线性代数习题课讲义

任化民　于庚蒲　原永久　郭元春

吉林大学出版社

线性代数习题课讲义

任化民　于庚蒲
原永久　郭元春　编

吉林大学出版社

线性代数习题课讲义

任化民　于庚蒲
原永久　郭元春　编

责任编辑：赵洪波　　封面设计：张沭沉

吉林大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
（长春市东中华路29号）　　吉林大学印刷厂印刷

开本：850×1168毫米　1/32　　1990年9月第1版
印张：16.375　　1990年9月第1次印刷
字数：408千字　　印数：1—1 000册

ISBN 7—5601—0610—2/O·72　　定价：3.45元

前　　言

线性代数是综合大学、师范大学及部分工科院校数学系、应用数学系一门重要的基础课．线性代数习题课是线性代数教学的一个重要环节．搞好习题课教学，有助于培养和提高学生逻辑推理及数学演算能力，有助于加强学生数学基本功训练．为了给低年级学生提供一本习题课教材，同时也为高年级学生报考研究生提供一本复习参考资料，我们于 1984 年编写了本书的初稿，并在吉林大学数学系开始试用．在多年教学实践基础上，吸取各方面的意见，经过修改和补充，形成现在的这本教材．

本书共分八章，每章的各节分四部分：基本概念和主要结论、思考练习题、例题选讲、习题．第一部分是该节基本概念和主要结果的概述；第二部分以思考练习题的形式通过讨论加深对重要概念、定理、方法的理解；第三部分通过一些典型性或综合性的例题进一步消化、吸收基本内容，拓展知识宽度，开凿知识深度；第四部分为习题，既有基本习题，也有难度较大或综合性较强的习题，这些习题是对思考练习题和例题的深化和补充．书后附有习题提示和解答．必须提醒使用本书的学生，在未有认真钻研习题之前，不要试图走“捷径”——翻看提示和解答！

本书做为习题课教材在章节结构上与谢邦杰、牛凤文、董乃昌编著的《线性代数》配套．但从基本内容上又是一本独立的、体系完整的线性代数习题课教材，因此可供使用任何一本线性代数教材的习题课使用．

本书第一稿由任化民、于庚蒲编写，第二稿由原永久、郭

元春编写，全书由于庚蒲负责定稿。牛凤文教授在百忙中详细认真地审阅了全书，提出许多修改意见，编者谨致以衷心的感谢。

不当之处，在所难免，敬请读者批评指正。

编　　者

1989年5月于吉林大学

目　　录

第一章　预备知识

§1　数　域

一、基本概念和主要结论

1. 数域

设P是一些数所组成的集合，而且P不只含一个数。如果对于P中任意二数a，b恒有$a+b\in P$，$a-b\in P$，$ab\in P$，当$b\neq 0$时还有$\frac{a}{b}\in P$，则P称为一个数域。

2. 数域的大小

复数域是最大的数域，有理数域是最小的数域。即任何数域均包含在复数域中，任何数域均包含有理数域。

3. 数域的个数

数域有无穷多个。

二、思考练习题

1. 指出下列数集哪个是数域，哪个不是数域，为什么？

1)一切自然数所组成的数集；

2)一切偶数所组成的数集；

3)一切形如$a+bi$(a，b为有理数）的数所组成的数集；

4)一切形如$a+b\sqrt{3}$ (a,b为有理数)的数所组成的数集。

2. 是否存在只含有限个数的数域P？为什么？

3. 一个数域的任意子集是不是数域？一个数集的所有真子集均不是数域，此数集是不是数域？试举例说明之。

三、例题选讲

1. 证明任意数域P均包含有理数域Q。

证明 设$a \neq 0$是P中的数，而$\frac{a}{a}=1 \in P$，用1自己重复相加，可推得所有正整数都在P中。另外，$a-a=0 \in P$，0与任一正整数相减就得到全体负整数，因而全体负整数也在P中。这样P就包含了全体整数。而任意两个整数的商（除数不为0）可得到全体有理数，故全体有理数都在P中。这就证明了P包含有理数域Q。

2. 证明任意二数域P_1，P_2的交集$P_1 \cap P_2=\{x \mid x \in P_1, x \in P_2\}$也是数域。

证明 因为任意数域均包含有理数域，所以，有理数域$Q \subseteq P_1 \cap P_2$。说明$P_1 \cap P_2$不但非空，且含有无穷多个数，在$P_1 \cap P_2$中任取二数a，b，则$a, b \in P_1$且a，$b \in P_2$。因P_1，P_2是数域，所以，$a+b \in P_i$，$a-b \in P_i$，$ab \in P_i$，$\frac{a}{b} \in P_i$（$b \neq 0$），$i=1, 2$。于是，$a+b \in P_1 \cap P_2$，$a-b \in P_1 \cap P_2$，$ab \in P_1 \cap P_2$，$\frac{a}{b} \in P_1 \cap P_2$（$b \neq 0$），即数集$P_1 \cap P_2$对于加法、减法、乘法和除法（除数不为0）封闭，故$P_1 \cap P_2$是一个数域。

四、习题

1. 验证：所有形如

$$\frac{a_0+a_1\pi+\cdots+a_n\pi^n}{b_0+b_1\pi+\cdots+b_m\pi^m}$$

的数组成一数域，其中n，m为任意非负整数，a_i，b_j（$i=0, 1, \cdots, n$；$j=0, 1, \cdots, m$）是整数，且b_j不全为0。

§2 置 换

一、基本概念和主要结论

1. *n* 排列

n个数码1，2，3，…，n的每一种有确定次序的排列简称为

一个 n 排列。

1)n排列一共有$n!$个。

2)若把某排列中任意两个相邻的数码互换位置，则所得到的新排列的反序数比原排列的反序数多1或少1。

3)当$n>1$时，在所有的 $n!$ 个排列中，恰好有一半是偶排列，有一半是奇排列，各占 $\frac{1}{2}n!$ 个。

4)如果把一个排列中任意的二数码（不一定是相邻的两个）互换位置，即做一次对换，则此排列的奇偶性变更。

2. 置换

把一个n排列变为另一个n排列的变换称为一个 n 阶置换，记为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

1)一个置换 A，当其上下两排列的反序数之和为偶数时，则为偶置换；当反序数之和为奇数时，则为奇置换。

2)当$n>1$时，n阶置换一共有$n!$个，其中奇偶各占一半，即各有$\frac{1}{2}n!$个。

3)置换的乘法适合结合律，即有$(AB)C=A(BC)$，其中A,B,C是任意置换。

4)任意置换A与单位置换

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

相乘，恒有$AI=IA=A$。

5) 对任意置换 A，恒有一个所谓它的逆置换存在，记为A^{-1}，使得$AA^{-1}=A^{-1}A=I$。其实

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

3. 轮换

设A是一个n阶置换，如果A把i_1变为i_2，把i_2变为i_3，…，把i_{k-1}变为i_k，把i_k变为i_1，而且对其余的$n-k$个数码都使其自己变为自己，则称这种特殊的置换A为一个k项轮换，记为

$$A=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$$

即

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k & a & b & \cdots & c \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & a & b & \cdots & c \end{pmatrix}$$

如果几个轮换在它们的记法中所用的数码各不相同，则称这个轮换是互相独立的。

1)若干个互相独立的轮换，无论按什么次序乘起来都等于同一个置换，而且这个置换的变换情况恰好是等于把各个轮换的变换情况汇总起来。

2)任意一个置换均可分解为互相独立的轮换的乘积。

3)每个k项轮换都可表为$k-1$个对换的乘积（但表法并不唯一）。

4)每个置换都能分解为若干个对换的乘积；但偶置换只能分解为偶数个对换的乘积，奇置换只能分解为奇数个对换的乘积。

5)若置换A能分解为d个互相独立的轮换的乘积（包括能分解出的所有1项轮换在内），则当$n-d$为偶数时，A为偶置换；为奇数时，A为奇置换。

二、思考练习题

1. 两个不同的n排列，它们的反序数能否相等？

2. 单位变换I是奇置换还是偶置换？

3. 置换的乘法满足交换律吗？

4. 一个置换的逆置换是唯一的吗？

5. 每个k项轮换都能唯一地表为$k-1$个对换的乘积吗？

三、例题选讲

1. 设排列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的反序数为s，如果把$a_1,a_2,\cdots,a_n$看成是自然顺序，问排列$1,2,\cdots,n$的反序数是多少？

解 设l_i为a_i前面比a_i大的数码的个数，则$s=l_2+l_3+\cdots+l_n$。将$a_1,a_2,\cdots,a_n$看成是自然顺序，欲求$1,2,\cdots,n$的反序数只需求$a_1,a_2,\cdots,a_n$，需做多少次对换能变为$1,2,\cdots,n$即可。很明显，只需做s次对换，$a_1,a_2,\cdots,a_n$便能变为$1,2,\cdots,n$。故若视$a_1,a_2,\cdots,a_n$为自然顺序，则$1,2,\cdots,n$的反序数为s。

2. 设排列$a_1,a_2,\cdots,a_n$的反序数为s，试求$a_n,a_{n-1},\cdots a_2,a_1$的反序数。

解 设在原排列$a_1,a_2,\cdots,a_n$中，a_i后面比a_i小的数码共有l_i个$(i=1,2,\cdots,n-1)$，则于排列$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$中，$a_i$前面比$a_i$大的数码共有$(n-i)-l_i$个。由已知

$$s=l_1+l_2+\cdots+l_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}l_i$$

于是$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$的反序数为

$$[(n-1)-l_1]+[(n-2)-l_2]+\cdots+[(n-(n-1)]-l_{n-1}]$$

$$=n(n-1)-\frac{n(n-1)}{2}-\sum_{i=1}^{n-1}l_i$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}-s$$

3. 试求反序数最大的n排列。

解 由例2知$a_1,a_2,\cdots,a_n$与$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$二排列的反序数数之和为

$$s+\left(\frac{n(n-1)}{2}-s\right)=\frac{n(n-1)}{2}$$

这是一个常数。可见，欲使$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$的反序数最大，只需$a_1,a_2,\cdots,a_n$的反序数最小。而自然排列$1,2,\cdots,n$的反序

数为0，所以，$n, n-1, \cdots, 2, 1$的反序数最大，为$\dfrac{n(n-1)}{2}$.

4. 证明任意两个偶（奇）置换之积是偶置换，而一个偶置换与一个奇置换之积是奇置换。

证明 设A, B是两个偶置换，于是A, B均为可分解为偶数个对换的乘积。从而，乘积AB亦可分为偶数＋偶数＝偶数个对换的乘积，所以，AB是偶置换。

同理，因为奇数＋奇数＝偶数，所以，两个奇置换乘积亦为偶置换。

同理，因为奇数＋偶数＝奇数，或偶数＋奇数＝奇数，所以一个偶置换与一个奇置换，或一个奇置换与一个偶置换之积均为奇置换。

四、习题

1. 求下列诸排列的反序数：

1) $1, 3, 5, \cdots, 2n-1, 2, 4, \cdots, 2n$;

2) $2, 4, \cdots, 2n, 1, 3, 5, \cdots, 2n-1$;

3) $3, 6, 9, \cdots, 3n, 1, 4, 7, \cdots, (3n-2), 2, 5, 8, \cdots, (3n-1)$.

2. 选择i与j使

1) $1, 2, 7, 4, i, 5, 6, j, 9$，是偶排列；

2) $1, i, 2, 5, j, 4, 8, 9, 7$，是奇排列。

3. 分解下列诸置换为相互独立的轮换的乘积：

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

4. 决定下列诸置换之奇偶性：

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 9 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 & 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 5 & 7 & 6 & 10 & 2 & 1 & 11 & 4 & 12 & 3 & 9 & 13 & 15 & 8 & 14 \end{pmatrix}$

5. 问下面的排列是奇排列还是偶排列？16,13,14,11,15 10,9,12,3,8,7,6,5,4,1,2（本题并不着重其答案，而是着重于如何想出简捷的方法来解决问题）.

6. 以“数学是思维之体操”为自然顺序，试决定“思维之体操是数学”是奇排列还是偶排列？

§3 多项式理论

一、基本概念和主要结论

1. 多项式

形式表达式

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

称做数域P上的一元多项式，其中n为非负整数，$a_0, a_1, \cdots, a_n$是数域P中的数。

2. 带余除法定则

对数域P上的任意多项式$f(x)$及$g(x) \neq 0$，恒有P上唯一的多项式$q(x)$与$r(x)$，使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

其中或者$r(x) = 0$或者次$r(x) <$次$g(x)$.

3. 余式定理

用$x - a$去除$f(x)$所得余式为常数$f(a)$.

4. 最高公因式存在定理

如果数域P上的多项式$f(x), g(x)$不全为0，则它们必在P上有一个最高公因式$d(x)$，且有P上的多项式$\varphi(x)$与$\psi(x)$使

$$d(x) = \varphi(x)f(x) + \varphi(x)g(x)$$

如果$f(x)$与$g(x)$互质（即其最高公因式为非0常数，亦即它们没有非常数的公因式时），则有$\varphi(x)$与$\psi(x)$使

$$1=\varphi(x)f(x)+\psi(x)g(x)$$

反之，有若$\varphi(x)$，$\psi(x)$使上式成立，即$f(x)$与$g(x)$互质。

5． 质式

设$p(x)$是数域P上的一个非常数多项式。如果P上不存在次数低于$p(x)$的非常数多项式$h(x)$，使$h(x)\mid p(x)$，则称$p(x)$是P上的一个质式，或者说$p(x)$在P上不可约或不可分解。

6． 因式唯一分解定理

数域P上的任意非常数多项式$f(x)$能在P上唯一地分解成一些质式的乘积：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

所谓唯一，即若又有$f(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$，而$q_i(x)$均为$P$上的质式，则必$s=t$，而且可调整因子的次序使得$p_i(x)=a_iq_i(x)\ (i=1,2,\cdots,s)$，$a_i\in P$。

7． 代数学基本定理

复数域上任意一个n次$(n\geqslant 1)$多项式$f(x)$在复数域中恒有根。

8． 导式

设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，定义$f(x)$的导式$f'(x)$为

$$a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

则$f(x)$有重因式的充要条件是$f'(x)$与$f(x)$有非常数公因式。若质式$p(x)$是$f(x)$的k重因式$(k\geqslant 1)$，则$p(x)$是$f'(x)$的$k-1$重因式。

9． Eisenstein判别法

设$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$是整系数多项式，若存在一个质数$p$，使得

$$p\mid a_i\quad(i=0,1,\cdots,n-1),\ p\nmid a_n,\ p^2\nmid a_0,$$

则$f(x)$在有理数域上不可约。

二、思考练习题

1． 易知，零次多项式能整除任意多项式。那么能整除任

意多项式的多项式是否一定是零次多项式？为什么？

2. 有没有能被任意多项式整除的多项式？如果有，都是哪些多项式？为什么？

3. 1)如果$d(x)$是数域P上多项式$f(x)$与$g(x)$的一个最高公因式，则有P上的多项式$\varphi(x)$与$\psi(x)$，使

$$d(x)=\varphi(x)f(x)+\psi(x)g(x)$$

若$d(x)$的首系数为1，$\varphi(x)$，$\psi(x)$是否由$f(x)$，$g(x)$唯一确定？

2)如果对$f(x)$与$g(x)$有$\varphi(x)$与$\psi(x)$使

$$\varphi(x)f(x)+\psi(x)g(x)=d(x)$$

那么$d(x)$是否是$f(x)$与$g(x)$的最高公因式？

4. 如果$d(x)$是数域P上多项式$f(x)$与$g(x)$的一个公因式，且有P上多项式$\varphi(x)$与$\psi(x)$使

$$d(x)=\varphi(x)f(x)+\psi(x)g(x)$$

则$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个最高公因式。

5. 设多项式$f(x)$含有k重因式$(x-\alpha)$，$k>1$，证明：$g(x)=f(x)+(\alpha-x)f'(x)$亦含$k$重因式$(x-\alpha)$。当$k=1$时，此命题正确否？

三、例题选讲

1. 数域P上的多项式$f(x)$与$g(x)$的次数都不超过n。如果在$n+1$个不同点上二者等值：$f(\alpha_i)=g(\alpha_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$，则$f(x)=g(x)$。

证明 因为$f(\alpha_i)-g(\alpha_i)=0(i=1,2,\cdots,n+1)$，所以多项式$f(x)-g(x)$有$n+1$个不同根，而$f(x)-g(x)$的次数亦不超过$n$，它至多有$n$个根。可见$f(x)-g(x)$是零多项式，即$f(x)=g(x)$。

2. 数域P上的多项式$f(x)$如果对于任何$c\in P$都有$f(x)=f(x-c)$，则$f(x)$是一常数。

证明 由于对任意$c\in P$有$f(c)=f(c-c)=f(0)=a_0$，即$f(x)$在各处取值均为常数a_0，故$f(x)=a_0$

3. 设$f(x)$是数域P上的多项式，若对于任意的$a,b\in P$，都有$f(a+b)=f(a)+f(b)$，则$f(x)=kx,k\in P$。

证明 对任意$b\in P$由

$$f(b)=f(0+b)=f(0)+f(b)$$

知$f(0)=0$,即0是$f(x)$的一个根。

若$\alpha\in P$是$f(x)$的根,则$f(2\alpha)=f(\alpha+\alpha)=f(\alpha)+f(\alpha)=0$,即$2\alpha$亦是$f(x)$的根.同理可证，对任意正整数$m$，$m\alpha$都是$f(x)$的根。但在$f(x)\neq 0$时，$f(x)$不可能有无限多个根，因此，若$f(x)\neq 0$，则$\alpha=0$。这说明$f(x)$或者是零多项式，或者只有零根，因而$f(x)$形如

$$f(x)=x^n p(x)$$

$p(x)$亦是P上的多项式且在P中没有根.另外,由$f(m)=f(1+1+\cdots+1)=f(1)+\cdots+f(1)=mf(1)$及$f(1)=1^n p(1)=p(1)$得$m^n p(m)=mp(1)$, $m^{n-1}p(m)=p(1)$，$m^{n-1}p(m)-p(1)=0$，于是，$x^{n-1}p(x)-p(1)$有无限多个根，即任何正整数m都为其根。因此，$x^{n-1}p(x)=p(1)$。设$p(1)=k$，则

$$f(x)=x^n p(x)=kx$$

4.设$f(x)$与$g(x)$都是数域P上的多项式。证明：若$f^2(x)\mid g^2(x)$，则$f(x)\mid g(x)$。

证明 设$d(x)$为$f(x)$，$g(x)$的最高公因式，则有$\varphi(x)$与$\psi(x)$，使

$$d(x)=\varphi(x)f(x)+\psi(x)g(x)$$

将上式两端同乘以$f(x)g(x)$，得

$$f(x)g(x)d(x)=\varphi(x)f^2(x)g(x)+\psi(x)f(x)g^2(x)$$

显然

$$f^2(x)d(x)\mid f^2(x)g(x),\quad f^2(x)d(x)\mid f(x)g^2(x)$$

即$f^2(x)d(x)$整除等式右端，从而整除左端，

$$f^2(x)d(x)\mid f(x)g(x)d(x)$$

即