… 302
参考书目 ……………………… 305

重要符号表

下表所列符号附以简短说明及其定义所在之页数。

$\in$	属于	2
$\notin$	不属于	2
$\subset,\supset$	包含符号	2
Q	有理数域	2
$<,\leqslant,>,\geqslant$	不等符号	2
sup	最小上界	3
inf	最大下界	3
R	实数域	7
$+\infty,-\infty,\infty$	无穷大	10,23
$\bar{Z}$	复共轭	12
$\mathrm{Re}(z)$	实部	12
$\mathrm{Im}(z)$	虚部	12
$\lvert z\rvert$	绝对值	12
Σ	求和符号	13,49
R^k	k 维欧氏空间	13
$\mathbf{0}$	零向量	14
$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$	内积	14
$\lvert\mathbf{x}\rvert$	向量 $\mathbf{x}$ 的模	14
$\{x_n\}$	序列	22
$\bigcup,\cup$	并	23
$\bigcap,\cap$	交	23
(a,b)	开区间	26
$[a,b]$	闭区间	26
E^c	E 的余集	27
E'	E 的极限点的集	30
$\bar{E}$	E 的闭包	30
lim	极限	41
$\to$	收敛于	41,85
lim sup	上极限	48
lim inf	下极限	48
$g\circ f$	复合	75
$f(x+)$	右极限	81
$f(x-)$	左极限	81
$f',f'(x)$	导数	91,98
$U(P,f),U(P,f,\alpha),L(P,f),L(P,f,\alpha)$	Riemann 和	107,108
$\mathscr{R},\mathscr{R}(\alpha)$	Riemann(Stieltjes)可积函数类	107,109
$\lVert\ \rVert$	范数	135,297
$\mathscr{C}(X)$	连续函数空间	135
exp	指数函数	162
D_N	Dirichlet 核	170
$\Gamma(x)$	Γ 函数	173
$\{e_1,\cdots,e_n\}$	标准基	185
$L(X),L(X,Y)$	线性变换空间	187
$[A]$	矩阵	190
D_jf	偏导数	195
∇f	梯度	196
$\mathscr{C}',\mathscr{C}''$	可微函数类	198,213
$\det[A]$	行列式	210
$J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$	函数行列式	213
$\dfrac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}$	函数行列式	213

I^k	k-方格	223
Q^k	k-单形	224
$\mathrm{d}x$	基本 k-形式	233
$\wedge$	乘号	231
d	微分算子	236
ω_T	ω 的变换	239
∂	边缘算子	245
$\nabla\times\boldsymbol{F}$	旋度	256
$\nabla\cdot\boldsymbol{F}$	散度	256
$\mathscr{E}$	初等集的环	277
m	Lebesgue 测度	276,282
μ	测度	278,283
$\mathfrak{M}_F,\mathfrak{M}$	可测集的类	279
$\{x\mid P\}$	带有性质 P 的集	283
f^+,f^-	f 的正(负)部	285
K_E	特征函数	286
$\mathscr{L},\mathscr{L}(\mu),\mathscr{L}^2,\mathscr{L}^2(\mu)$	Lebesgue 可积的函数类	288,297

第1章　实数系和复数系

导引

分析学的主要概念(如收敛、连续、微分法和积分法)，必须有精确定义的数的概念作根据，才能讨论得满意. 然而，我们并不讨论那些约束整数算术的公理，但假定读者已熟悉了有理数(即形如 m/n 的数，这里 m 和 n 都是整数且 $n\neq 0$).

有理数系不论作为一个域来说，还是作为一个有序集(这些术语将在第 1.6 段与 1.12 段中定义)来说，对于很多意图殊感不足. 例如，没有有理数 p 能满足 $p^2=2$. (我们马上就要证明这点). 这就势必引进所谓"无理数"，它们时常被写成无穷十进小数的展开式，而认为相应的有限十进小数是"逼近"它们的. 例如序列

$$1,1.4,1.41,1.414,1.4142,\cdots$$

"趋于$\sqrt{2}$". 但是，若不先把无理数$\sqrt{2}$明确地规定了，必将发生疑问：上面这个序列"趋于"的是什么呢?

所谓的"实数系"建立起来以后，这类的问题马上就得到回答.

1.1　例　我们现在证明方程

$$p^2 = 2 \tag{1}$$

不能被任何有理数 p 满足. 倘若有那样一个 p，我们可以把它写成$p=m/n$，其中 m 及 n 都是整数，而且可以选得不都是偶数. 假定我们这样做了. 于是由(1)式得出

$$m^2 = 2n^2, \tag{2}$$

这表明 m^2 是偶数，因此 m 是偶数(如果 m 是奇数，那么 m^2 将是奇数)，因而 m^2 能被 4 整除. 于是(2)的右边能被 4 整除，因而 n^2 是偶数，这又说明 n 是偶数.

假定(1)式成立，就导致 m 及 n 都是偶数的结论，这与 m 及 n 的选择相矛盾. 因此，对于有理数 p，(1)式不能成立.

现在我们把这种情况考察得再稍微严密一些. 令 A 是使 $p^2<2$ 的一切正有理数 p 的集，B 是使 $p^2>2$ 的一切正有理数 p 的集. 我们来证明 A 里没有最大数，B 里没有最小数.

更明确地说，对于 A 中的每个 p，能在 A 中找到一个有理数 q，而 $p<q$，并且对于 B 中的每个 p，能在 B 中找到一个有理数 q，而 $q<p$.

为了做这件事，给每个有理数 $p>0$，配置一个数

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}. \tag{3}$$

于是

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}. \tag{4}$$

如果 p 在 A 中，那么 $p^2-2<0$，(3)式说明 $q>p$，而(4)式说明 $q^2<2$，因而 q 在 A 中.

如果 p 在 B 中，那么 $p^2-2>0$，(3)式说明 $0<q<p$，而(4)式说明 $q^2>2$，因而 q 在 B 中.

1.2 评注 上面这番讨论的目的就是说明：尽管两个有理数之间还有另外的有理数(因为，如果 $r<s$，那么 $r<\frac{r+s}{2}<s$)，有理数系还是有某些空隙. 而实数系填满了这些空隙. 这就是实数系在分析学中能起基础作用的主要原因.

为了说明它和复数系的结构，我们先简单地讨论一下有序集和域的一般概念.

这里有一些在全书中要用的标准的集论的术语.

1.3 定义 若 A 是任意集(它的元素可以是数，也可以是其他物件)，我们用 $x\in A$ 表示 x 是 A 的一个元(或元素).

如果 x 不是 A 的元，就写成 $x\notin A$.

不包含元素的集称为空集. 至少包含一个元素的集，叫做非空集.

如果 A、B 都是集，并且如果 A 的每个元素是 B 的元素，就说 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 此外，如果 B 中有一个元素不在 A 中，就说 A 是 B 的真子集. 注意，对于每个集 A，有 $A\subset A$.

如果 $A\subset B$，并且 $B\subset A$，就写成 $A=B$. 不然就写成 $A\neq B$.

1.4 定义 在第1章，自始至终用 Q 表示所有有理数构成的集.

有序集

1.5 定义 设 S 是一个集. S 上的序是一种关系，记作 $<$，它有下面的两个性质：

(i) 如果 $x\in S$ 并且 $y\in S$，那么在

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

三种述语之中，有一种且只有一种成立.

(ii) 如果 x，y，$z\in S$，又如果 $x<y$ 且 $y<z$，那么 $x<z$.

述语“$x<y$”可以读作“x 少于 y”或“x 小于 y”或“x 先于 y”.

用 $y>x$ 代替 $x<y$，时常是方便的.

记号 $x\leqslant y$ 指的是 $x<y$ 或 $x=y$，而不细说二者之中谁能成立．换句话说，$x\leqslant y$ 是 $x>y$ 的否定．

1.6 定义 在集 S 里定义了一种序，便是一个有序集

例如，如果对于任意两个有理数 r、s，规定当 $s-r$ 是正有理数时表示 $r<s$，Q 就是一个有序集．

1.7 定义 设 S 是有序集，而 $E\subset S$．如果存在 $\beta\in S$，而每个 $x\in E$，满足 $x\leqslant\beta$，我们就说 E 上有界，并称 β 为 E 的一个上界．

用类似的方法以定义下界（把 $\leqslant$ 换成 $\geqslant$ 就行了）．

1.8 定义 设 S 是有序集，$E\subset S$，且 E 上有界．设存在一个 $\alpha\in S$，它具有以下性质：

(i) α 是 E 的上界．

(ii) 如果 $\gamma<\alpha$，γ 就不是 E 的上界．

便把 α 叫做 E 的最小上界［由(ii)来看，显然最多有一个这样的 α］或 E 的上确界，而记作

$$\alpha=\sup E.$$

类似地可定义下有界集 E 的最大下界或下确界．述语

$$\alpha=\inf E$$

表示 α 是 E 的一个下界，而任何合于 $\beta>\alpha$ 的 β，不能是 E 的下界．

1.9 例

(a) 把例 1.1 中的集 A 与 B 看作有序集 Q 的子集．集 A 上有界．实际上，A 的那些上界，刚好就是 B 的那些元．因为 B 没有最小的元，所以 A 在 Q 中没有最小上界．

类似地，B 下有界：B 的所有下界的集，由 A 和所有合于 $r\in Q$ 并且 $r\leqslant 0$ 的 r 组成．因为 A 没有最大的元，所以 B 在 Q 中没有最大下界．

(b) 如果 $\alpha=\sup E$ 存在．这 α 可以是 E 的元，也可以不是 E 的元．例如，假设 E_1 是所有合于 $r\in Q$ 及 $r<0$ 的集．假设 E_2 是所有合于 $r\in Q$ 及 $r\leqslant 0$ 的集．于是

$$\sup E_1=\sup E_2=0,$$

而 $0\notin E_1$，$0\in E_2$．

(c) 假设 $n=1,2,3,\cdots$，E 由所有数 $1/n$ 组成，那么，$\sup E=1$，它在 E 中，但 $\inf E=0$ 不在 E 中．

1.10 定义 有序集 S，如果具有性质：

若 $E\subset S$，E 不空，且 E 上有界时，$\sup E$ 便在 S 里．就说 S 有最小上界性．

例 1.9(a) 说明 Q 没有最小上界性．

我们现在来证明，在最大下界与最小上界之间，有密切的关系，也就是有最小上界性的每个有序集，一定也有最大下界性.

1.11 定理 设 S 是具有最小上界性的有序集，$B\subset S$，B 不空且 B 下有界. 令 L 是 B 的所有下界的集. 那么

$$\alpha = \sup L$$

在 S 存在，并且 $\alpha=\inf B$.

特别地说就是 $\inf B$ 在 S 存在

证 因 B 下有界，L 不空. L 刚好由这样一些 $y\in S$ 组成，它们对于每个 $x\in B$，满足不等式 $y\leqslant x$. 可见每个 $x\in B$ 是 L 的上界. 于是 L 上有界，因而我们对 S 的假定意味着 S 里有 L 的上确界；把它叫做 α.

如果 $\gamma<\alpha$，那么 γ 不是 L 的上界(参看定义 1.8)，因此 $\gamma\notin B$. 由此对于每个 $x\in B$，$\alpha\leqslant x$. 所以 $\alpha\in L$.

如果 $\alpha<\beta$，由于 α 是 L 的上界，必然 $\beta\notin L$.

我们已证明了：$\alpha\in L$. 而当 $\beta>\alpha$ 时，就有 $\beta\notin L$. 换句话说，α 是 B 的下界，但若 $\beta>\alpha$，β 就不是 B 的下界. 这就是说 $\alpha=\inf B$.

域

1.12 定义 域是一个集 F，它具有两种运算，叫做加法和乘法，这些运算满足所谓“域的公理”(A)，(M)，及(D)：

(A)加法公理

(A1)如果 $x\in F$，$y\in F$，它们的和 $x+y$ 在 F 中.

(A2)加法是可交换的：对于所有 x，$y\in F$，

$$x+y=y+x.$$

(A3)加法是可结合的：对于所有 x，y，$z\in F$，

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

(A4)F 含有元素 0，对于每个 $x\in F$，有

$$0+x=x.$$

(A5)对应于每个 $x\in F$，有一元素 $-x\in F$，合于

$$x+(-x)=0.$$

(M)乘法公理

(M1)如果 $x\in F$，$y\in F$，它们的乘积 xy 在 F 中.

(M2)乘法是可交换的：对于所有的 x，$y\in F$，

$$xy=yx.$$

(M3)乘法是结合的：对于所有的 x，y，$z\in F$，

$$(xy)z = x(yz).$$

(M4)F 含有元素 $1\neq 0$，对于每个 $x\in F$，

$$1x = x.$$

(M5)如果 $x\in F$ 且 $x\neq 0$，存在元素 $1/x$，合于

$$x\cdot(1/x) = 1.$$

(D)分配律

$$x(y+z) = xy + xz$$

对于所有 x，y，$z\in F$ 成立.

1.13 评注

(a)人们经常(在域中)用

$$x-y,\frac{x}{y},x+y+z,xyz,x^2,x^3,2x,3x,\cdots$$

以代替

$$x+(-y),x\cdot\left(\frac{1}{y}\right),(x+y)+z,(xy)z,$$
$$xx,xxx,x+x,x+x+x,\cdots.$$

(b)如果在所有有理数的集 Q 里，使加法与乘法采取通常的意义，域的公理显然适用. 因此，Q 是一个域.

(c)虽然详细地研究域(或其他的代数结构)并不是我们的目的，但是证明 Q 的某些众所周知的性质是域公理的推论，还是值得一做的；一旦这样做了，就不需要对实数和复数再去证明这些性质了.

1.14 命题 加法公理包含着以下几个述语：

(a)如果 $x+y=x+z$，就有 $y=z$；

(b)如果 $x+y=x$，就有 $y=0$；

(c)如果 $x+y=0$，就有 $y=-x$；

(d)$-(-x)=x$.

(a)是消去律. (b)中 y 的存在是(A_4)假定了的，(b)断定它的惟一性；(c)中 y 的存在，由(A_5)假定，(c)断定其惟一性.

证 $x+y=x+z$ 时，(A)组公理可以给出

$$y=0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y)$$
$$=-x+(x+z)=(-x+x)+z=0+z=z.$$

(a)得证. 在(a)中取 $z=0$ 就是(b). 在(a)中取 $z=-x$ 就是(c).

因 $-x+x=0$,(c)(用 $-x$ 代替 x, x 代替 y)就能产生出(d).

1.15 命题 乘法公理包含着以下几个述语:

(a)如果 $x\neq0$, 并且 $xy=xz$, 就有 $y=z$;

(b)如果 $x\neq0$, 并且 $xy=x$, 就有 $y=1$;

(c)如果 $x\neq0$, 并且 $xy=1$, 就有 $y=1/x$;

(d)如果 $x\neq0$, 就有 $1/(1/x)=x$.

证明与命题 1.14 的证明类似,所以从略.

1.16 命题 对于任何 $x, y, z\in F$, 域公理包含着以下的述语

(a) $0x=0$

(b)如果 $x\neq0$, 且 $y\neq0$, 那么 $xy\neq0$.

(c) $(-x)y=-(xy)=x(-y)$.

(d) $(-x)(-y)=xy$.

证 $0x+0x=(0+0)x=0x$. 因此,由 1.14(b)有 $0x=0$, 而(a)成立.

次设 $x\neq0$, $y\neq0$ 而 $xy=0$. 于是由(a)能推出

$$1=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0=0$$

矛盾. 于是(b)成立.

(c)中前一等式,可由

$$(-x)y+xy=(-x+x)y=0y=0$$

结合 1.14(c)得来;(c)的后半可用同样方法证明. 最后,由(c)及 1.14(d)得

$$(-x)(-y)=-[x(-y)]=-[-(xy)]=xy.$$

1.17 定义 有序域是一个域 F, 又是合于下列两条件的有序集

(i)当 $x, y, z\in F$ 且 $y<z$ 时, $x+y<x+z$;

(ii)如果 $x, y\in F$, $x>0$ 且 $y>0$, 那么 $xy>0$.

如果 $x>0$, 就说 x 是正的;如果 $x<0$, 就说 x 是负的.

例如, Q 是有序域.

凡属研究不等式关系时所施行的一切熟知的规则,可以用到任何有序域上:用正(负)量乘时,保留(逆转)不等式的方向,平方不为负数,等等. 下面的命题罗列了其中的一些.

1.18 命题 在每个有序域中,下面几条述语都正确:

(a)如果 $x>0$, 那么 $-x<0$; 反过来也对.

(b)如果 $x>0$ 而 $y<z$, 那么 $xy<xz$.

(c)如果 $x<0$ 而 $y<z$, 那么 $xy>xz$.

(d)如果 $x\neq0$, 那么 $x^2>0$. 特别有 $1>0$.

(e)如果 $0<x<y$，那么 $0<1/y<1/x$.

证

(a)如果 $x>0$，那么 $0=-x+x>-x+0=-x$，因此，$-x<0$. 如果 $x<0$，那么 $0=-x+x<-x+0$；因此 $-x>0$. 这就证明了(a).

(b)因为 $z>y$，就有 $z-y>y-y=0$，因此，$x(z-y)>0$，所以

$$xz = x(z-y)+xy > 0+xy = xy.$$

(c)由(a)、(b)及命题 1.16(c)

$$-[x(z-y)] = (-x)(z-y) > 0,$$

因此 $x(z-y)<0$，而得 $xz<xy$.

(d)如果 $x>0$，由定义 1.17 的第(ii)部分就得出 $x^2>0$. 如果 $x<0$，那么 $-x>0$，因此 $(-x)^2>0$. 但是根据命题 1.16(d)，$x^2=(-x)^2$. 因为 $1=1^2$，$1>0$.

(e)如果 $y>0$，而 $v\leqslant 0$，那么 $yv\leqslant 0$. 但 $y\cdot(1/y)=1>0$. 因此 $1/y>0$. 类似地可得 $1/x>0$. 如果把不等式 $x<y$ 两端乘以正量 $(1/x)(1/y)$，就得到 $1/y<1/x$.

实数域

现在叙述存在定理，这是本章的核心

1.19 定理 *具有最小上界性的有序域 R 存在.*

此外，R 包容着 Q 作为其子域.

第二句话表示 $Q\subset R$ 而且把 R 中的加法与乘法运算用于 Q 的元时，与有理数的普通运算相一致；又正有理数是 R 中的正元素.

R 的元叫做实数.

定理 1.19 的证明相当地长，而且有几分烦琐，所以把它放在第 1 章的附录中了. 这证明实际是从 Q 来构造 R.

不用费多大劲，就能从这种构造法提炼出下一定理来. 但是我们宁愿从定理 1.19 来推导它，因为这样可以对于人们怎样运用最小上界性提供一个很好的范例.

1.20 定理

(a)如果 $x\in R$，$y\in R$ 且 $x>0$，那么，必定存在正整数 n，使得

$$nx > y.$$

(b)如果 $x\in R$，$y\in R$ 且 $x<y$，那么一定存在 $p\in Q$ 合于

$$x < p < y.$$

(a)时常被称为 R 的阿基米德性. (b)可以用 Q 在 R 中稠密的说法来陈述，意思是说：任何两实数之间总有有理数.

证

(a)设 A 是所有 nx 组成的集，这里 n 遍历正整数. 如果(a)不成立，那么 y 将是 A 的一个上界. 但是这样的话，R 里就有 A 的最小上界. 令 $\alpha=\sup A$. 因为 $x>0$，于是 $\alpha-x<\alpha$，并且 $\alpha-x$ 不是 A 的上界. 因此，对某个正整数 m，$\alpha-x<mx$. 但是这样的话就该 $\alpha<(m+1)x\in A$，然而这是不可能的，因为 α 是 A 的上界.

(b)由 $x<y$，得 $y-x>0$；于是(a)提供一个正整数 n 使得

$$n(y-x)>1.$$

再应用(a)，可以得到正整数 m_1 及 m_2，合于 $m_1>nx$. $m_2>-nx$. 于是

$$-m_2<nx<m_1.$$

因此有正整数 $m(-m_2\leqslant m\leqslant m_1)$使得

$$m-1\leqslant nx<m.$$

将这些不等式联系起来就得到

$$nx<m\leqslant 1+nx<ny.$$

因为 $n>0$，从而

$$x<\frac{m}{n}<y.$$

这就证明了(b)，而 $p=m/n$.

现在证明正实数的 n 次方根存在. 这个证明说明，在导引中所指出的困难($\sqrt{2}$的无理性)，是如何能在 R 里处理的.

1.21 定理 对于每个实数 $x>0$ 及每个整数 $n>0$，有一个且仅有一个实数 $y>0$，使得 $y^n=x$.

此数 y 记作$\sqrt[n]{x}$或 $x^{\frac{1}{n}}$.

证 这样的 y 最多有一个：这是显然的，因为由 $0<y_1<y_2$ 就有 $y_1^n<y_2^n$.

设由满足 $t^n<x$ 的所有正实数 t 组成集 E.

如果 $t=x/(1+x)$，那么 $0<t<1$. 由此 $t^n<t<x$. 所以 $t\in E$ 而 E 不空.

如果 $t>1+x$，那么 $t^n<t>x$，因此 $t\notin E$. 所以 $1+x$ 是 E 的上界.

于是，定理 1.19 保证

$$y=\sup E$$

存在. 为了证明 $y^n=x$，我们证明无论是 $y^n<x$ 或是 $y^n>x$ 都会导致矛盾.

恒等式 $b^n-a^n=(b-a)(b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+a^{n-1})$ 当 $0<a<b$ 时，能产生不等式

$$b^n-a^n<(b-a)nb^{n-1}.$$

假如 $y^n<x$，选一个 h，要它满足 $0<h<1$ 和

$$h<\frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}.$$

置 $a=y$，$b=y+h$，就得

$$(y+h)^n-y^n<hn(y+h)^{n-1}<hn(y+1)^{n-1}<x-y^n.$$

于是 $(y+h)^n<x$ 而 $y+h\in E$. 因 $y+h>y$，这与 y 是 E 的上界这事实矛盾.

假如 $y^n>x$. 置

$$k=\frac{y^n-x}{ny^{n-1}}.$$

于是 $0<k<y$. 如果 $t\geqslant y-k$，便可以推知

$$y^n-t^n\leqslant y^n-(y-k)^n<kny^{n-1}=y^n-x.$$

所以 $t^n>x$. 于是 $t\notin E$. 因之 $y-k$ 是 E 的上界.

但 $y-k<y$，这与 y 是 E 的最小上界的事实矛盾.

由此 $y^n=x$. 证明完毕.

系 如果 a，b 是正实数，而 n 是正整数，那么

$$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}.$$

证 命 $\alpha=a^{1/n}$，$\beta=b^{1/n}$. 由于乘法可以交换[定义 1.12 中之公理(M2)]，所以

$$ab=\alpha^n\beta^n=(\alpha\beta)^n,$$

由定理 1.21 所说的惟一性可以断定：$(ab)^{1/n}=\alpha\beta=a^{1/n}b^{1/n}$.

1.22 十进小数 我们指出实数和十进小数之间的关系作为本节的结束.

设 $x>0$ 是实数，令 n_0 是合于 $n_0\leqslant x$ 的最大整数. (注意，n_0 的存在性，依赖于 R 的阿基米德性.)在取定 n_0，n_1，…，n_{k-1}之后，令 n_k 是合于

$$n_0+\frac{n_1}{10}+\cdots+\frac{n_k}{10^k}\leqslant x.$$

的最大整数. 令 E 是由数

$$n_0+\frac{n_1}{10}+\cdots+\frac{n_k}{10^k}\quad(k=0,1,2,\cdots)\tag{5}$$