各向异性单晶合金结构强度与寿命

尹泽勇 岳珠峰 杨治国 成晓鸣 著

国防工业出版社

各向异性单晶合金结构强度与寿命

尹泽勇　岳珠峰
杨治国　成晓鸣　著

国防工業出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

各向异性单晶合金结构强度与寿命/尹泽勇等著.
北京:国防工业出版社,2003.1
ISBN 7-118-03022-8

Ⅰ.各... Ⅱ.尹... Ⅲ.①各向异性—单晶—合金晶体结构—结构强度②各向异性—单晶—合金晶体结构—结构寿命 Ⅳ.0732

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第086483号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号)
(邮政编码 100044)
北京奥隆印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 8⅛ 208千字
2003年1月第1版 2003年1月北京第1次印刷
印数:1-2000册 定价:23.00元

前　言

发展和应用镍基单晶合金的主要目的是提高军、民用发动机的性能和可靠性。镍基单晶合金作为航空发动机热端关键部件——涡轮转子叶片材料，最早于20世纪70年代在美国得到应用，如今在发达国家，该材料已广泛用于航空发动机、航天发动机及地面燃气轮机；在国内，也已用于小型航空发动机和大型航空发动机上。目前尚无可直接替代镍基单晶合金用于航空发动机热端关键部件的更好的材料。

然而，单晶合金与以往常用的多晶合金有很大不同。它是一种各向异性材料，其机械性能具有方向性、拉压不对称性等与各向同性材料迥然不同的特点。另外，在高温环境下，不随时间变化的塑性变形与随时间变化的蠕变同时出现，更增加了问题的复杂性。可以说，以往的分析方法根本不适用于镍基单晶叶片及其他单晶结构，有必要改进或建立新的弹塑性及粘塑性本构模型和相应的非线性分析方法。同时，必须对镍基单晶的各向异性及高温性能有深入的了解，以便在设计与使用中充分利用材料特有的优点。

对国产镍基单晶合金材料的力学性能的研究是十分必要的。通过研究可以增加对国产镍基单晶合金在一般载荷状态下的变形、损伤及失效机理的基本认识。将据此提出的晶体各向异性模型应用到镍基单晶叶片分析之中，对单晶叶片进行晶体取向优化设计，不仅可以减少不确定因素，避免有关各类故障甚至灾难性事故的发生，而且可充分利用材料性能储备，更安全地确定单晶叶片强度和寿命，从而推动国产发动机的发展和单晶材料的应用。另一方面，国内外现有的商业程序都没有实用的单晶结构强度和寿命分析功能，通过研究为单晶涡轮叶片强度和寿命分析及优化设

计提供完整的分析方法和计算程序也是十分必要的。

本书是作者在课题组研究工作的总结。第 1 章针对镍基单晶合金给出了晶体塑性理论的基本方程及有限元格式,并对之进行考核;第 2 章对 DD3 镍基单晶合金的弹塑性、断裂特性进行试验与理论研究,对板试样也进行了研究,以确定试样的厚度效应;第 3 章对镍基单晶合金的蠕变和持久寿命进行分析,建立了筏化模型和双参数损伤方程,进行试验验证,并推广于复杂应力状态;第 4 章对 DD3 单晶材料的疲劳性能进行研究,建立疲劳寿命模型,并将其用于复杂应力状态,最终提出考虑疲劳、蠕变和热疲劳的统一寿命模型;第 5 章按 DD3 单晶叶片工作状态全面开展了不同晶向下的 DD3 单晶物理性能、力学性能、蠕变性能的实验研究,得到 DD3 的性能数据;第 6 章介绍了我们开发的单晶结构强度、寿命分析软件 SLAPSC (Strength and Life Analysis Program of Nickel - Base Single Crystal Structures);第 7 章将所建立的各向异性单晶叶片强度寿命分析方法及相应的材料性能实验数据用于发动机研制工作中,给出了工程应用的实例。

在过去 10 年中,本书先后得到 2 项国家自然科学基金(No. 59501009 和 No. 50005016)、4 项航空科学基金及多项航空发动机预研及型号项目的资助,主要内容于 1999 年度获航空工业总公司科技进步一等奖。我们对上述资助表示感谢。本书反映的研究成果也是有关单位合作的结果,除作者所在的中国航空动力机械研究所及西北工业大学外,合作单位还有:北京航空材料研究院、北京航空航天大学、陕西三原 148 厂等。在此要对北京航空材料研究院的吴仲棠研究员和魏鹏义研究员深表感谢。

内 容 简 介

本书针对镍基单晶合金给出了晶体塑性理论的基本方程及有限元格式，并对之进行考核；对 DD3 镍基单晶合金的弹塑性、断裂特性以及板试样进行了试验与理论研究，确定了试样的厚度效应；对镍基单晶合金的蠕变和持久寿命进行分析，建立了筏化模型和双参数损伤方程，进行试验验证，并推广于复杂应力状态；对 DD3 单晶材料的疲劳性能进行研究，建立疲劳寿命模型，并将其用于复杂应力状态，最终提出考虑疲劳、蠕变和热疲劳的统一寿命模型。最后介绍了作者开发的单晶结构强度、寿命分析软件 SLAPSC，并给出了工程应用的实例。

本书可供航空、航天发动机专业工程技术人员参考应用，亦可供相关专业的教师及本科以上的学生参考阅读。

目　录

第1章 晶体滑移的基本理论

本章针对镍基单晶合金给出了晶体塑性理论的基本方程及有限元格式,并进行了考核。为方便起见,采用张量符号,对矢量和标量均作特别说明。张量表示方法见表1.1。

表1.1 张量表示法

张量符号法	张量分量法	矩阵记法
$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Tu}$	$w_k = T_{klul}$	$\{w\}=[T]\{u\}$
$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{uT}$	$w_k = u_l T_{kl}$	$\{w\}=\{u\}[T]$
$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}=\boldsymbol{TS}$	$W_{kl}=T_{km}S_{ml}$	$[W]=[T][S]$
$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{TS}^{\mathrm{T}}$	$W_{kl}=T_{km}S_{lm}$	$[W]=[T][S]^{\mathrm{T}}$
$\Phi=\boldsymbol{T}:\boldsymbol{S}$	$\Phi=T_{kl}S_{kl}$	$\Phi=\mathrm{tr}([T][S]^{\mathrm{T}})$
$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}$	$\sigma_{kl}=C_{klmn}\varepsilon_{mn}$	
$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{u}$	$W_{kn}=e_{lmn}T_{kl}u_m$	
$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{S}$	$W_{krn}=e_{lmr}T_{kl}S_{mn}$	
$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{S}$	$W_{ijkl}=T_{ij}S_{kl}$	

注:Φ 表示标量,小写字母表示矢量,大写字母表示张量。在张量分量表示法中,采用重复指标表示求和的规则。

1.1 变形描述

总的变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 可以表示成

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}} \tag{1.1}$$

式中 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}$表示晶格畸变和刚体转动所产生的变形梯度;$\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}}$为晶体

滑移产生的变形梯度。

设 $\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$、$\boldsymbol{n}^{(\alpha)}$分别为 α 滑移系变形前的滑移方向和滑移面法向方向的单位矢量(见表 1.2),晶格畸变后,新的滑移方向为 $\boldsymbol{m}^{*(\alpha)}$为

表 1.2　滑移系面和滑移方向矢量

滑移系序号	八面体滑移系族						六面体滑移系族						十二面体滑移系族					
	滑移系面			滑移方向			滑移系面			滑移方向			滑移系面			滑移方向		
	i	*j*	*k*	*i*	*j*	*k*	*i*	*j*	*k*	*i*	*j*	*k*	*i*	*j*	*k*	*i*	*j*	*k*
1	1	1	1	1	0	−1	1	1	1	−1	2	−1	1	0	0	0	1	1
2	1	1	1	0	−1	1	1	1	1	2	−1	−1	1	0	0	0	1	−1
3	1	1	1	1	−1	0	1	1	1	−1	−1	2	0	1	0	1	0	1
4	−1	1	−1	1	0	−1	−1	1	−1	1	2	1	0	1	0	1	0	−1
5	−1	1	−1	1	1	0	−1	1	−1	1	−1	−2	0	0	1	1	1	0
6	−1	1	−1	0	1	1	−1	1	−1	−2	−1	1	0	0	1	−1	1	0
7	1	−1	−1	1	1	0	1	−1	−1	−1	1	−2						
8	1	−1	−1	0	−1	1	1	−1	−1	2	1	1						
9	1	−1	−1	1	0	1	1	−1	−1	−1	−2	−1						
10	−1	−1	1	0	1	1	−1	−1	1	−2	1	−1						
11	−1	−1	1	1	0	1	−1	−1	1	1	−2	−1						
12	−1	−1	1	1	−1	0	−1	−1	1	1	1	2						
注:表中 *i*、*j*、*k* 分别为晶体主轴[100]、[010]、[001]方向的单位矢量。																		

$$\boldsymbol{m}^{*(\alpha)} = \boldsymbol{F}^{(e)}\boldsymbol{m}^{(\alpha)} \tag{1.2}$$

滑移面的法线方向也将变为 $\boldsymbol{n}^{*(\alpha)}$

$$\boldsymbol{n}^{*(\alpha)} = [(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}})^{-1}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}^{(\alpha)} \tag{1.3}$$

此时 $\boldsymbol{m}^{*(\alpha)}$和 $\boldsymbol{n}^{*(\alpha)}$一般不再是单位矢量,但它们仍相互垂直。

当前构形的速度梯度张量 $\boldsymbol{V}$ 为

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{V}^{\mathrm{p}} \tag{1.4}$$

其中

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{e}} = \dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}})^{-1} \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{p}})^{-1}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}})^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{m}^{*(\alpha)}[\boldsymbol{n}^{*(\alpha)}]^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} \tag{1.6}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{F}}$ 为变形梯度率；$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}$ 为滑移系 α 的剪应变率；求和对所有开动的滑移系进行。

记变形率张量 $\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{p}} \tag{1.7}$$

旋转率张量 $\boldsymbol{W}$ 为

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{W}^{\mathrm{p}} \tag{1.8}$$

由式(1.4)~式(1.6)，可以推得

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\{\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}})^{-1} + [(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}}]^{-1}(\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}}\} \tag{1.9}$$

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{P}^{(\alpha)}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{P}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{m}^{*(\alpha)}(\boldsymbol{n}^{*(\alpha)})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{n}^{*(\alpha)}(\boldsymbol{m}^{*(\alpha)^{T}}] \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\{\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}})^{-1} - [(\boldsymbol{F}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}}]^{-1}(\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}}\} \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{W}^{\mathrm{p}} = \sum_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{W}^{(\alpha)}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} \tag{1.13}$$

$$\boldsymbol{W}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{m}^{*(\alpha)}(\boldsymbol{n}^{*(\alpha)})^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{n}^{*(\alpha)}(\boldsymbol{m}^{*(\alpha)})^{\mathrm{T}}] \tag{1.14}$$

1.2 本构关系

1.2.1 率无关弹塑性本构关系

设晶体的弹性性质不受滑移变形的影响，弹性本构关系为

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{*} = \boldsymbol{L} : \boldsymbol{D}^{\mathrm{e}} \tag{1.15}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 为四阶弹性模量张量；$\boldsymbol{D}^{\mathrm{e}}$ 为弹性应变率；$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{*}$ 为中间构形

状态的 Kirchhoff 应力的 Jauman 导数，且

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{*} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{W}^{e}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{W}^{e} \tag{1.16}$$

$\dot{\boldsymbol{\tau}}$ 为 Kirchhoff 应力的物质导数。

Kirchhoff 应力 $\boldsymbol{\tau}$ 与 Cauchy 应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的关系为

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\rho_0}{\rho}\boldsymbol{\sigma}$$

其中 ρ、ρ_0 分别为现时和初始构形的密度。

相对初始构形状态的 Kirchhoff 应力的 Jauman 导数为

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{W}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{W} \tag{1.17}$$

由此有

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}^{*} = \hat{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{\alpha=1}^{n}\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} \tag{1.18}$$

式中

$$\boldsymbol{\beta}^{(\alpha)} = \boldsymbol{W}^{(\alpha)}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{W}^{\alpha} \tag{1.19}$$

将式(1.17)、式(1.18)代入式(1.15)，得

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{L} : \boldsymbol{D} - \sum_{\alpha=1}^{n}(\boldsymbol{L} : \boldsymbol{P}^{(\alpha)} + \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)})\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} \tag{1.20}$$

滑移系 α 上的分切应力 $\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}$ 为

$$\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{P}^{(\alpha)} \tag{1.21}$$

其物质导数为

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} : \boldsymbol{D}^{e} \tag{1.22}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)}$ 为二阶张量：

$$\boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} = \boldsymbol{P}^{(\alpha)} : \boldsymbol{L} + \boldsymbol{\beta}^{(\alpha)} \tag{1.23}$$

当滑移系分切应力 $\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}$ 达到其临界值 $\boldsymbol{\tau}_0$ 时，滑移系开动。滑移系开动后，要保持其继续滑移，则其分切应力必须和屈服应力 $\boldsymbol{\tau}_{cr}$ 的发展同步，$\boldsymbol{\tau}_{cr}$ 的增率为

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}_{cr} = \sum_{\beta=1}^{n}\boldsymbol{h}_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\beta)} \tag{1.24}$$

式中 $h_{\alpha\beta}$ 为硬化系数，表示 β 滑移系剪应变增量引起的 α 滑移系的屈服应力增量。

实际滑移系有向前和向后滑移的可能性，可以认为有($\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{n}^{(\alpha)}$)和($-\boldsymbol{m}^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{n}^{(\alpha)}$)两个独立滑移系，但此时每一个滑移系只能沿正方向滑移。

由于率无关，$h_{\alpha\beta}$不依赖于$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}$，对于临界滑移系 α 有

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(\alpha)} = \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{cr}}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\beta)}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} > 0) \tag{1.25a}$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^{(\alpha)} \leqslant \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{cr}}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\beta)}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} = 0) \tag{1.26b}$$

由式(1.22)及式(1.25)可得

$$\boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} : \boldsymbol{D} = \sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\beta)}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} > 0) \tag{1.26a}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} : \boldsymbol{D} \leqslant \sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\beta)}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} = 0) \tag{1.26b}$$

式中

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} : \boldsymbol{P}^{\beta} \tag{1.27}$$

假定 n 个临界滑移系中只有n^*个滑移系继续开动，那么有

$$\sum_{\beta \in B} g_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\beta)} = \boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} : \boldsymbol{D}\ (\forall\ \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{\beta})$$

其中 B 是所有继续开动滑移系 α 的集合。

从 n^*个方程中可解出 n^*个未知量 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}(\alpha \in \beta)$，但 n^*个 $\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}$还必须满足式(1.26b)。

为论述简单起见，我们设想所有处于临界状态的滑移系都继续开动，由此解得

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^{n} (g^{-1})_{\alpha\beta}\boldsymbol{\lambda}^{(\beta)} : \boldsymbol{D} \tag{1.28}$$

式中

$$\boldsymbol{g}^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

$(g^{-1})_{\alpha\beta}$为矩阵 $\boldsymbol{g}^{-1}$中第 α 行第β列的元素。

将式(1.28)回代式(1.20)，有

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{D} \tag{1.29}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{L} - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(g^{-1})_{\alpha\beta}\boldsymbol{\lambda}^{(\alpha)} \otimes \boldsymbol{\lambda}^{(\beta)} \tag{1.30}$$

$\boldsymbol{C}$ 是一个四阶张量，它的分量为

$$C_{ijkl} = L_{ijkl} - \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}(g^{-1})_{\alpha\beta}\lambda_{ij}^{(\alpha)}\lambda_{kl}^{(\beta)} \tag{1.31}$$

需要指出的是，在式(1.26)中，被激活的滑移系如果不全部独立就不能求出 g^{-1}，这在屈服面上对应于“角点”，此点处存在着滑移系模式不确定的问题，这也是率无关滑移系的固有限制。

1.2.2 率相关本构方程

考虑到率相关性时，$\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ 为

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)} = \dot{\boldsymbol{a}}^{(\alpha)}\left(\frac{\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}}{\boldsymbol{N}^{(\alpha)}}\right)\left|\frac{\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}}{\boldsymbol{\tau}^{(\alpha)}}\right|^{(1/m)-1} \tag{1.32}$$

式中

$$\boldsymbol{N}^{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta}\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\beta)} \tag{1.33}$$

这里 $h_{\alpha\beta}$ 仍是滑移系硬化系数；$\dot{a}^{(\alpha)}$ 是材料常数；m 为率敏感指数。

在数值计算时，使用增量法，式(1.32)为

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\gamma}^{(\alpha)}(t+\Delta t) - \boldsymbol{\gamma}^{(\alpha)}(t) \tag{1.34}$$

利用线性插值，可得

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}^{(\alpha)} = [(1-\theta)\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}(t) + \theta\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}(t+\Delta t)]\Delta t \tag{1.35}$$

Δt 为时间增量，参数 θ 在 1 与 0 之间取值，$\theta = 0$ 为最简单的欧拉(Euler)向前插值。用 Taylor 级数展开

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}(t+\Delta t) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}(t) + \left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}}{\partial\tau^{(\alpha)}}\right)_t\Delta^{(\alpha)} + \left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}}{\partial g^{(\alpha)}}\right)_t\Delta g^{(\alpha)} =$$

$$\operatorname{sgn}(\tau^{(\alpha)})\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{(\alpha)}\left(\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\right)^{1/m}\left[1 + \frac{1}{m}\left(\frac{\Delta\tau^{(\alpha)}}{\tau^{(\alpha)}} - \frac{\Delta g^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}}\right)\right] \tag{1.36}$$

sgn(A)为符号系数（当 $A > 0$，sgn(A) = 1；$A < 0$，sgn(A) =