赵慈庚数学教育文集

上海教育出版社

赵慈庚数学教育文集

《赵慈庚数学教育文集》编辑委员会编

上海教育出版社

赵慈庚数学教育文集

《赵慈庚数学教育文集》编辑委员会编

上海教育出版社出版发行

（上 海 永 福 路 123 号）

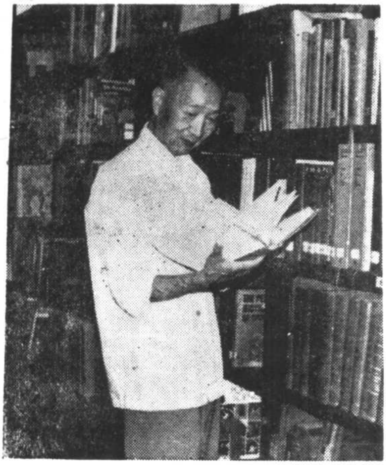
各地新华书店经销　上海东方印刷厂印刷

开本 850×1156　1/32　印张 13.5　插页 4　字数 310,000

1987 年 7 月第 1 版　1987 年 7 月第 1 次印刷

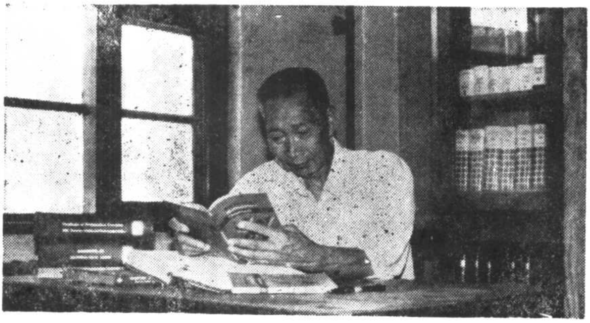
印数 1—1,900 本

统一书号：7150·3724　　定价：(精)3.90 元



◁ 赵慈庚先生在查阅资料
（一九八三年）

▽ 赵慈庚先生在读书
（一九八三年）



▽ 赵慈庚先生
在指导北师大学
生教育实习
（一九六五年）

序

赵慈庚教授的童年，家庭生活并不富裕．家教虽然较为严肃，还是没有改尽他玩世不恭的性格．中学毕业后，当过半年小学教师．北师大毕业后，在中学任教七年，大学任教四十余年．他受的是师范教育，毕生热爱教育工作．在这五十年里，不但自己深入钻研，以提高学术水平，还时常为中学教师作学术报告或写指导性文章．对提高教师的教学能力，作了大量工作．他忠诚数学教育事业，取得了显著成效．

中学数学教师，在教学工作中，总会遇到一些问题，以前未曾察觉，一时不得解决．这种“教然后知困”的感受，赵教授是过来人．他积存的一些杂文，有的在刊物上发表过，还有许多未曾发表．上海教育出版社把他多年来的讲稿及论文，汇集刊印成为一册．这里收集了四十二篇文章，都是他亲身体会或从工作中总结提炼而成的，多数是经过实践考验的．这些文章都有较高的学术水平．这书将是我们的良师益友，会有助于我国的数学教育工作．

赵教授善于发现问题，分析问题，也善于解决问题．他思考细密，能深入钻研，抓住问题的要害．又以流畅的文笔，揭示其中的奥妙．在学术讨论中，坚持正确意见，说真话．对或左或右的时髦口号，不苟同．他也不骄傲，发表自己意见之后，总要附带说：这是我个人的意见，如有错误，我接受批评．这种精神，

应该作为我们学习的榜样.

本书搜入了赵教授所撰傅种孙先生与闵嗣鹤教授的传记.傅先生是闵、赵俩人的恩师,俩人是得晒帏席的学生,傅先生是我国先驱的数学教育家. 在本世纪二十年代,他曾经在一个刊物上说:“国家之设师范大学,非仅制造师资而已,亦曰集有志学术与教育者于一堂,使远瞻学术之流波,近察社会之实况,研求众说,各出心裁. 上议国家制度,供司铎之采择,下论教育方针,备执教之参考.”赵教授一直是秉承着这种原则在北京师范大学工作的,也是用这种态度对待当前教育事业的.

魏庚人

1984年5月于陕西师范大学

目　　录

(一) 初等数学问题

（二）数 学 教 育

（三）其 他

（一） 初等数学问题

降格锥线*

(一九四〇年)

关于二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之轨迹，已借不变式

$$\begin{aligned}
&\Delta=B^2-4AC,\\
&H=A+C,\\
&\Theta=4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2,\\
&\xi=4AF+4CF-D^2-E^2
\end{aligned}$$

之正负，分别论述．其 $\Theta=0$ 时，则有五种情形，详列如下表：

$\Delta>0$		两相交直线	降格双曲线
$\Delta=0$	$\xi<0$	两平行直线	降格抛物线
	$\xi=0$	两重合直线	
	$\xi>0$	无轨迹	
$\Delta<0$		一点	降格椭圆

* 这是赵慈庚先生在 1940 年为西北师范学院附属中学所写的补充教材．这里所说的“降格锥线”，现今通常称为退化的圆锥曲线，或称为圆锥曲线的退化情形．赵慈庚先生认为，从中国文学角度来讲，“退化”一词用于生物，没有用于无生物的；“降格”一词脱胎于中国丧礼的“降服子”，意指为人过继的儿子穿的孝服要降一等．“降”字用于服制，不用于生物，较为切合．

此五者统称为降格锥线. 揆之几何直观, 通过圆锥之顶点作一平面, 则其与锥面相交之情形, 除两平行直线之降格抛物线外, 亦各有实物可验, 似若其说可信. 然吾人不能满意于几何直观. 而以上结果, 仅从方程立论, 一面之词, 未谋于锥线之定义, 不免遗憾. 锥线之定义曰:

动点 P 至定点 F 之距离与其至定线 DD' 之距离之比为常数 e, 则 P 之轨迹曰圆锥曲线, F 曰焦点, DD' 曰准线, e 曰离心率.

其中并未明言 F 不在 DD' 之上, 此则可以想见降格锥线之所由产生矣.

以 $F(p, 0)$ 为焦点, y 轴为准线, 则锥线方程为

$$(1-e^2)x^2+y^2-2px+e^2p^2=0. \tag{1}$$

若焦点在准线上, 则 $p=0$, 而(1)变为

$$(1-e^2)x^2+y^2=0. \tag{2}$$

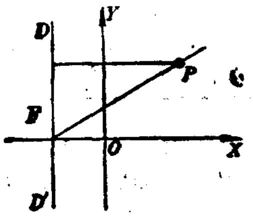
i. $e=0$, (2)则为 $x^2+y^2=0$, 是为点圆.

ii. $0<e<1$, (2)则为 $b^2x^2+y^2=0$, 仅 $(0, 0)$ 能满足之, 是谓点椭圆.

iii. $e=1$, (2)则为 $y^2=0$, 乃为二重直线.

iv. $e>1$, (2)则为 $-b^2x^2+y^2=0$, 是两相交直线.

唯缺两平行线之情形. 此又为 iv 之极限情形. 设圆锥面之一正截线(与轴垂直之平面与锥面之交线)不变, 而使其顶点沿其轴而趋于无穷, 则锥面以柱面为极限, 而锥面之元线* 皆平行于轴矣. 理论方面可证之如下:



取 $x=-q(q>0)$ 为准线 DD', 其与 x 轴之交点 F 为焦点, 更设曲线过定点 $P(h, k)$, 则离心率为

* 这里所说的元线, 现今通常称为母线.

$$e=\frac{\sqrt{(h+q)^2+k^2}}{h+q}.$$

而曲线之方程为

$$\frac{\sqrt{(x+q)^2+y^2}}{x+q}=\frac{\sqrt{(h+q)^2+k^2}}{h+q}.$$

由此得

$$\frac{y^2}{k^2}=\frac{(x+q)^2}{(h+q)^2}=\frac{\left(\frac{x}{q}+1\right)^2}{\left(\frac{h}{q}+1\right)^2}. \tag{3}$$

今令准线之方向不变，携焦点 F 而趋于无穷，即是令 $q\to\infty$，则(3)之右端以1为极限，故(3)之极限情形为

$$y^2=k^2,$$

是为两平行直线．此时 e 亦趋于1．

总之，焦点在准线上时，则锥线降格；若更准线携焦点趋于无穷，则锥线为两平行直线．

关于三角方程*

（一九四一年）

Fine, College Algebra, § 335 述解方程之原理曰：

> “欲解 x 之一元方程，吾人径认方程为恒等式；如此设想之后，则用运算通则以求一切形如 $x=c$ 之当然结果。
>
> “若用以诱导某一方程 $x=c$ 之过程，于 x 易以 c 时为可逆者，则可断 c 为一根；所谓可逆过程者，由可逆步骤组成者也”。

可见普通解方程之工作，试探性工作也．所得结果，未必为所冀之根．Fine 于此又在下节谆谆诫曰：

> “切须知纵由一方程用运算通则，求得 x 之某值，不能仅凭此事以断该值为根．欲断其确为一根，须其过程可逆”。

无理方程及分式方程之根，更加复杂．分歧之由，乃以其解题过程未必可逆．三角方程由超越函数造成．吾人以对付代数函数尚感不足之工具，对付超越函数，自益见其汲深而绠短．解代数方程尚且验根，则解三角方程尤须验根．解代数方程，力谋避免引入客根，解三角方程则有尤为可怪者．请杂陈数端．

甲．三角方程验根．三角方程之根有一望而知其妄者，如

---

* 本文是赵慈庚先生一九四一年在西北师范学院暑期讲习会上所用的讲稿．

〔例 1〕 解三角方程

$$2\sqrt{3}\cos^2\theta=\sin\theta.$$

(Loney, Plane Trigonometry, p.86, Ex.3. 建国平面三角教科书习题二十九之 8)

解 变原方程为

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta+\sin\theta-2\sqrt{3}=0.$$

析因式,

$$(2\sin\theta-\sqrt{3})(\sqrt{3}\sin\theta+2)=0.$$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad 或\quad -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

第二根显然不合理. 解方程时并无引入客根之步骤, 故非客根,亦非吾人所能预防者也.

解方程时, 虽曾用某函数乘方程之两端, 而不引入客根. 代数方程有之,三角方程亦有之.

〔例 2〕 解下列方程:

$$\sec\theta-1=(\sqrt{2}-1)\tan\theta. \tag{1}$$

解 移项, 以 $\cos\theta$ 乘全式, 再化简, 得

$$(\sqrt{2}-1)\sin\theta+\cos\theta=1. \tag{2}$$

既经 $\cos\theta$ 乘(1), 则有引入客根之嫌. 凡将来有使 $\cos\theta=0$ 之 θ,则非验不可.

以 $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+1}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ 除(2)之两端,并取辅助角 $\varphi=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$,则得

$$\sin(\theta+\varphi)=\sin\varphi.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \theta&=n\pi+[(-1)^n-1]\varphi\\&=2m\pi\quad 或\quad (2m+1)\pi-2\varphi.\end{aligned}$$

今 $\cos\theta=1$, 或 $-\cos 2\varphi=2\sin^2\varphi-1=1/\sqrt{2}$. 所得 θ 之值既无使 $\cos\theta=0$ 者,则可不验根.

一般情形，有需试验者实多，不得从懒.

〔例 3〕 解三角方程

$$\cos 2x\sec x+\sec x+1=0. \tag{3}$$

(建国平面三角第 168 页例，复兴平面三角第 108 页 § 4)

解 以 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ 及 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 代入，

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}+1=0.$$

去分母，再以 $\cos^2 x$ 代 $1-\sin^2 x$，并析因式，

$$\cos x(2\cos x+1)=0.$$

$$\therefore\quad \cos x=0,\quad 而\quad x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

或

$$2\cos x+1=0,\quad 而\quad x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}. \tag{5}$$

取 $\pm\dfrac{\pi}{2}$(此两角可代表(4)中之一切角)代入(3)之左端，得不定式 $-1\cdot\infty+\infty+1$. 须以极限定其值. 实则(4)为客根. 但将解法变更，可使之消于无形. 盖由(3)，

$$(\cos 2x+1)\sec x+1=0.$$

以 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ 及 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 代入，再化简，得

$$2\cos x+1=0.$$

故只有一组根(5).

乙. 解三角方程应竭力避免引入客根. 若解一方程不能不用有增根可能之运算，则客根之生赋自原题，欲强避焉，殆有非人力之所能为者. 若本有法可免客根之累，第以谋之不臧，而入歧途，则咎由自取者也. 前例两解，后者较妥，已明白见之矣. 顾教科书中指示学生解三角方程之方法，佥曰：

第一步，若方程中有倍角、分数角、角之和差之三角函数，举