普通高等教育“十五”国家级规划教材

# 常微分方程

伍卓群　李勇　编

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

# 常微分方程

伍卓群　李　勇　编

高等教育出版社

**内容提要**

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材。全书分为六章，各章内容分别为：初等积分法，线性方程，常系数线性方程，一般理论，定性理论，一阶偏微分方程等。在各章节之后都配备了一定数量的习题。

本书可作为高等学校数学学科各专业常微分方程课程的教材，也可供其它理科专业选用。对于其他希望了解常微分方程这门学科的读者，它也可作为一本入门的参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

常微分方程/伍卓群，李勇编．—北京：高等教育出版社，2004 重印

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 7-04-012944-2

Ⅰ．常…　Ⅱ．①伍…②李…　Ⅲ．常微分方程—高等学校—教材　Ⅳ．O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 116463 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010－64054588 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800－810－0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010－82028899 | | http://www.hep.com.cn |
| 经　　销 | 新华书店北京发行所 | | |
| 印　　刷 | 北京星月印刷厂 | | |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2004 年 1 月第 1 版 |
| 印　　张 | 13.25 | 印　　次 | 2004 年 2 月第 2 次印刷 |
| 字　　数 | 250 000 | 定　　价 | 15.70 元 |

# 序　言

常微分方程是伴随着微积分的产生和发展而成长起来的一门历史悠久的学科.从诞生之日起很快就显示出它在应用上的重要作用.特别是作为牛顿力学的得力助手,在天体力学和其它力学领域显示出巨大的功能.牛顿通过解微分方程证实了地球绕太阳的运动轨道是一个椭圆.海王星的存在是天文学家先通过微分方程的方法推算出来,然后才实际观测到的.随着科学技术的发展和社会进步,常微分方程的应用不断扩大和深入.时至今日,可以说常微分方程在所有自然科学领域和众多的社会科学领域都有着广泛的应用.在数学学科内部的许多分支中,常微分方程是经常要用到的重要工具之一.常微分方程每一步进展都离不开其它数学分支的支援;反过来,常微分方程进一步发展的需要,又推动着其它数学分支的发展.这一古老的学科,由于应用领域的不断扩大和新理论生长点的不断涌现,它的发展至今仍充满着生机和活力.

常微分方程是数学学科各专业的一门基础课,一般安排在数学分析和高等代数已学完的第二学年下学期,是整个课程体系中的一个重要的组成部分.它的教学目的是使学生掌握本门学科的基础知识,接受本门学科特有的基本训练.作为数学分析和高等代数的后续课,它对于训练如何运用已学知识分析和解决进一步的数学问题有着特殊的作用.

早年王柔怀和伍卓群曾编著《常微分方程讲义》一书(以下简称《讲义》),作为全国通用教材,由人民教育出版社出版.经多次印刷后,人民教育出版社曾建议修改后再版.由于作者感到对如何进行修改没有更多新的想法,又忙碌于其它事务,未能及时修订.后来他们的同事周钦德和李勇,在使用该书进行教学的过程中,积累了大量经验,对教材的修改进行了许多思考,在此基础上重新编写了一本同名教材,由吉林大学出版社出版.这部教材在吉林大学使用多年,取得了良好的教学效果.该教材继承了原《讲义》的体系和基本框架,但对部分内容进行了增删,有的章节改动的幅度还比较大.现在要出版的这本同名书就是由上述两部讲义经全面修改,反复加工而成的.

本书仍沿袭原《讲义》的体系和基本框架,按照从易到难,从特殊到一般的认识规律,先讲线性方程的理论,然后再讲非线性方程的一般理论.几十年来我们的实践表明,这样的体系和基本框架从教学上看,是自然的和合理的.在几次的改编中,特别是这次的改编中,为使之更趋完善,我们又作出了进一步的努力.

作为一门基础课的教材,它所讲述的内容应该主要是常微分方程论中最基本的理论和方法,对这些内容,无论在思路剖析,逻辑推理和文字表达上,都应力

求清晰顺畅.同时我们认为,一部教科书除了给学生提供必须学习的基本内容之外,也很有必要有选择地纳入某些进一步的理论和方法,以及多多少少能反映某些重要的新进展和新动向的内容,以便有兴趣的学生学习和查阅,为他们提供进一步学习的线索,也给能力强的学生提供发挥学习潜能的空间.本书按照这种想法进行了尝试,但不能排除在材料的选取上可能出现的偏颇.在本书中这些内容都用小字体排印(并用 * 标出),为了方便学生和任课教师,我们让小字体以外的部分自成体系.

全书共分六章.

在第一章,中我们从提出常微分方程的一些实例开始,然后引进一些必要的概念,但主要介绍解常微分方程的初等积分法.我们删减了原《讲义》中占有一章篇幅的过长的绪论,但列举了更多的例子,这些例子来自众多的实际问题和学科领域.这样做是为了表明常微分方程应用的广泛性,以便激发学生的学习热情.有的例子,例如长沙马王堆女尸之例,是编者费了一些周折才找到的.与原《讲义》相比,初等积分法这一部分的处理变动较大,它是参照微积分中通常建立不定积分的方式来讲述的,这样做便于引导学生从微积分的学习过渡到常微分方程.此外,在系统讲授典型方程解法的同时,特别强调训练解方程的灵活性.

第二章讲述线性方程的一般理论.首先针对这类具有特殊结构的方程,证明初值问题解的存在与唯一性,然后在此基础上展开其余的讨论.用逐步逼近法对线性方程证明存在与唯一性定理是容易被学生接受的.有了这个底子,将来再用这种方法处理非线性方程时,无论对定理的条件和证明就都好理解了.在这一章里,除了关于线性方程的不可不讲的基本内容外,我们增加了关于边值问题和周期解的讨论.

与原《讲义》相比,第三章关于常系数线性方程的讨论,增删较多,特别是,完全改写了关于方程组的部分.此外,增加了解这类方程的拉氏变换法.

讲述一般理论的第四章,内容比同类教程多.我们先讲皮卡存在与唯一性定理,以便与线性情形的相应部分对接.然后讲只假设右端函数连续的皮亚诺存在定理和关于解析方程的柯西存在与唯一性定理.关于解的延展问题的论述远比同类教程详尽,其中关于无界域情形的比较难的部分是为有兴趣深入钻研的读者提供的.本章所介绍的结果既有局部性的,又有整体性的,包括解的整体存在性与唯一性.解对初值与参数的连续相依性和可微性,给出的是许多实际应用中需要的"整体"的形式.书中关于奇解的讨论只占有很小的篇幅,我们把它放在唯一性部分的后面,从可能出现的不唯一性现象引申出奇解的概念.作为常微分方程理论的应用之例,我们介绍了解非线性方程的连续性方法.

第五章讲述在理论上和应用上都很重要的定性理论.与原《讲义》相比,这一章进行了全面改写,并且增加了一些新的内容,特别是常微分方程现代理论之一

的动力系统中关于结构稳定的概念,分支和浑沌现象以及守恒系统的初步知识.这一章的内容讲多讲少可由任课教师灵活掌握.

第六章讲述一阶偏微分方程.之所以在常微分方程教程中讨论这种偏微分方程,是因为它的求解以及关于它的其它研究都与常微分方程密切相关,联系的纽带就是特征的概念.在这一章里,我们其实只讨论了线性和拟线性方程,并且主要是讲如何求解.我们指出了拟线性方程的初值问题一般只有局部解存在;要想在大范围内研究拟线性方程,就必须将解的概念加以推广,即引进容许含有间断的广义解的概念.

我们从长期的教学实践中深深地体会到,为了更好地培养学生的能力,一部好的教材还必须有一套好的习题与之匹配.对此,我们在过去的教材建设中一直十分重视并下过功夫.遗憾的是,原《讲义》中所配习题被人出了题解,这使得那批习题的锻炼意义大为减退.这一次,我们又为习题的配备倾注了很大的精力.

在本书的编著过程中,我们自始至终得到了吉林大学数学学院的大力支持.吉林大学数学学院对教材建设一向十分重视.本书前身的出版也是与他们的支持分不开的.青年教师史少云和韩月才为本书付梓前的打字付出了大量的劳动.一些研究生参与了对习题的验算和验证.在此谨向数学学院的领导和在本书的编著过程中做出贡献的同仁表示衷心的感谢.我们还要特别感谢高等教育出版社王瑜等有关同志对本书的出版所给予的关注,支持和推动.

我们恳切地希望,本书出版以后能得到各方的批评和指教.

编者

2003 年秋于长春

# 郑重声明

# 目　　录

# 第一章　初等积分法

17 世纪后期，牛顿（Newton,1642—1727）和莱布尼茨（Leibniz,1646—1716）创立了在人类科学史上具有划时代意义的微积分学.微积分学的产生和发展,与人们求解微分方程的需要密切相关.实际问题一旦转化为微分方程,就归结为对微分方程的研究.可以说微分方程在所有科学包括自然科学和社会科学领域,都有着广泛的应用.在数学学科内部的其他许多分支中,微分方程也是经常要用到的重要工具之一.本讲义着重介绍常微分方程的基本理论和基本方法.本章首先列举微分方程的一些例子,引进一些有关的概念,然后介绍求解常微分方程的初等积分法.

## §1　例子与概念

在运用微积分的知识去解决一些实际问题时,根据科学定律和原理,常常会得到这样一些方程,它们联系着自变量和未知函数以及未知函数的某些微商,习惯上称为**微分方程**.在这类方程中,所要求的解,不像大家所熟悉的代数方程是一个(或一组)数,而是一个(或多个)函数.下面列举一些微分方程的例子.

**例 1.1**　求曲率处处为正数 $a$ 的曲线方程.

**解**　设此曲线的方程为 $y = y(x)$.由微分学的知识知道,$y = y(x)$ 于点 $x$ 处的曲率为 $|y''(x)(1 + y'^2(x))^{-3/2}|$.由此知此曲线应满足方程

$$|y''(x)(1 + y'^2(x))^{-3/2}| = a. \tag{1.1}$$

它就是一个微分方程. □

**例 1.2**　根据牛顿冷却定律,高温物体冷却的速率与它同周围的温度差成正比.已知现在此物体周围的温度是 $d$℃,最初物体的温度是 $y_0$℃.设经过 $t$ 分钟时温度为 $y(t)$℃.则函数 $y = y(t)$ 应满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k(y-d), \tag{1.2}$$

$$y(0) = y_0, \tag{1.3}$$

其中 $k$ 是某个正的比例常数.方程(1.2)便是一个微分方程,它是科学史上最早出现的微分方程之一.条件(1.3)称为初值条件.

**例 1.3**　要建造高 $h$ 米水平截面为圆形的桥墩,桥墩承受的载荷为 $P$ 吨,建筑材料的密度为 $\rho$ 吨/米$^3$,允许的压强为 $k$ 吨/米$^2$,希望建筑材料的用量最省.

这需要求桥墩上底 $S_0$ 与下底 $S_1$ 的面积以及轴截面的形状(即通过桥墩中心轴的平面与桥墩相截所得的外形曲线).

首先求上底面积 $S_0$. 为了使建筑材料的用量最省,就应要求上底的面积 $S_0$(米$^2$) 刚好能承受载荷 $P$,于是 $S_0$ 满足 $kS_0 = P$,即

$$S_0 = \frac{P}{k}.$$

再求下底的面积 $S_1$. 注意到随着水平位置的下移,水平截面的面积必须不断增大.这是因为截面除了承受载荷 $P$ 外,还要承受它以上那段桥墩的重量.下面来讨论在建筑材料用量最省的条件下,水平截面应按什么样的规律增大.现以上底的圆心为原点,以垂直向下为 $x$ 轴正方向,任意一条水平线为 $y$ 轴,建立平面直角坐标系.以 $S = S(x)$ 表示距离上底 $x$ 米处水平截面的面积(米$^2$).当 $\Delta x > 0$ 时,为了使建筑材料的用量最省,就应该让 $S(x+\Delta x)$ 比 $S(x)$ 大的面积刚好能承受从 $x$ 到 $x+\Delta x$ 这一段桥墩的重量,即让

$$k(S(x+\Delta x) - S(x)) \approx \rho S(x)\Delta x,$$

于是

$$\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \approx mS(x),$$

其中 $m = \rho k^{-1}$. 令 $\Delta x \to 0$,就得到函数 $S = S(x)$ 所应满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = mS,$$

它也是一个微分方程. $S(x)$ 还应满足初值条件

$$S(0) = S_0.$$

利用解 $S(x)$ 即可求得 $S_1$ 的面积以及轴截面的形状.

**例 1.4**　1949 年美国芝加哥大学利比(W.F.Libby)建立的碳 - 14 测定年代的方法是考古工作者重要的断代手段之一.其原理如下:从星际空间射到地球的射线称为宇宙线.宇宙线中子穿过大气层时撞击空气中的氮核,引起核反应而生成具有放射性的碳 - 14.宇宙线的强度可以认为是不变化的,它经年不息地射到地球上来,不断地产生着碳 - 14,而碳 - 14 本身又不断地放出 $\beta$ 射线裂变为氮.这种不断产生、不断裂变的过程从古到今一直进行着,因此大气中的碳 - 14 实际上处于动态平衡,大气中碳 - 14 的含量(指物体标本中碳 - 14 的原子个数与非放射性碳原子个数之比)可认为是一常值(实测约为 $1.2 \times 10^{-12}$).碳 - 14 和其他碳原子在化学性质上毫无区别.它与氧化合生成放射性二氧化碳,通过光合作用而进入植物体内.动物吃植物,碳 - 14 又进入动物体内.因此在活的动植物体中碳 - 14 的含量与大气中的含量大致相同.动植物一死,体内碳 - 14 得不到补充,只是不断地裂变为氮而减少.已经知道放射性元素的裂变规律遵循:裂

变速率与剩余量成正比.对碳 - 14 来说,其半衰期为 5730 年.这样,从动植物死体碳 - 14 的含量就可以约略推算出它的死亡年代.

例如,1972 年发掘长沙市东郊马王堆一号汉墓时,对其棺椁外主要用以防潮吸水用的木炭分析了它含碳 - 14 的量约为大气中的 0.7757 倍,据此便可推算出木炭的年代,它也就可以当作此女尸下葬的年代.

以 $t$ 表示时间(年),$t=0$ 对应于木炭烧制的时刻,以 $y=y(t)$ 表示木炭经过 $t$ 年后碳 - 14 的含量,则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 是碳 - 14 的增长速率,而碳 - 14 的裂变速率便是 $-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,故按裂变规律,我们有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-ky, \tag{1.4}$$

其中 $k>0$ 为比例常数.木炭在 $t=0$ 时的碳 - 14 含量与大气中的含量 $\alpha=1.2\times10^{-12}$ 大致相同,而经过 5730 年后衰减了一半,故函数 $y(t)$ 还应满足如下条件:

$$y(0)=\alpha,\quad y(5730)=\frac{\alpha}{2}. \tag{1.5}$$

为了求满足(1.9)的函数,我们将(1.9)写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-k\mathrm{d}t,$$

积分便得

$$\ln y=-kt+C,$$

从而

$$y=\mathrm{e}^{-kt+C}=C_1\mathrm{e}^{-kt},$$

其中 $C$ 和 $C_1$ 为任意常数.不论 $C$ 和 $C_1$ 取何值,上式确定的函数都满足方程(1.9).我们所要求的是同时还满足条件(1.10)的函数.由(1.10)中第一个条件可知应取 $C_1=\alpha$,而由(1.10)中第二个条件则知应满足

$$\alpha\mathrm{e}^{-5730k}=\frac{\alpha}{2},$$

据此便可确定

$$k=\ln 2/5730.$$

假设木炭是 $T$ 年前烧制的,经过 $T$ 年,其碳 - 14 的含量已减少为大气中含量的 0.7757 倍,故应有

$$0.7757\alpha=\alpha\mathrm{e}^{-kT}.$$

由此算出

$$T=-\ln(0.7757)/k=-5730\ln(0.7757)/\ln 2\approx 2100.$$

这表明长沙汉墓中的女尸大约是在公元前 128 年下葬的.

**例 1.5** 英国人马尔萨斯(Malthas,1766—1834)根据百余年的统计资料,于 1798 年提出了闻名于世的所谓**马尔萨斯人口模型**:单位时间内人口的增长量与人口成正比.设时刻 $t$ 的人口数量为$N(t)$,$r$ 为比例系数.那么,根据马尔萨斯的理论,从时刻 $t$ 到时刻 $t+\Delta t$ 的人口增长量便是

$$N(t+\Delta t)-N(t)\approx rN(t)\Delta t,$$

从而

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}\approx rN(t).$$

令 $\Delta t\to 0$ 就得到

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN.$$

用例 1.4 中所述方法可求得它的解为

$$N=N_0\mathrm{e}^{rt},$$

其中 $N_0$ 是开始时刻 $t=0$ 时的人口数量.显然,如果 $r>0$,人口将按年以公比为 $\mathrm{e}^r$ 的等比级数指数增长,出现"人口爆炸".这个模型虽然与 19 世纪以前欧洲一些地区的人口数据十分吻合,但它与自那以后的人口资料相比出现较大的偏差.后来,人们修正了马尔萨斯模型,提出了下述的**自限人口模型**(Logistic **模型**):

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{N_m}\right)N,$$

其中 $N_m$ 表示自然资源和环境条件所容许的最大人口数量.利用后面要介绍的初等积分法,我们能够求得它的解为:

$$N(t)=\frac{N_m}{1+\left(\frac{N_m}{N_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}},$$

其中 $N_0$ 是开始时刻 $t=0$ 时的人口数量.

实际上,上述自限模型也可描述自然界中许多生物数量的增长规律.例如,若以 $N(t)$ 表示某渔场鱼的数量,$N_m$ 表示渔场资源条件所限制的鱼的最大数量,那么该模型就描述了该渔场鱼的总量随着时间变化的规律.如果假设单位时间的捕捞量与鱼量成正比,比例系数为 $k$,则在有捕捞的情况下,渔场的鱼量随时间变化的规律应满足下面的微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{N_m}\right)-kN.$$

**例 1.6** 从牛顿第二定律(运动定律)知道,运动物体的加速度与作用力(合外力)成正比.假设在一个物理空间 $\mathbb{R}^3$ 中,物体的位置坐标为 $x$,那么由微积

分学知道,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$分别表示运动物体的速度和加速度.假设所受到的力为$f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$.则物体的运动规律应该遵循下面的微分方程:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right),$$

其中 $m$ 是物体的质量.这种方程统称为**牛顿运动方程**.如果能够求得满足该方程的函数,那么人们也就知道了该物体的运动规律.

如果考虑的是 $N$ 个天体(例如太阳系)的运行,每个星体的质量为 $m_i$,$i=1,\cdots,N$,坐标为 $x_i$,$i=1,\cdots,N$,它们构成一个星系.那么根据牛顿的运动定律和万有引力定律,人们可得到这 $N$ 个天体所满足的方程:

$$m_i\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}=-\sum_{1\leqslant j\leqslant N,j\neq i}Gm_im_j\frac{x_i-x_j}{\|x_i-x_j\|^3},\quad i=1,\cdots,N,\tag{1.6}$$

其中 $\|p-q\|$ 表示 $p$ 和 $q$ 两点间的距离,$G=6.6732\times10^{-11}$ 表示万有引力常数.这是一个微分方程组.天体力学的一个基本问题是:在有限的时间里,是否有天体之间发生相撞,或者有某个天体脱离这个星系?这个问题十分复杂.从拉普拉斯(Laplace,1749—1827)开始,人们就着手研究.早在二十世纪初,大数学家庞加莱(Poincaré,1854—1912)就已证明:除了两体问题(开普勒(Kepler,1571—1630)问题),即便对简单的 3-体问题,人们也不能求得(事实上也不存在)方程的显式解.

**例 1.7**　如下形式的一组微分方程称为**哈密顿**(Hamilton,1805—1865)**系统**

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

其中

$$H=H(p_1,\cdots,p_n;q_1,\cdots,q_n;t)$$

是一已知函数,或简写为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p},\tag{1.7}$$

其中 $p=(p_1,\cdots,p_n)$,$q=(q_1,\cdots,q_n)$,$H=H(p,q,t)$.这样的方程组在力学和物理学中有着广泛的应用.(1.7)中的 $p$ 称为**广义动量**,$q$ 称为**广义坐标**.

当函数 $H$ 不含 $t$ 时,(1.7)称为**保守系统**.若 $p=p(t)$,$q=q(t)$ 满足(1.7),对(1.7)微分,便得到

$$\mathrm{d}H=\left(\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=0,$$

即 $H(p(t),q(t))\equiv C$(常数),它所刻画的是能量守恒定律.

当 $H$ 只含 $p$,即 $H = H(p)$ 时,(1.7) 称为**可积系统**.此时 $p = p(t), q = q(t)$ 若满足方程(1.7),则

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H(p(t))}{\partial q} \equiv 0, \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(p(t))}{\partial p} = \frac{\partial H(p_0)}{\partial p} = \omega_0,$$

从而

$$p = p_0, \quad q = \omega_0 t + q_0,$$

其中 $p_0, \omega_0, q_0$ 均为常向量.

**例 1.8** 在一个市场经济体系中,基本的要素之一是要求市场价格能够促使商品的供给和需求关系相互协调一致,那样的价格就称为均衡价格.然而,通常情形是实际的市场价格与均衡价格并不相同,出现一定的偏差,并且,市场价格也不是静态的,而是随着时间发生波动,即所谓随行就市.因此,我们应当视商品价格 $x$ 为时间 $t$ 的函数,并且假定价格的变化是正比于需求与供给之差.设 $f(x,\alpha)$ 和 $g(x)$ 分别表示需求函数和供给函数,其中 $\alpha$ 是参数,它表示消费者的收入.那么,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = r(f(x,\alpha) - g(x)),$$

其中 $r$ 是比例系数.

下面引进一些有关的一般概念.一个微分方程,如果其中的未知函数只与一个自变量有关,则称为**常微分方程**(英文缩写为 ODE);如果未知函数与几个自变量有关,则称为**偏微分方程**(英文缩写为 PDE).前面引出的所有微分方程都是常微分方程.本书除了最后一章外,讨论的都是常微分方程.

从前面的例子看出:出现在微分方程中的未知函数微商的最高阶数可以是不同的,它称为该方程的**阶**.例如方程(1.1) 和(1.6) 是二阶微分方程,其余都是一阶微分方程.

$n$ 阶常微分方程的一般形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.8}$$

其中 $F$ 是关于变量 $x, y, \cdots, y^{(n)}$ 的已知函数,其中 $y^{(i)}$ 表示对 $x$ 的 $i$ 阶微商.称函数 $y = \varphi(x)$ 是(1.8) 在区间 $I$ 上的**解**,如果它在区间 $I$ 上有定义,具有(1.8) 中要求的各阶导数,并且恒成立

$$F(x, \varphi(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in I.$$

习惯上把 $n$ 阶常微分方程(1.8) 的含有 $n$ 个彼此独立的任意常数 $c_1, \cdots, c_n$ 的解族 $y = \varphi(x, c_1, \cdots, c_n)$ 称为(1.8) 的**通解**,而把(1.8) 的任何单个解称为**特解**.对于通解的概念,我们不准备作进一步更为确切的说明.还应该提到的是隐式解.如果由函数方程

$$\Phi(x, y) = 0 \tag{1.9}$$

所确定的隐函数 $y = y(x)$ 是(1.8) 的解,则(1.9) 就称为(1.8) 的**隐式解**;如果由含 $n$ 个任意常数 $c_1,\cdots,c_n$ 的函数方程

$$\Phi(x,y,c_1,\cdots,c_n) = 0 \tag{1.10}$$

所确定的函数族 $y = \varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$ 是(1.8) 的通解,则(1.10) 就称为(1.8) 的**隐式通解**.

正如我们在例 1.2,例 1.3 和例 1.4 中所看到的那样,许多实际问题往往只关心微分方程满足某一个(或一组) 特定条件的解,这种特定条件称为**定解条件**.求方程之满足定解条件的解的问题称为**定解问题**.最重要的定解条件是**初值条件**:对于 $n$ 阶常微分方程(1.8) 而言,初值条件是

$$y^{(i)}(x_0) = y_i,\quad i = 0,\cdots,n-1, \tag{1.11}$$

其中 $x_0 \in I$ 是自变量的某个给定值,$y_i, i = 0,\cdots,n-1$ 是未知函数的 $i$ 阶微商的给定值.求 $n$ 阶常微分方程(1.8) 满足初值条件(1.11) 的解的问题称为**初值问题**或**柯西**(Cauchy,1789—1857) **问题**(英文缩写为 IVP).当 $n = 2$ 时,问题的物理提法也叫**牛顿决定性原理**.另外一种常见的定解条件是**边值条件**.求方程满足给定边值条件的解的问题,称为**边值问题**(英文缩写为 BVP).对二阶常微分方程,人们经常考虑的边值条件有以下几种:

Ⅰ.**狄利克雷**(Dirichlet,1805—1859) **问题**:

$$y(a) = 0,\quad y(b) = 0.$$

Ⅱ.**周期边值问题**:

$$y(a) = y(b),\quad y'(a) = y'(b).$$

对于常微分方程,还有一类重要的问题,称为**周期解问题**.设 $I = \mathbb{R}^1$,并且 $F$ 关于 $x$ 是 $T$ - 周期函数,即以 $T$ 为周期的周期函数:$F(x+T,\cdot) = F(x,\cdot)$.如果 $T$ - 周期函数 $y = y(x)$ 于 $\mathbb{R}^1$ 上满足方程(1.8),则称它是(1.8) 的一个 **$T$ - 周期解**.在力学上,周期解所对应的运动呈现着周而复始的循环.

按未知函数最高阶微商解出的方程

$$y^{(n)} = f(x,y,\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1.12}$$

称为 $n$ 阶**正规形常微分方程**,而方程(1.8) 也称为 $n$ 阶**隐式常微分方程**.引进 $n$ 个未知函数

$$y_1 = y, y_2 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,y_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}.$$

则方程(1.12) 可化成如下的一阶常微分方程组