

各向异性单晶合金 结构强度与寿命

尹泽勇 岳珠峰 杨治国 成晓鸣 著



国防工业出版社

各向异性单晶合金结构 强度与寿命

尹泽勇 岳珠峰 著
杨治国 成晓鸣

国防工业出版社

北京

图书在版编目(CIP)数据

各向异性单晶合金结构强度与寿命/尹泽勇等著.
北京:国防工业出版社,2003.1

ISBN 7-118-03022-8

I. 各... II. 尹... III. ①各向异性—单晶—合金
晶体结构—结构强度②各向异性—单晶—合金晶体结
构—结构寿命 IV. 0732

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 086483 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京奥隆印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 8 1/8 208 千字

2003 年 1 月第 1 版 2003 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1-2000 册 定价:23.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

前 言

发展和应用镍基单晶合金的主要目的是提高军、民用发动机的性能和可靠性。镍基单晶合金作为航空发动机热端关键部件——涡轮转子叶片材料,最早于 20 世纪 70 年代在美国得到应用,如今在发达国家,该材料已广泛用于航空发动机、航天发动机及地面燃气轮机;在国内,也已用于小型航空发动机和大型航空发动机上。目前尚无可直接替代镍基单晶合金用于航空发动机热端关键部件的更好的材料。

然而,单晶合金与以往常用的多晶合金有很大不同。它是一种各向异性材料,其机械性能具有方向性、拉压不对称性等与各向同性材料迥然不同的特点。另外,在高温环境下,不随时间变化的塑性变形与随时间变化的蠕变同时出现,更增加了问题的复杂性。可以说,以往的分析方法根本不适用于镍基单晶叶片及其他单晶结构,有必要改进或建立新的弹塑性及粘塑性本构模型和相应的非线性分析方法。同时,必须对镍基单晶的各向异性及高温性能有深入的了解,以便在设计与使用中充分利用材料特有的优点。

对国产镍基单晶合金材料的力学性能的研究是十分必要的。通过研究可以增加对国产镍基单晶合金在一般载荷状态下的变形、损伤及失效机理的基本认识。将据此提出的晶体各向异性模型应用到镍基单晶叶片分析之中,对单晶叶片进行晶体取向优化设计,不仅可以减少不确定因素,避免有关各类故障甚至灾难性事故的发生,而且可充分利用材料性能储备,更安全地确定单晶叶片强度和寿命,从而推动国产发动机的发展和单晶材料的应用。另一方面,国内外现有的商业程序都没有实用的单晶结构强度和寿命分析功能,通过研究为单晶涡轮叶片强度和寿命分析及优化设

计提供完整的分析方法和计算程序也是十分必要的。

本书是作者在课题组研究工作的总结。第1章针对镍基单晶合金给出了晶体塑性理论的基本方程及有限元格式,并对之进行考核;第2章对 DD3 镍基单晶合金的弹塑性、断裂特性进行试验与理论研究,对板试样也进行了研究,以确定试样的厚度效应;第3章对镍基单晶合金的蠕变和持久寿命进行分析,建立了筏化模型和双参数损伤方程,进行试验验证,并推广于复杂应力状态;第4章对 DD3 单晶材料的疲劳性能进行研究,建立疲劳寿命模型,并将其用于复杂应力状态,最终提出考虑疲劳、蠕变和热疲劳的统一寿命模型;第5章按 DD3 单晶叶片工作状态全面开展了不同晶向下的 DD3 单晶物理性能、力学性能、蠕变性能的实验研究,得到 DD3 的性能数据;第6章介绍了我们开发的单晶结构强度、寿命分析软件 SLAPSC (Strength and Life Analysis Program of Nickel - Base Single Crystal Structures);第7章将所建立的各向异性单晶叶片强度寿命分析方法及相应的材料性能实验数据用于发动机研制工作中,给出了工程应用的实例。

在过去10年中,本书先后得到2项国家自然科学基金(No. 59501009 和 No. 50005016)、4项航空科学基金及多项航空发动机预研及型号项目的资助,主要内容于1999年度获航空工业总公司科技进步一等奖。我们对上述资助表示感谢。本书反映的研究成果也是有关单位合作的结果,除作者所在的中国航空动力机械研究所及西北工业大学外,合作单位还有:北京航空材料研究院、北京航空航天大学、陕西三原148厂等。在此要对北京航空材料研究院的吴仲棠研究员和魏鹏义研究员深表感谢。

内 容 简 介

本书针对镍基单晶合金给出了晶体塑性理论的基本方程及有限元格式,并对之进行考核;对 DD3 镍基单晶合金的弹塑性、断裂特性以及板试样进行了试验与理论研究,确定了试样的厚度效应;对镍基单晶合金的蠕变和持久寿命进行分析,建立了筏化模型和双参数损伤方程,进行试验验证,并推广于复杂应力状态;对 DD3 单晶材料的疲劳性能进行研究,建立疲劳寿命模型,并将其用于复杂应力状态,最终提出考虑疲劳、蠕变和热疲劳的统一寿命模型。最后介绍了作者开发的单晶结构强度、寿命分析软件 SLAPSC,并给出了工程应用的实例。

本书可供航空、航天发动机专业工程技术人员参考应用,亦可供相关专业的教师及本科以上的学生参考阅读。

目 录

第 1 章 晶体滑移的基本理论	1
1.1 变形描述	1
1.2 本构关系	3
1.2.1 率无关弹塑性本构关系	3
1.2.2 率相关本构方程	6
1.2.3 硬化系数 $h_{\alpha\beta}$	7
1.2.4 蠕变滑移本构模型	8
1.2.5 滑移系开动类型	8
1.3 模型参数的标定	9
1.3.1 E 、 G 、 ν 的测量	9
1.3.2 塑性参数标定	9
1.3.3 硬化模量的标定	10
1.3.4 潜硬化比参数 q	11
1.3.5 蠕变参数的标定方法	11
1.4 晶体滑移模型的有限元方程及其求解	13
1.5 滑移蠕变模型的试验验证	20
第 2 章 弹塑性	22
2.1 屈服规律	22
2.2 弹塑性滑移规律	23
2.3 高温板试样研究	25
2.4 断裂特性研究	29
2.4.1 等效应力	30
2.4.2 分切应力	31
2.4.3 滑移系的正应力	32

2.4.4 能量密度准则	33
第3章 蠕变和持久	37
3.1 筏化准则	37
3.1.1 模型	37
3.1.2 单向应力状态下的筏化预测	39
3.1.3 一般应力状态下筏化预测	40
3.1.4 筏化过程的定量描述	40
3.1.5 蠕变持久寿命的晶体取向相关性	40
3.2 本构模型	43
3.3 颈缩和开动滑移系的确定	45
3.4 参数的标定	47
第4章 低周疲劳	54
4.1 材料和实验	54
4.2 试验结果	54
4.2.1 循环变形特性	54
4.2.2 细观检测	57
4.3 模型	58
4.3.1 晶体滑移理论	58
4.3.2 临界分切应力	59
4.3.3 塑性响应	61
4.3.4 取向和应变率修正循环塑性响应	62
4.4 疲劳寿命	63
4.5 薄壁圆筒试样用于 LCF 寿命分析	65
4.5.1 试验数据	65
4.5.2 薄壁圆筒试样受拉—扭载荷下的应力应变分析	66
4.5.3 LCF 寿命分析	68
4.6 统一寿命模型	68
4.6.1 试验结果	68
4.6.2 细化断裂机理	72

4.6.3 寿命模型	73
第5章 DD3 单晶合金性能实验	76
5.1 实验材料状态	76
5.2 物理性能测试	77
5.2.1 测试方法	77
5.2.2 动弹性模量和剪切模量	77
5.2.3 静弹性模量	79
5.2.4 测试结果分析	80
5.3 短时力学性能测试	81
5.3.1 测试方法	81
5.3.2 测试结果	86
5.3.3 测试结果分析	95
5.4 蠕变性能测试	101
5.4.1 测试方法	101
5.4.2 测试结果	104
5.4.3 测试结果分析	127
第6章 单晶结构分析程序开发	133
6.1 程序主要功能及流程框图	133
6.1.1 程序主要功能	133
6.1.2 主程序流程	134
6.1.3 子程序名称及功能	134
6.2 程序使用说明	162
6.2.1 数据输入特点	162
6.2.2 输入数据卡填写方式	162
6.2.3 输入文件示例	173
6.2.4 输出	186
6.3 SLAPSC 有限元程序考核	186
6.3.1 经典滑移模型蠕变计算考核	186
6.3.2 中间温度蠕变差值计算考核	190
6.3.3 经典滑移模型重启动计算功能考核	191

6.3.4	经典滑应模型塑性计算考核	192
6.3.5	经典滑移模型弹塑性蠕变计算考核	194
6.3.6	循环加载蠕变考核	195
6.3.7	统一粘塑性滑移模型程序考核	196
6.3.8	考核结果	197
第7章	工程应用	198
7.1	××发动机单晶涡轮叶片蠕变强度计算	198
7.1.1	引言	198
7.1.2	原始数据	198
7.1.3	计算模型	198
7.1.4	计算结果	199
7.2	××发动机超转单晶涡轮叶片强度分析	210
7.2.1	计算目的与方法	210
7.2.2	载荷及材料性能数据	211
7.2.3	超转叶片线弹性有限元分析	211
7.2.4	超转叶片弹塑性有限元分析	214
7.2.5	超转叶片低循环疲劳寿命估算	216
7.3	××发动机燃气涡轮转子叶尖径向变形计算	217
7.3.1	引言	217
7.3.2	原始数据	217
7.3.3	计算模型	218
7.3.4	计算结果	219
7.4	××发动机模拟单晶涡轮叶片设计及计算分析	220
7.4.1	××发动机单晶涡轮叶片蠕变断裂危险 截面	220
7.4.2	模拟叶片设计	220
7.4.3	模拟叶片铸造模设计	222
7.4.4	模拟叶片计算分析	224
7.5	单晶涡轮叶片晶向的优化	233
7.5.1	优化设计的基本方法	234

7.5.2 计算模型	235
7.5.3 计算结果	237
7.5.4 结果分析	239
参考文献	243

第 1 章 晶体滑移的基本理论

本章针对镍基单晶合金给出了晶体塑性理论的基本方程及有限元格式,并进行了考核。为方便起见,采用张量符号,对矢量和标量均作特别说明。张量表示方法见表 1.1。

表 1.1 张量表示法

张量符号法	张量分量法	矩阵记法
$\mathbf{w} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}$	$w_k = T_{klul}$	$\{w\} = [T]\{u\}$
$\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{u}\mathbf{T}$	$w_k = u_l T_{kl}$	$\{w\} = \{u\}[T]$
$\mathbf{W} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{S}$	$W_{kl} = T_{km}S_{ml}$	$[W] = [T][S]$
$\mathbf{W} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{T}\mathbf{S}^T$	$W_{kl} = T_{km}S_{lm}$	$[W] = [T][S]^T$
$\Phi = \mathbf{T} : \mathbf{S}$	$\Phi = T_{kl}S_{kl}$	$\Phi = \text{tr}([T][S]^T)$
$\sigma = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	$\sigma_{kl} = C_{klmn}\varepsilon_{mn}$	
$\mathbf{W} = \mathbf{T} \times \mathbf{u}$	$W_{kn} = e_{lmn}T_{kl}u_m$	
$\mathbf{W} = \mathbf{T} \times \mathbf{S}$	$W_{krn} = e_{lmr}T_{kl}S_{mn}$	
$\mathbf{W} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$	$W_{ijkl} = T_{ij}S_{kl}$	
注: Φ 表示标量,小写字母表示矢量,大写字母表示张量。在张量分量表示法中,采用重复指标表示求和的规则。		

1.1 变形描述

总的变形梯度 $\mathbf{F}$ 可以表示成

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (1.1)$$

式中 $\mathbf{F}^e$ 表示晶格畸变和刚体转动所产生的变形梯度; $\mathbf{F}^p$ 为晶体

滑移产生的变形梯度。

设 $m^{(\alpha)}$ 、 $n^{(\alpha)}$ 分别为 α 滑移系变形前的滑移方向和滑移面法向方向的单位矢量 (见表 1.2), 晶格畸变后, 新的滑移方向为 $m^{*(\alpha)}$ 为

表 1.2 滑移系面和滑移方向矢量

滑移系 序号	八面体滑移系族			六面体滑移系族			十二面体滑移系族		
	滑移系面			滑移方向			滑移系面		
	i	j	k	i	j	k	i	j	k
1	1	1	1	1	0	-1	1	1	1
2	1	1	1	0	-1	1	1	0	0
3	1	1	1	1	-1	0	0	1	0
4	-1	1	-1	1	0	-1	0	1	0
5	-1	1	-1	1	1	0	1	1	0
6	-1	1	-1	0	1	1	0	0	1
7	1	-1	-1	1	1	0	-1	1	1
8	1	-1	-1	0	-1	1	1	-1	1
9	1	-1	-1	1	0	1	-1	-2	-1
10	-1	-1	1	0	1	1	-2	1	-1
11	-1	-1	1	1	0	1	1	-2	-1
12	-1	-1	1	1	-1	0	-1	-1	1

注:表中 i, j, k 分别为晶体主轴 $[100]$ 、 $[010]$ 、 $[001]$ 方向的单位矢量。

$$m^{*(\alpha)} = F^{(e)} m^{(\alpha)} \quad (1.2)$$

滑移面的法线方向也将变为 $n^{*(\alpha)}$

$$n^{*(\alpha)} = [(F^e)^{-1}]^T n^{(\alpha)} \quad (1.3)$$

此时 $m^{*(\alpha)}$ 和 $n^{*(\alpha)}$ 一般不再是单位矢量,但它们仍相互垂直。

当前构形的速度梯度张量 V 为

$$V = V^e + V^p \quad (1.4)$$

其中

$$\mathbf{V}^e = \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{V}^p = \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{m}^{*(\alpha)} [\mathbf{n}^{*(\alpha)}]^T \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} \quad (1.6)$$

式中 $\dot{\mathbf{F}}$ 为变形梯度率; $\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}$ 为滑移系 α 的剪应变率; 求和对所有开动的滑移系进行。

记变形率张量 $\mathbf{D}$ 为

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (1.7)$$

旋转率张量 $\mathbf{W}$ 为

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^e + \mathbf{W}^p \quad (1.8)$$

由式(1.4)~式(1.6), 可以推得

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2} \{ \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} + [(\mathbf{F}^e)^T]^{-1} (\dot{\mathbf{F}}^e)^T \} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{D}^p = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{P}^{(\alpha)} \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} [\mathbf{m}^{*(\alpha)} (\mathbf{n}^{*(\alpha)})^T + \mathbf{n}^{*(\alpha)} (\mathbf{m}^{*(\alpha)})^T] \quad (1.11)$$

$$\mathbf{W}^e = \frac{1}{2} \{ \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} - [(\mathbf{F}^e)^T]^{-1} (\dot{\mathbf{F}}^e)^T \} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{W}^p = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{W}^{(\alpha)} \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{W}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} [\mathbf{m}^{*(\alpha)} (\mathbf{n}^{*(\alpha)})^T - \mathbf{n}^{*(\alpha)} (\mathbf{m}^{*(\alpha)})^T] \quad (1.14)$$

1.2 本构关系

1.2.1 率无关弹塑性本构关系

设晶体的弹性性质不受滑移变形的影响, 弹性本构关系为

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^* = \mathbf{L} : \mathbf{D}^e \quad (1.15)$$

式中 $\mathbf{L}$ 为四阶弹性模量张量; $\mathbf{D}^e$ 为弹性应变率; $\hat{\boldsymbol{\tau}}^*$ 为中间构形

状态的 Kirchhoff 应力的 Jauman 导数,且

$$\hat{\tau}^* = \dot{\tau} - W^e \tau + \tau W^e \quad (1.16)$$

$\dot{\tau}$ 为 Kirchhoff 应力的物质导数。

Kirchhoff 应力 τ 与 Cauchy 应力 σ 的关系为

$$\tau = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma$$

其中 ρ, ρ_0 分别为现时和初始构形的密度。

相对初始构形状态的 Kirchhoff 应力的 Jauman 导数为

$$\hat{\tau} = \dot{\tau} - W\tau + \tau W \quad (1.17)$$

由此有

$$\hat{\tau}^* = \hat{\tau} = \sum_{\alpha=1}^n \beta^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (1.18)$$

式中

$$\beta^{(\alpha)} = W^{(\alpha)} \tau - \tau W^{(\alpha)} \quad (1.19)$$

将式(1.17)、式(1.18)代入式(1.15),得

$$\hat{\tau} = L : D - \sum_{\alpha=1}^n (L : P^{(\alpha)} + \beta^{(\alpha)}) \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (1.20)$$

滑移系 α 上的分切应力 $\tau^{(\alpha)}$ 为

$$\tau^{(\alpha)} = \tau : P^{(\alpha)} \quad (1.21)$$

其物质导数为

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} : D^e \quad (1.22)$$

其中 $\lambda^{(\alpha)}$ 为二阶张量:

$$\lambda^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} : L + \beta^{(\alpha)} \quad (1.23)$$

当滑移系分切应力 $\tau^{(\alpha)}$ 达到其临界值 τ_0 时,滑移系开动。滑移系开动后,要保持其继续滑移,则其分切应力必须和屈服应力 τ_{cr} 的发展同步, τ_{cr} 的增率为

$$\dot{\tau}_{cr} = \sum_{\beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} \quad (1.24)$$

式中 $h_{\alpha\beta}$ 为硬化系数,表示 β 滑移系剪应变增量引起的 α 滑移系的屈服应力增量。

实际滑移系有向前和向后滑移的可能性,可以认为有($m^{(\alpha)}$, $n^{(\alpha)}$)和($-m^{(\alpha)}$, $n^{(\alpha)}$)两个独立滑移系,但此时每一个滑移系只能沿正方向滑移。

由于率无关, $h_{\alpha\beta}$ 不依赖于 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$,对于临界滑移系 α 有

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0) \quad (1.25a)$$

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} \leq \dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0) \quad (1.26b)$$

由式(1.22)及式(1.25)可得

$$\lambda^{(\alpha)} : D = \sum_{\beta=1}^n g_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0) \quad (1.26a)$$

$$\lambda^{(\alpha)} : D \leq \sum_{\beta=1}^n g_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} (\dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0) \quad (1.26b)$$

式中

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \lambda^{(\alpha)} : P^{\beta} \quad (1.27)$$

假定 n 个临界滑移系中只有 n^* 个滑移系继续开动,那么有

$$\sum_{\beta \in B} g_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} = \lambda^{(\alpha)} : D \quad (\forall \alpha \in \beta)$$

其中 B 是所有继续开动滑移系 α 的集合。

从 n^* 个方程中可解出 n^* 个未知量 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ ($\alpha \in \beta$), 但 n^* 个 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ 还必须满足式(1.26b)。

为论述简单起见,我们设想所有处于临界状态的滑移系都继续开动,由此解得

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^n (g^{-1})_{\alpha\beta} \lambda^{(\beta)} : D \quad (1.28)$$

式中

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

$(g^{-1})_{\alpha\beta}$ 为矩阵 g^{-1} 中第 α 行第 β 列的元素。

将式(1.28)回代式(1.20),有

$$\hat{\tau} = C : D \quad (1.29)$$

$$C = L - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n (g^{-1})_{\alpha\beta} \lambda^{(\alpha)} \otimes \lambda^{(\beta)} \quad (1.30)$$

C 是一个四阶张量,它的分量为

$$C_{ijkl} = L_{ijkl} - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n (g^{-1})_{\alpha\beta} \lambda_{ij}^{(\alpha)} \lambda_{kl}^{(\beta)} \quad (1.31)$$

需要指出的是,在式(1.26)中,被激活的滑移系如果不全部独立就不能求出 g^{-1} ,这在屈服面上对应于“角点”,此点处存在着滑移系模式不确定的问题,这也是率无关滑移系的固有限制。

1.2.2 率相关本构方程

考虑到率相关性时, $\dot{\gamma}^{(a)}$ 为

$$\dot{\gamma}^{(a)} = a^{(a)} \left(\frac{\tau^{(a)}}{N^{(a)}} \right) \left| \frac{\tau^{(a)}}{\tau^{(a)}} \right|^{(1/m)-1} \quad (1.32)$$

式中

$$N^{(a)} = \sum_{\beta=1}^n h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} \quad (1.33)$$

这里 $h_{\alpha\beta}$ 仍是滑移系硬化系数; $a^{(a)}$ 是材料常数; m 为率敏感指数。

在数值计算时,使用增量法,式(1.32)为

$$\Delta \gamma^{(a)} = \gamma^{(a)}(t + \Delta t) - \gamma^{(a)}(t) \quad (1.34)$$

利用线性插值,可得

$$\Delta \gamma^{(a)} = [(1 - \theta) \dot{\gamma}^{(a)}(t) + \theta \dot{\gamma}^{(a)}(t + \Delta t)] \Delta t \quad (1.35)$$

Δt 为时间增量,参数 θ 在 1 与 0 之间取值, $\theta = 0$ 为最简单的欧拉(Euler)向前插值。用 Taylor 级数展开

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^{(a)}(t + \Delta t) &= \dot{\gamma}^{(a)}(t) + \left(\frac{\partial \dot{\gamma}^{(a)}}{\partial \tau^{(a)}} \right)_t \Delta \tau^{(a)} + \left(\frac{\partial \dot{\gamma}^{(a)}}{\partial g^{(a)}} \right)_t \Delta g^{(a)} = \\ &= \text{sgn}(\tau^{(a)}) \dot{\gamma}^{(a)} \left(\frac{\tau^{(a)}}{g^{(a)}} \right)^{1/m} \left[1 + \frac{1}{m} \left(\frac{\Delta \tau^{(a)}}{\tau^{(a)}} - \frac{\Delta g^{(a)}}{g^{(a)}} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

$\text{sgn}(A)$ 为符号系数(当 $A > 0$, $\text{sgn}(A) = 1$; $A < 0$, $\text{sgn}(A) =$