常微分方程式

本書內容提要

本書係以挨耳畢柏巴赫 (L. Bieberbach) 常微分方程式論 (Theorie der Differentialgleichungen)爲藍本，並參酌依加姆克(E. Kamke)、挨耳薛列信格(L. Schlesinger)、塞累舍裴斯 (Serret-scheffers) 諸人的著作，編輯而成。從第一階常微分方程式、第二階常微分方程式，到一般常微分方程式，論述極爲詳盡，包含範圍很廣，可作大學教本之用。

乙酉學社叢書第一集

常微分方程式

沈璿編譯

中華書局出版

一九五一年十月初版

大學用書

乙酉學社叢書 常微分方程式（全一冊）

◎定價人民幣四萬六千元

編譯者 沈璿

出版者 中華書局股份有限公司 上海河南中路二二一號

印刷者 中華書局上海印刷廠 上海澳門路四七七號

發行者 中國圖書發行公司 三聯・中華・商務・開明・聯營聯合組織

各地分店 三聯書店 中華書局 商務印書館 開明書店 聯營書店

總月編號(15451) 印數1－3,000

自 序

本書係以

L. Bieberbach: Theorie der Differentialgleichungen 爲藍本，更參酌

E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen

L. Schlesinger: Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage

Serret-Scheffers: Lehrbuch der Differential und Integralrechnung Ⅲ

等書編譯而成;微分方程式所涉範圍頗廣,譯者菲才,謬誤之處,恐非鮮少,倘蒙海內碩學不吝指正,幸甚幸甚.

當編譯時,曾承楊寄凡先生指示所用名詞, 修飾行文,以及許槑君描畫所有圖表,特誌之以表謝悃.

一九五一年二月　　　　編譯者識

常微分方程式

目　錄

常微分方程式

緒 言

凡表示**因變數**與其**導數**及**自變數**間之關係之**方程式**，稱曰**微分方程式**(1)；若其中祇含有一箇**自變數**，則稱之曰**常微分方程式**(2)．普通一般常微分方程式具有如下之形式：

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

此中，f 爲既知函數之記號；**因變數** y 爲一箇**自變數** x 之未知函數；並因 y 之導數之最高階數(3) 爲n，更稱之曰第 n 階常微分方程式．例如

$$\frac{dy}{dx}-y-x=0$$

爲第一階常微分方程式，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

爲第二階常微分方程式．

將微分方程式化成導數之**有理整式**時，其最高階導數之最高冪數稱曰該微分方程式之次數(4)．例如

$$\frac{dy}{dx}-y-x=0$$

$$\frac{dy}{dx}+x^{\frac{3}{2}}y=0$$

等稱曰第一次第一階常微分方程式；

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=3\frac{d^2y}{dx^2}$$

或以之化成導數之有理整式，卽

(1)differential equation, l'équation differentielle, die Differentialgleichung. (2)ordinary differential equation, l'équation differentielle ordinaire, die gewöhnliche Differentialgleichung. (3)order, l'ordre, die Ordnung. (4)degree, le degré, der Grad.

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

稱曰第二次第二階常微分方程式.普通關於微分方程式之次之名稱,實際罕有重要性;惟微分方程式中,其未知函數及各階之導數爲一次之有理整式時,特稱之曰**線性微分方程式**(1),此則一重要之分類名稱也.

凡微分方程式中,含有關於二箇或二箇以上之自變數之偏導數者,稱曰**偏微分方程式**(2),常微分方程式之階之意義,亦可應用於此.例如

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=e^x$$

爲第一階偏微分方程式,

$$\frac{\partial z}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

爲第二階偏微分方程式. 普通一般含有二箇自變數 x,y 之第 n 階偏微分方程式,以函數記號表之,則如下:

$$f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\cdots\frac{\partial^n z}{\partial x^n},\cdots\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)=0$$

以上所述者, 僅指一箇單獨微分方程式而言; 更有若干微分方程式,作成一系,同時成立,此時得一組**聯立微分方程式**(3);例如

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=z\\ \frac{dz}{dx}&=-y\end{aligned}\right\}\qquad\qquad \left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x}+(z+3x^2)\frac{\partial f}{\partial u}=0\\ &\frac{\partial f}{\partial y}+y\frac{\partial f}{\partial u}=0\\ &\frac{\partial f}{\partial z}+x\frac{\partial f}{\partial u}=0\end{aligned}\right\}$$

左一組係由二箇常微分方程式而成,右一組含有三箇偏微分方程式.聯立微分方程式之含有一箇自變數者,稱曰聯立常微分方程式;其含有關於二箇或以上之自變數之偏導數者,稱曰聯立偏微分方程式.

常微分方程式與偏微分方程式之名稱以外, 尙有稱爲**全微分方程**

(1)linear differential equation, l'équation differentielle linéare, die lineare Differentialgleichung, (2)partial differential equation, l'équation aux derivées partielles, die partielle Differentialgleichung. (3)simultaneous differential equations 或 system of differential equations, le système des équations differentielles (simultanées), das (simultane) Differentialgleichungensystem.

式(1)之一種.普通包含於常微分方程式之變數中,以 x 爲自變數,則此外以因變數與導數視爲 x 之函數;又於含有二箇自變數之偏微分方程式,以 x,y 爲其二箇自變數,則此外以因變數與偏導數視爲 x,y 之函數;但所謂**全微分方程式**者,不一定以何者爲**自變數或因變數**,乃僅決定數箇變數之微分間之關係而已.例如

$$xdx+ydy=0$$

$$dx^2+dy^2+dz^2=0$$

等.普通一般聯立全微分方程式具有如下之形式:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1,x_2,\cdots x_n,dx_1,dx_2,\cdots dx_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\cdots x_n,dx_1,dx_2,\cdots dx_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots x_n,dx_1,dx_2,\cdots dx_n)=0 \end{array}\right\}$$

此中 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 爲 n 箇變數,$f_1,f_2,\cdots f_m$ 係表示 $dx_1,dx_2,\cdots dx_n$ 之齊次式之記號.

求凡滿足微分方程式或微分方程式系之未知函數(卽因變數),稱曰解微分方程式或解微分方程式系,而求得之函數,具有可取其導數之性質時,稱曰該微分方程式或微分方程式系之**解或積分**(2);有時由微分方程式或微分方程式系所導出之自變數與因變數間之關係式(當然不含導數),亦稱曰其**解或積分**. 解或積分所表示之幾何圖形,稱曰**積分曲線**(3).

微分方程式論之課題,要係確定凡滿足微分方程式或微分方程式系之函數之性質;其次,求此等函數之顯式,譬如於常微分方程式,如何得以 x 之**顯函數**表示其未知函數 y,但此非恆屬可能;此外,如凡表示解之函數,在函數論上之特性,譬如該函數所表曲線之形狀與微分方程

(1)total differential equation, l'équation differentielle totale, die totale Differentialgleichung. (2)solutión 或 integral, lasolution 或 l'intégrale, die Lösung 或 das Integral. (3)integral curve, la courbe intégrale, die Integralkurve 或 diel Lösungskurve,

式所具之性質有如何關係，並如何得由此等性質而決定積分曲線之形狀等，欲闡明此等事情，乃較爲困難；此時吾人遭遇之問題，即如何在多數之解中選出一適合於已知性質之解，亦即由數值上探索積分曲線之形狀之問題；又由純粹數學上之思考或由物理學、化學、天文學、工藝學等之關係而導得多數相似之問題，故設立一解微分方程式之理論，須得計算甫述各方面之問題；於是，吾人先須將各種問題分類，而預先研究各分類問題之解法，然後逢至各箇問題時，祇須先決定其所屬分類而再稍加以箇別之計算可矣.

今爲解釋積分曲線之意義起見，就最簡單之第一階微分方程式討究於下：設所與微分方程式爲

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1}$$

並以 (x,y) 爲直角坐標，而假定在 xy 平面上某區域 B 內，$f(x,y)$ 爲單值連續函數. 次設 $y=\varphi(x)$ 爲滿足(1)之函數，則此函數在 xy 平面上所表示之曲線，即爲(1)之積分曲線. 今於此積分曲線上，任意取一點 $P(x,y)$，作切線 t，命其與 x 軸之正方向所作之角爲 τ，則得如下之關係：

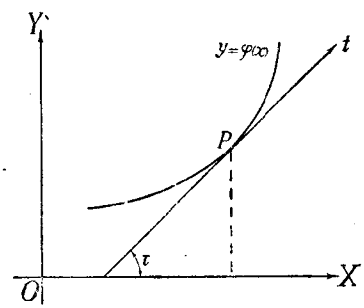

圖1.

$$\tan\tau=\frac{d\varphi}{dx}$$

然 $\varphi(x)$ 爲(1)之解，故

$$\frac{d\varphi}{dx}=f(x,\varphi(x))$$

從而得

$$\tan\tau=f(x,\varphi(x))$$

若此關係對於 $y=\varphi(x)$ 之曲線上任何點均得成立，則 $y=\varphi(x)$ 爲(1)之解者，至極明顯. 又在 xy 平面上區域 B 內，若與 x,y 以一定值，則因 $f(x,y)$ 爲既知函數而其值隨之一定，即在區域 B 內之各點，其

$x, y, \frac{dy}{dx}$ 均有一定值，稱此三數曰該點之線素[1]；由幾何學解釋之，卽在區域 B 內之各點，均附有通過該點之一定直線(卽切線)；由此見地而言，可謂(1)之微分方程式得在 xy 平面上決定一簇切線，稱此曰切線場[2]；故微分方程式之積分曲線者，乃切於其上各點所附有之直線之曲線也．圖 2 係表示下列微分方程式之切線場：

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

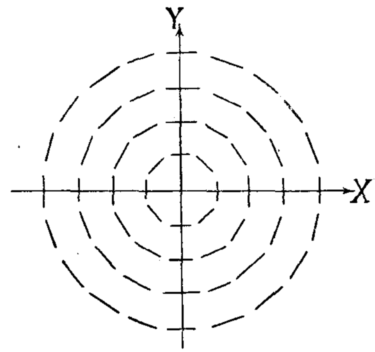

圖2.

由上解釋，可大體察知積分曲線之形狀，蓋吾人雖不一定能於每一點引已知方向之直線，然必能於若干點引之，而此時可謂已得積分曲線之一種表象矣．今於區域 B 內，取一點 $P_0(x_0, y_0)$，作通過 P_0 點而與 x 軸之正方向作成 τ_0 角之直線，惟 τ_0 應適合下列方程式：

$$\tan \tau_0 = f(x_0, y_0)$$

於甫作之直線上，在 P_0 點之近傍，取一點 $P_1(x_1, y_1)$，次於 P_1 點引以 $f(x_1, y_1)$ 爲傾斜率之直線，並於此直線上，在 P_1 點之近傍，取一點 $P_2(x_2, y_2)$，更於 P_2 點引以 $f(x_2, y_2)$ 爲傾斜率之直線，依此類推，作 $P_0P_1P_2\cdots$ 之折線，則在 $P_0, P_1, P_2, \cdots$ 等點順次所作 $P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \cdots$ 等直線之傾斜率，均係滿足(1)之微分方程式；此時吾人設想將 P_0P_1，P_1P_2，$P_2P_3, \cdots$ 等線段愈形縮短，則由回憶積分學之基本計算，可想像此折線大體與積分曲線相似．今設想如下之微分方程式：

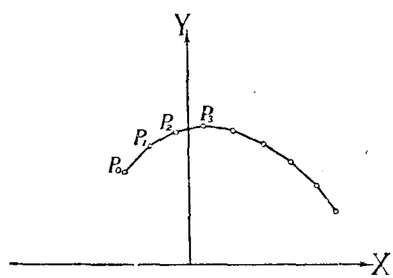

圖3.

(1)line-element, l'élément linéaire, das Linienelement.　(2)das Tangentenfeld.

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

則解此微分方程式與求積分之基本問題相同；吾人於積分學中實際將近似曲線逐漸改良，使之收斂於積分；此時各箇表象，要爲顯示當規定**定積分**時所慣用之近似總數之幾何圖形；卽假如以階梯多角形代替**被積分函數**之曲線，並作相當於此階梯多角形之積分曲線，則其於各區間之直線，皆有一定方向；若斯利用於**用圖積分法**(1)之曲線，卽爲吾人在解微分方程式時所遭遇之簡單特例也.

吾人由上述之考察而作如下之推測：卽必有一積分曲線通過吾人所考慮之區域內之任何點，或以解析學之辭表示之，卽假定點 (x_0,y_0) 屬於所與區域，在此區域內 $f(x,y)$ 更有詳細之旣知性質（參照第 48 頁），則必有一適合微分方程式並可取其微分之函數 $y(x)$，且當 $x=x_0$ 時 $y=y_0$.

玆舉例於次，用示以最基本之方法實際表顯微分方程式所有之一切解法，且同時可確認上述之推測爲不謬；例如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)$$

之解爲

$$y=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi+y_0$$

蓋當 $x=x_0$ 時，$y=y_0$. 又可以後章之一般方法解(2)之微分方程式而證實上述之推測. 夫因(2)之積分曲線，以 $-\frac{x}{y}$ 之傾斜率，通過點 (x,y)；而按解析幾何學之定則，可知通過點 (x,y) 之切線，乃垂直於連接此點與原點之直線，並且顯然可知此切線係切於以原點爲中心而通過點 (x,y) 之圓；故此時以原點爲中心之圓簇乃爲到處含有所要傾斜率之曲線；爰(2)之積分曲線之方程式必爲

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (3)$$

且吾人易得證驗

(1) graphical integration

$$x^2+y^2=r^2$$

之方程式實際適合(2)之微分方程式；蓋於(3)左右二方對[illegible]

$$x+yy'=0$$

而此顯卽爲(2)之微分方程式；故(3)所表示之圓系，確係適合(2)之微分方程式者也．對(2)之微分方程式，作切線場，得圖2，當爲圓系之一種近似表象；而實際見此圖，其確係表示圓系者，至極明顯．

解微分方程式，其主要之事項爲闡明凡適合微分方程式之函數之性質者，已述於前；玆將其發展之綱要，略述於次：微分方程式發達之初期，爲達此目的，莫不先期得以有限項之自變數之顯函數，表示未知函數；於是，由應用代換法、消去法、微分法、積分法等而試求所欲之解，蓋此宛如最初應用四則及開方法以解代數方程式然也．十七八世紀之數學家如 Euler氏、Lagrange 氏、Bernoulli 氏等，咸用上法，試解各種微分方程式；但斯與最初解代數方程式之思想，如同一轍，終遇阻壁，蓋依上述各法，感知能解之微分方程式其型不多；因是而懷疑是否凡微分方程式皆有其解．夫在當時，因盡用所知各法，倘有不能得其解之微分方程式，則疑該微分方程式之果有解與否，乃理屬當然．關於此問題，曾經諸家之苦心鑽研者，當不待言；迨 Cauchy 氏始嚴密的證明，凡微分方程式，在適當條件之下，必有其解；繼而 Liouville 氏闡明微分方程式中有者，縱於旣知函數施以代換法以及上述各法之運算，亦決不能得其解；蓋此乃相當於代數方程式之根之存在定理以及五次以上之方程式未必得以代數方法解之之研究也．

觀上所述，如對於一方確認其必有解之微分方程式，而他方不能求得其解，則欲突破此難關，自須轉換從來之思考法．夫上述不能得其解之微分方程式，思能以旣知函數及初等函數[1]表示其解者，極難想像，或雖不能以初等函數表示其解而得以吾人未嘗見之新函數表示之者，亦未可知；此時卽以此微分方程式視爲新函數之定義，而以之爲基礎，

1.初等函數之定義，參照第40頁．