



高等院校力学学习辅导丛书
Exercise Series in Mechanics for Higher Education

力学小问题及全国大学生 力学竞赛试题

高云峰 蒋持平
Gao Yunfeng Jiang Chiping

吴鹤华 殷金生
Wu Hehua Yin Jinsheng

编



清华大学出版社



Springer

本书是从《力学与实践》“小问题”栏目300多个小问题精选汇集而成的，内容包括：理论力学部分（120题，分为静力学、运动学、动力学、趣味力学问题等4章）；材料力学部分（60题，分为拉压及扭转、弯曲、能量法、超静定、其他等5章）；全国大学生力学竞赛试题（1988年第一届、1992年第二届、1996年第三届、2000年第四届）。可作为理工科院校大学生的参考书，也可以作为准备报考硕士研究生的参考资料，还可作为理论力学、材料力学或工程力学教师的教学参考书。

本书主要特色

- 内容广泛，形式多样，融新颖、灵活、趣味于一体。
- 由各高校有丰富教学经验的教师出题，了解学生易于犯什么样的错误，因此问题更具针对性，解答更具指导性。
- 题型多样化，既有通常的习题、证明题、概念题等，也有生活中的实际问题，还有讨论题、设计题、找错题等，并有利用计算机求解的问题。
- 有助于学生培养兴趣、开阔视野、提高处理问题的能力。
- 汇集了全国大学生力学竞赛的试题和答案（共四届）。

作者简介

高云峰 清华大学工程力学系副教授，现任中国力学学会一般力学专业委员会委员、中国自动化学会空间及运动体控制专业委员会委员、中国空间学会空间机械专业委员会委员，并任《力学与实践》编委，负责《小问题》专栏。主讲课程有“工程力学”、“航天器动力学”、“高等动力学”等。合作编著《理论力学》、《理论力学辅导与习题集》、《现代运动生物力学进展》、《生物力学测量方法》。曾负责第四届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题的出题，多次担任中央电视台1频道《奇思妙想》和10频道《异想天开》栏目嘉宾并提供题目。曾获军队科技进步一等奖。研究领域为航天器轨道动力学、多刚体动力学、运动生物力学等。

蒋持平 北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系教授，博士生导师，固体力学研究所副所长。现任《力学与实践》副主编、教育部第四届课程指导小组成员、北京力学学会理事。从事力学教学与科研工作。曾主持第四届全国周培源大学生力学竞赛。研究领域为复合材料力学、断裂与损伤力学、力学在工程中的应用等。在国内外核心期刊发表论文80余篇，大量由Sci、Ei收录。获国家级教学成果二等奖、北京市教学成果一等奖、国家教委科技进步二等奖各一项。

ISBN 7-302-06993-X



9 787302 069935 >

定价：19.00元



高等院校力学学习辅导丛书

Exercise Series in Mechanics for Higher Education

力学小问题及全国大学生 力学竞赛试题

高云峰 蒋持平

Gao Yunfeng Jiang Chiping

吴鹤华 殷金生

Wu Hehua Yin Jinsheng

编



清华大学出版社
北京



Springer

内 容 简 介

本书是从《力学与实践》“小问题”栏目 300 多个小问题中精选汇集而成的,内容包括:理论力学部分(120 题,分为静力学、运动学、动力学、趣味力学问题等 4 章);材料力学部分(60 题,分为拉压及扭转、弯曲、能量法、超静定、其他等 5 章);全国大学生力学竞赛试题(1988 年第一届、1992 年第二届、1996 年第三届、2000 年第四届)。

这些问题与解答是由近百位编者在二十多年间(1980—2002)陆续编出的,他们绝大部分是各高校有丰富教学经验的教师,了解学生易于犯什么样的错误,因此提出的问题和解答都很有指导性,并且内容广泛,形式多样,融新颖、灵活、趣味于一体。书中除了有通常的习题、证明题、概念题外,还有理论联系实际的问题、解答不惟一的讨论题、设计题,此外还有少量利用计算机求解的问题等。

由于以上特点,经常有一些高校的同学向“小问题”栏目的编委索要有关资料,所以现在把《力学与实践》中的“小问题”精选汇集出版,并增加了历届全国周培源大学生力学竞赛的试题和答案,相信会使更多的读者受益。

本书可作为理工科院校大学生的参考书,也可作为硕士研究生应考者的参考资料,还可作为理论力学、材料力学或工程力学教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

力学小问题及全国大学生力学竞赛试题/高云峰等编. —北京:清华大学出版社,2003

(高等院校力学学习辅导丛书)

ISBN 7-302-06993-X

I. 力… II. 高… III. 力学—高等学校—教学参考资料 IV. O3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 070825 号

出 版 者:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

客户服务:010-62776969

组稿编辑:陈朝晖

文稿编辑:杨 倩

印 刷 者:北京国马印刷厂

装 订 者:北京密云京文制本装订厂

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:175×245 印张:15 字数:272 千字

版 次:2003 年 11 月第 1 版 2003 年 11 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-06993-X/O · 315

印 数:1~6000

定 价:19.00 元

目 录

第 1 篇 理论力学部分	1
第 1 章 静力学部分	2
第 2 章 运动学部分	29
第 3 章 动力学部分	62
第 4 章 趣味力学问题	103
第 2 篇 材料力学部分	127
第 5 章 拉压及扭转	128
第 6 章 弯曲	147
第 7 章 能量法	167
第 8 章 超静定	179
第 9 章 其他	191
第 3 篇 全国大学生力学竞赛试题及答案	199
1988 年第一届全国青年力学竞赛理论力学试题	200
第一届全国青年力学竞赛理论力学试题答案	203
1992 年第二届全国青年力学竞赛理论力学试题	205
第二届全国青年力学竞赛理论力学试题答案	208
1996 年第三届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题	209
第三届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题答案	213
2000 年第四届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题	214
第四届全国周培源大学生力学竞赛理论力学试题答案	217
1988 年第一届全国青年力学竞赛材料力学试题	219

第一届全国青年力学竞赛材料力学试题答案	222
1992 年第二届全国青年力学竞赛材料力学试题	223
第二届全国青年力学竞赛材料力学试题答案	226
1996 年第三届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题	227
第三届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题答案	230
2000 年第四届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题	231
第四届全国周培源大学生力学竞赛材料力学试题答案	233

第 1 篇

理论力学部分

第 1 章

静力学部分

1. 曲杆 DCE 中的 CD 、 CE 是相互垂直的两段均质杆, 每段长为 $2l$, 重量均为 P 。将此曲杆搁在宽度为 a 的光滑平台上(图 1a), 求平衡时的 φ 角。(姜锐, 浙江大学力学系。引自 1991 年浙江大学硕士研究生入学考试试题。原第 250 题, 1994, No. 2。)

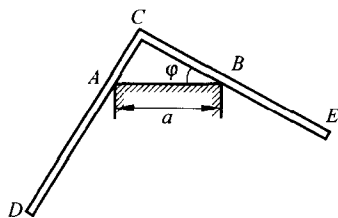


图 1a

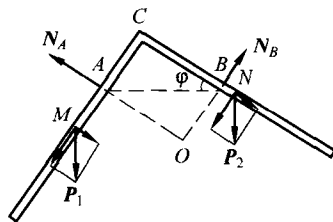


图 1b

解: 以曲杆为研究对象(图 1b), 设 M 为 CD 段的中点, N 为 CE 段的中点。由 $\sum m_O(F) = 0$, 得

$$P_1 \cos \varphi \cdot \overline{OA} + P_1 \sin \varphi \cdot \overline{AM} - P_2 \cos \varphi \cdot \overline{BN} - P_2 \sin \varphi \cdot \overline{OB} = 0 \quad (1)$$

其中 $P_1 = P_2 = P$, $\overline{OA} = a \cos \varphi$, $\overline{AM} = l - a \sin \varphi$, $\overline{BN} = l - a \cos \varphi$, 故有

$$a \cos^2 \varphi + \sin \varphi (l - a \sin \varphi) - \cos \varphi (l - a \cos \varphi) - a \sin^2 \varphi = 0$$

化简后得

$$(\cos \varphi - \sin \varphi) \left(\cos \varphi + \sin \varphi - \frac{l}{2a} \right) = 0 \quad (2)$$

由

$$\cos\varphi - \sin\varphi = 0$$

得到

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \quad (3)$$

由

$$\cos\varphi + \sin\varphi - \frac{l}{2a} = 0$$

解得

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right) \quad (4)$$

式(4)存在的条件为

$$\frac{l}{2\sqrt{2}a} \leq 1 \quad \text{且} \quad \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right) \leq \frac{\pi}{4}$$

即

$$2a \leq l \leq 2\sqrt{2}a$$

因此,当 $l < 2a$, 或 $l > 2\sqrt{2}a$ 时, 曲杆只有一个平衡位置: $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 当 $2a \leq l \leq 2\sqrt{2}a$ 时,

曲杆有三个平衡位置: $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} - \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{2}a}\right)$ 。

2. 最佳场址选择问题。设 A、B、C 三个村子里的学生人数分别为 n_1, n_2, n_3 , 在选择校址时, 为了使全体学生所走的路程之和最少, 可用如下的力学实验测定: 根据各村的位置, 按比例在光滑平板上开三个小孔。取三个重物 P_1, P_2, P_3 , 使它们的重量之比满足 $P_1 : P_2 : P_3 = n_1 : n_2 : n_3$ 。将三个重物分别用细线系住, 依次穿过三个小孔, 并在 E 点相联结(见图 2)。设三个小孔是光滑的, 则当三物平衡时, E 点的位置即为所求的校址。试证明为什么可以这样做?(梁法库, 黑龙江克山师专物理系。原第 169 题, 1989, No. 5。)

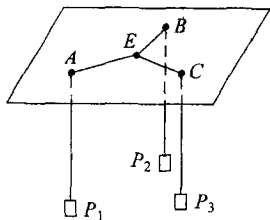


图 2

解: 设每个重物的挂线长度均为 a , $\overline{EA} = l_1$, $\overline{EB} = l_2$, $\overline{EC} = l_3$, 平衡时系统的势能应取极小值, 即

$$V = - \sum_{i=1}^3 P_i (a - l_i) = -a \sum_{i=1}^3 P_i + \sum_{i=1}^3 P_i l_i \quad (1)$$

其中

$$V_1 = \sum_{i=1}^3 P_i l_i \quad (2)$$

应取极小值。设 S 为全体学生所走的总路程,则有

$$S = \sum_{i=1}^3 n_i l_i \quad (3)$$

利用

$$P_1 : P_2 : P_3 = n_1 : n_2 : n_3 \quad (4)$$

则式(2)取极小值时,式(3)也取极小值。即:物体平衡时的位置等价于在该位置建校全体学生所走的总路程最短。此问题及处理方法可推广至 N 个村的情形。

3. 罗培伐秤由两杠杆和两秤盘铰接而成,如图 3 所示。求平衡时 P 和 Q 的比值以及支座 A 、 B 处的反力。(朱照宣,北京大学力学系。原第 69 题,1984, No. 3。)

解:利用虚位移原理,当两杠杆有虚位移时,两秤盘保持水平。则容易证明平衡时有

$$P = Q$$

然后,利用受力图(不再用虚位移原理),分别对 A 点、 B 点取矩,可以求出 A 、 B 处反力的水平分量为

$$\frac{Pa}{b}$$

其中 A 处反力方向向右, B 处反力方向向左。竖直分量不定,如不计秤的自重,两者合计为 $2P$ (向上)。

罗培伐(G. P. Roberval, 1602—1675, 法国数学家)。这个问题见 1636 年默森(M. Mersenne, 1588—1648)的《普遍和谐》一书。1803 年潘索(L. Poinsot, 1777—1859, 静力学奠基人之一)在其《静力学原理》中才给出正确解释。

4. 图 4a 所示结构中,不计各处摩擦,滑块 B 可沿 OC 杆滑动,滑块 E 可在水平方向运动。已知在 AB 杆上作用一水平力 Q , $\overline{OD} = \overline{DB} = l$, $ED \perp DC$, 求该机构平衡时作用于滑块 E 上的力 P 大小。(徐德才,江西农业大学农业工程系。原第 209 题,1991, No. 5。)

解:系统各点的虚位移(图 4b)之间有如下关系:

$$\begin{aligned} \delta r_A &= \delta r_B, & \delta r_{Be} &= \delta r_B \sin \varphi \\ \delta r_{Be} &= 2\delta r_D, & \delta r_D &= \delta r_E \sin \varphi \end{aligned}$$

由虚位移原理,有

$$Q\delta r_A - P\delta r_E = 0$$

所以

$$Q\delta r_B = \frac{P\delta r_D}{\sin \varphi} = \frac{P\delta r_{Be}}{2\sin \varphi} = \frac{1}{2}P\delta r_B$$

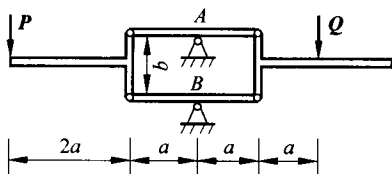


图 3

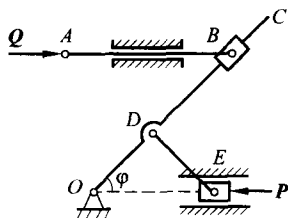


图 4a

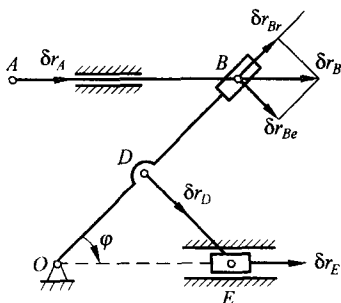


图 4b

因此有

$$P = 2Q$$

5. 不计组合梁(图 5a)的自重, 已知 $P = 1\text{ kN}$, $M = 0.6\text{ kN} \cdot \text{m}$, $l_1 = 2\text{ m}$, $l_2 = 3\text{ m}$, H 、 B 、 G 、 D 、 E 为铰链, 试用虚位移原理求固定端 A 处的反力偶。(林敬圣, 浙江农业大学工程技术学院。原第 257 题, 1994, No. 4。)

解: 解除 A 处固定端约束而以铰链约束代替, 补充一个约束反力偶 M_A , 组合梁变成一个自由度系统。选 φ 为广义坐标, 其虚位移关系如图 5b 所示。类似于速度投影定理, 各点的虚位移有如下关系:

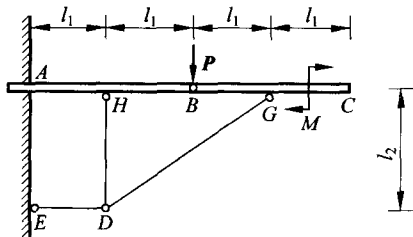


图 5a

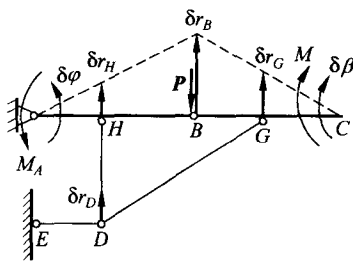


图 5b

$$\delta r_B = 2l_1 \delta \varphi, \quad \delta r_H = \delta r_D = \delta r_G = l_1 \delta \varphi$$

从而 BC 梁的虚转角为

$$\delta \beta = \frac{\delta r_B - \delta r_G}{l_1} = \delta \varphi$$

应用虚位移原理, 有

$$M_A \delta \varphi - P \delta r_B + M \delta \beta = 0$$

代入 δr_B 、 $\delta \beta$, 解得

$$M_A = 2Pl_1 - M = 3.4\text{ kN} \cdot \text{m}$$

6. 钳形工具的尺寸如图 6a 所示, $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$ 。不计其自重, 靠 D 和 E 处的摩擦力将重物提起。问 D 、 E 处的摩擦系数至少应为多少时才能将重物提起? (史希陶, 山东工业大学理论力学教研室。原第 97 题, 1985, No. 4。)

解: 以 BCD 为研究对象, 由对称性, C 点的作用力为水平方向。由三力平衡条件, 三力汇交于 O_1 点。设 H 为 DE 的中点 (图 6b), 所以有

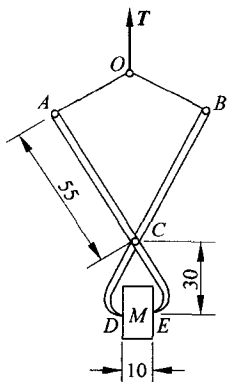


图 6a

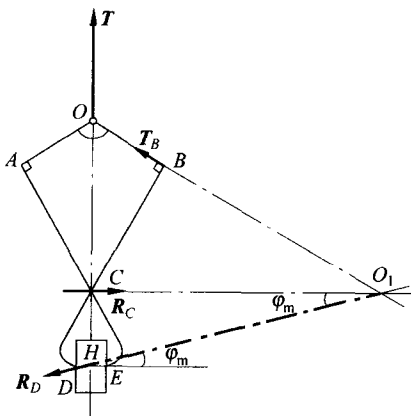


图 6b

$$\mu = \tan \varphi_m = \frac{HC}{O_1C + HD} = \frac{30}{110 + 5} \approx 0.26$$

7. 机构如图 7 所示。杆 AF 和 BD 在 C 处用铰链联接, $\overline{AF} = \overline{BD} = 30\text{cm}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 10\text{cm}$, A 处为一套筒, D 、 F 在同一水平面上, B 处作用一铅垂力 P 。当 $\theta = 0$ 时, 弹簧无变形, 其弹性系数 $k = 18\text{N/cm}$, 不计自重和各处摩擦, 求 P 值在什么范围内, $\theta = 0$ 为系统的稳定平衡位置? (叶柏年, 太原工业大学理论力学教研室。原第 88 题, 1985, No. 1。)

解: 以 $\theta = 0$ 时为系统的零势能位置, 则系统的势能为

$$V = -30P(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k(20\sin\theta)^2$$

代入 k 值, 得

$$V = -30P(1 - \cos\theta) + 3600\sin^2\theta$$

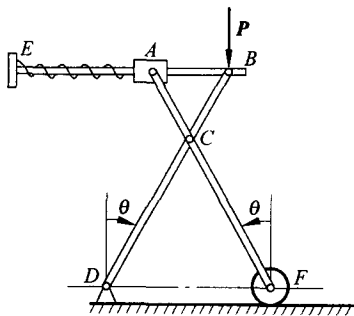


图 7

$$\frac{dV}{d\theta} = -30P\sin\theta + 7200\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -30P\cos\theta + 7200(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

当 $\theta=0$ 时, $\frac{dV}{d\theta}=0$, 因此 $\theta=0$ 是系统的平衡位置。若系统要保持稳定, 将 $\theta=0$ 代入二阶导数中, 应使

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = -30P + 7200 > 0$$

从而求出

$$P < 240\text{N}$$

即 $P < 240\text{N}$ 时, $\theta=0$ 是系统的稳定平衡位置。

8. 质量为 M 的尖劈放在倾角为 30° 的斜面上(图 8a), 已知所有接触处的摩擦系数均为 $\mu = \tan\varphi$, 为使质量为 m 的重物匀速上升, 求必须对尖劈施加多大的水平力 P ? (张伟东, 石家庄市拖拉机厂教育中心。引自上海力学学会智力竞赛题。原第 101 题, 1985, No. 5。)

解: 取坐标系如图 8b, 分别对尖劈和重物进行受力分析, 可得如下方程组

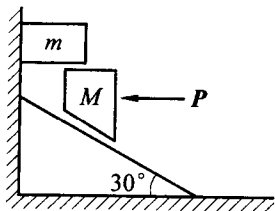


图 8a

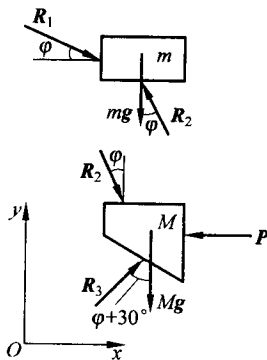


图 8b

$$R_1 \cos\varphi - R_2 \sin\varphi = 0$$

$$-R_1 \sin\varphi + R_2 \cos\varphi - mg = 0$$

$$R_2 \sin\varphi + R_3 \sin(\varphi + 30^\circ) - P = 0$$

$$-R_2 \cos\varphi + R_3 \cos(\varphi + 30^\circ) - Mg = 0$$

由此可解得

$$P = mg[\sin\varphi + \cos\varphi \tan(\varphi + 30^\circ)] \frac{\cos\varphi}{\cos 2\varphi} + Mg \tan(\varphi + 30^\circ)$$

9. 抛物线形状的铁丝(图 9a), 其方程为 $cz = x^2$, z 为铅垂轴。小环 A 串在铁丝

上,它们之间的摩擦系数为 μ 。求平衡时小环离 x 轴的最大距离。(徐蕾,务川汞矿教育心理化学组。原第 109 题,1986, No. 1。)

解: 设小环重量为 G , 小环处于临界状态时, 铁丝与小环接触处的斜率为

$$\tan\theta = \frac{dz}{dx} = \frac{2x}{c}$$

法向力为 N , 摩擦力为 $F = \mu N$, 如图 9b 所示, 由力三角形立即可得

$$F = \mu N = N \tan\theta = N \frac{2x}{c}$$

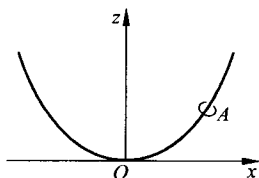


图 9a

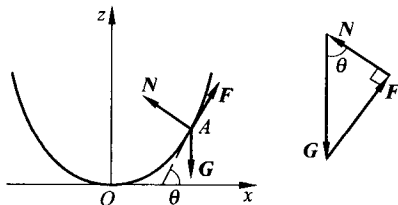


图 9b

所以

$$x = \frac{c}{2} \mu$$

即平衡时小环离 x 轴的最大距离为

$$z_{\max} = \frac{\mu^2 c}{4}$$

10. 均质矩形物体 $ABCD$ 重为 P , 置于斜面上, 与跨过滑轮的细绳相连, 细绳另一端与重为 W 的物体相连。设物体 $ABCD$ 的宽 $\overline{AB} = a$, 高 $\overline{BC} = 4a$, 与斜面间的摩擦系数为 $\mu = 0.4$, 斜面斜率为 $3/4$, 细绳的 AE 段保持水平(见图 10a)。不计滑轮摩擦, 求使物体 $ABCD$ 保持平衡的 W 的取值范围。(梁艳春, 吉林大学数学系力学教研组。原第 125 题, 1986, No. 5。)

解: 物体 $ABCD$ 的受力如图 10b 所示, 对其建立平衡方程

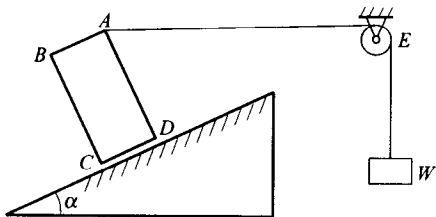


图 10a

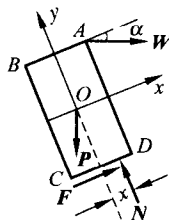


图 10b

$$\left. \begin{aligned} F + W \cos \alpha - P \sin \alpha &= 0 \\ N - W \sin \alpha - P \cos \alpha &= 0 \\ 2aF - 2aW \cos \alpha - 0.5aW \sin \alpha + Nx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

摩擦力满足的条件为

$$|F| \leq \mu N \quad (2)$$

根据方程(1)和式(2),得

$$\frac{3-4\mu}{4+3\mu}P \leq W \leq \frac{3+4\mu}{4-3\mu}P$$

即

$$0.27P \leq W \leq 1.64P$$

为保证物体不翻倒,必须满足

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \quad (3)$$

根据方程(1)和式(3),得

$$0.21P \leq W \leq 0.5P$$

综上,故 W 的取值范围是

$$0.27P \leq W \leq 0.5P$$

11. 如图 11a 所示,一均质长方体放在水平面上,接触面间摩擦系数为 μ ,长方体重量为 G 。试证明:(1)长方体顶部加一水平力 P ,长方体高和宽比值最小为 $\frac{1}{2\mu}$ 时,长方体才有可能翻倒。(2)若长方体高和宽比值小于 $\frac{1}{2\mu}$ 时,如果想翻动长方体,作用于长方体顶部的推力与水平夹角至少为 $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\mu} - \frac{2h}{b}\right)$,并且此力大小至少应等于 $\frac{Gb}{2(bsin\alpha + hcos\alpha)}$ 。(杨贺田,地矿部张家口技工学校力学教研室。原 314 题,1998, No. 3。)

解:(1) 首先研究在长方体顶部作用水平力 P 且刚好翻动的情况,如图 11b 所示。图中 R 为长方体所受的最大全反力。根据三力平衡汇交原理,设三力交于 O 点。因此,具有最小高宽比的长方体顶部必定过 O 点。由几何关系,有

$$\frac{b/2}{h} = \tan \varphi = \mu$$

即

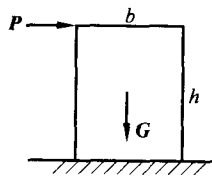


图 11a

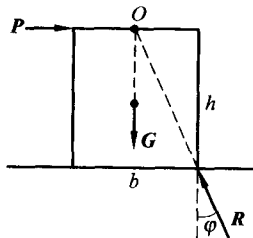


图 11b

$$\frac{b}{h} = 2\mu \quad \text{或} \quad \frac{h}{b} = \frac{1}{2\mu}$$

由此可见,当均质长方体高和宽比值小于 $\frac{1}{2\mu}$ 时,不管作用于长方体顶部的水平力和长方体重量有多大,都不可能将长方体翻动,此时长方体只有滑动可能。

(2) 再研究长方体高和宽比值小于 $\frac{1}{2\mu}$ 时,在临界平衡情况下,由三力平衡汇交原理,三力交点 O 一定在长方体顶部的上方(见图11c)。由几何关系,有

$$\tan\alpha = \frac{x}{b/2} = \frac{2x}{b} \quad (1)$$

因为 $\tan\varphi = \frac{b/2}{x+h} = \mu$, 即 $x = \frac{b}{2\mu} - h$, 将其代入式(1), 则有

$$\tan\alpha = \frac{2\left(\frac{b}{2\mu} - h\right)}{b} = \frac{1}{\mu} - \frac{2h}{b}$$

即

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\mu} - \frac{2h}{b}\right)$$

至于所求力 P 的大小, 则可由以下平衡方程求得

$$\sum m_A(\mathbf{F}) = 0$$

$$-G \cdot \frac{b}{2} + P \cos\alpha \cdot h + P \sin\alpha \cdot b = 0$$

因此

$$P = \frac{Gb}{2(b \sin\alpha + h \cos\alpha)}$$

12. 跳板 AB 长为 l , 不计其重量, 水平置于直角槽内(图12a)。A、B两端的摩擦角均为 φ 。试求重量为 P 的人站在跳板上且保持平衡的范围。(任贵斌, 辽河油田职工大学力学教研室, 选自中央电大《理论力学教学参考》。原第137题, 1987, No. 2。)

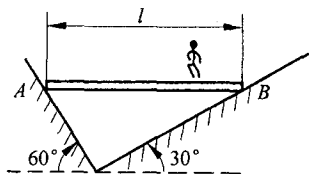


图 12a

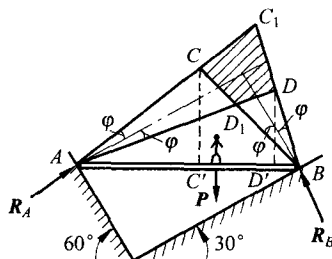


图 12b

解：分别作 A、B 两点处的摩擦角如图 12b 所示，可得区域 CC_1DD_1 (图中阴影部分)。设过 C、D 两点的铅垂线与 AB 的交点为 C' 、 D' 。板 AB 受到 R_A 、 R_B 和 P 三力作用而平衡，其作用线必交于一点，且交点在区域 CC_1DD_1 内。因此，人安全活动的范围在 $C'D'$ 内 (否则力作用线不可能汇交于一点)。通过几何关系，可以计算出 AC' 和 AD' 的长度：

$$\overline{AC'} = \frac{l(\sqrt{3} - \tan\varphi)^2}{4(1 + \tan^2\varphi)}$$

$$\overline{AD'} = \frac{l(\sqrt{3} + \tan\varphi)^2}{4(1 + \tan^2\varphi)}$$

13. 如图 13a 所示，长为 L 的梯子 AB，B 端放在与水平面成 α 角的支撑面上，A 端靠在竖直的支撑面上，梯子与竖直方向的夹角为 θ ，梯子两端与支撑面间的摩擦系数均为 μ ，梯子重为 Q 。有一重量为 W 的人，从下往上爬梯。试求出保持梯子不滑动时，此人可沿梯子上爬的最高位置。(杨贺田，地矿部张家口技工学校力学教研组。原第 281 题，1996，No. 1。)

解：设 M 点为所求人爬梯的最高位置，分别作 A、B 点的摩擦角 φ_A 和 φ_B ，有

$$\varphi_A = \varphi_B = \arctan\mu$$

设两摩擦角的交点为 O，AF 为墙面过 A 点的法线；作 OF 垂直于 AF；作 AC 垂直于 BO；作两重力 W 、 Q 的延长线与 AF 交于点 D、E。几何关系如图 13b 所示，且有

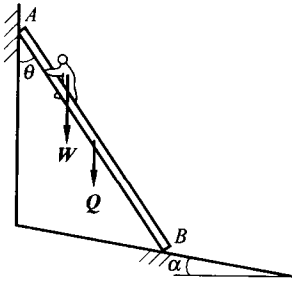


图 13a

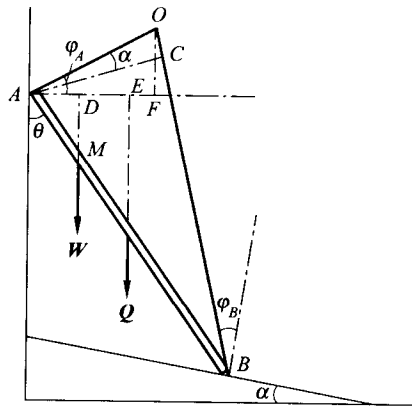


图 13b

$$\overline{AF} = \overline{AO} \cos\varphi_A = \overline{AC} \frac{1}{\cos\alpha} \cos\varphi_A = L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos\varphi_A}{\cos\alpha} \quad (1)$$

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \overline{AF} - \frac{L}{2} \sin\theta = L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos\varphi_A}{\cos\alpha} - \frac{L}{2} \sin\theta \quad (2)$$

$$\overline{DF} = \overline{AF} - \overline{AD} = L \sin(\theta - \varphi_B + \alpha) \frac{\cos\varphi_A}{\cos\alpha} - \overline{AM} \sin\theta \quad (3)$$