高等学校教学用书

矿井建设系统工程

朱柏石　刘会文　陈东灵
石维明　陶信诚　编

煤炭工业出版社

高等学校教学用书
矿井建设系统工程
煤炭工业出版社

高等学校教学用书

矿井建设系统工程

朱柏石 刘会文 陈东灵
石维明 陶信诚 编

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书前四章与第七章介绍了线性规划、图论、统筹方法、对策论与决策分析、电子计算机模拟等方面的基本内容，为矿井建设工程的优化设计及科学组织管理奠定理论基础。本书第五、六章是系统工程的理论和方法在矿井建设中的具体应用，介绍了井巷工程施工总排队最优方案的选择方法和井巷工程的具体优化安排，以及立井、平巷的机械化作业线的最优配套方案和设备选型。全书尽可能地结合矿山问题进行说明。

本书除作为高等院校矿井建设专业选修课教材外，还可供矿井建设的工程技术人员，采矿专业的师生以及有关的科研和设计人员参考使用。

责任编辑　吴 秀 文

高 等 学 校 教 学 用 书

矿 井 建 设 系 统 工 程

朱柏石　刘会文　陈东灵　石维明　陶信诚　编

*

煤炭工业出版社　出版

（北京安定门外和平里北街21号）

煤炭工业出版社印刷厂　印刷

新华书店北京发行所　发行

*

开本787×1092mm $^{1}/_{16}$　印张13 $^{3}/_{4}$

字数327千字　印数1—2,020

1987年11月第1版　1987年11月第1次印刷

ISBN 7-5020-0016-6/TD·19

统一书号 15035·2931　定价 2.30元

前　　言

本书是煤炭高等院校矿井建设专业《矿井建设系统工程》选修课的通用教材。

为适应近代科学技术的发展及培养优秀的矿井建设专门人材，煤炭部高等工科院校教材编审委员会于1981年确定编写《系统工程在矿井建设中的应用》选修课教材，并同意由中国矿业学院、阜新矿业学院、山东矿业学院、西安矿业学院等四个院校分别进行编写。1983年7月，煤炭部教材编辑室组织四院校讨论这个教材的编写问题，四校一致同意共同编写这个选修课教材，并确定教材名称为《矿井建设系统工程》。本教材是按60学时编写的，由于各院校在教学计划中安排的学时数不等，讲授的内容也各有差异，各院校可按计划的学时数自行选用内容。

参加编写本教材的人员及其编写的内容如下：

朱柏石　绪言，第四章，第五章，第六章；

刘会文　第一章；

陈东灵　第二章；

石维明　第三章；

陶信诚　第七章。

全书由朱柏石最后统稿。

在本书制定编写计划和编写的过程中，得到了山东矿业学院周文安副教授的大力支持和帮助，在此深致谢意。

编　　者

1986年6月

目　　录

绪　　言

一、什么是系统和系统工程

系统是普遍存在的。譬如：太阳系是由某些行星、慧星和卫星等所组成，成为一个力学系统。在地球上存在着许多自然系统，如海洋系统、气象系统、矿藏系统、生态系统等等。在人类社会中存在有生产系统、经济系统、消费系统、教育系统、科学系统等等。生产系统又分为工业生产系统、农业生产系统。工业生产系统同样又分为冶金工业系统、煤炭工业系统，……。在煤炭工业系统中又可分为煤炭生产系统与煤炭基建系统。煤炭基建系统也同样又分为矿建工程系统、上建工程系统与安装工程系统。日常生活中也要碰到通讯系统、交通系统、医疗系统、服务系统等等。一个工厂、一个人也分别是一个系统，一个手表、一台收音机、一台机械也是一个系统。人们是生活、工作在系统之中。

系统可分为自然系统、人造系统和复合系统三大类。自然系统是指完全由自然物所组成的整体，如海洋、气象、矿藏系统等等。人造系统是为达到人类各种目的而建立的系统，如经济系统和教育系统等等。复合系统是包括人和自然物经过人工改造而成的各种系统，如铁路交通、农林系统、机械化作业线等等。

系统有大有小，有多级从属和并列关系。

人们在生产实践中逐步认识了系统和系统关系。如制定研制任务的系统时要一直分析到由每一个技术人员承担的具体工作为止。面临的问题是：

（1）怎样把比较笼统的初始研制要求逐步变为成千上万个参加研制人员的具体工作；

（2）怎样把这个工作最后综合成一个技术上合理、经济上有利、研制周期短、能协调运转的实际系统；

（3）使这个系统成为它所从属的更大系统的有效组成部分。

这样，就要求有一种组织——一个集体来代替先前的单个指挥者，它就是总体设计部。总体设计部应由熟习系统各方面专业知识的技术人员组成。

总体设计部设计的是系统的总体，是系统的总体方案。

总体设计部一般不承担具体的部件设计。

总体设计部把系统分为若干个分系统并将它有机地结合成整体来设计。对每个分系统的技术要求，都首先从实现整个系统技术协调的观点来考虑；对产生的矛盾，应首先从总体协调的需要来选择解决方案。总体设计部的实践体现了一种科学方法，这种科学方法就是系统工程（Systems Enginering）。系统工程是组织管理“系统”的规划、研究、设计、制造、试验和使用的科学方法，是一种对所有系统都具有普遍意义的科学方法。

各国学者对系统工程有不同的解释，有的与系统分析（Systems Analysis）、运筹学（Operations Research）等名词混淆或互相替换。

综合各方面的观点，对系统工程可作如下解释：

系统工程是一门综合性科学技术，研究对象是大型复杂系统的设计和运行（一般更偏

重于设计），有目的地对新工程对象进行研究并设计，对已有工程对象进行运行、管理与改进，以期达到总体效果最佳。系统内部的组成是各种设备与人的有机联系，它们又与环境密切联系，相互作用；在时间领域方面，则按着工程的顺序，综合考虑规划、计划、研究、设计、试验、制造、安装、运行各阶段的相互关系和联系。系统工程既是一门跨各专业领域的总体工程学，也是一种思想方法论和工作方法论。它的若干原则也能用于行政管理系统和一切系统。

二、系统工程的发展简况与应用范围

1．系统工程的发展背景

1）各方面出现了综合性很高的系统性关系

近年来，社会、政治、经济、生产、科研、管理、经营及国家关系等各个方面在组织上日趋复杂，出现了综合性很高的相互制约和相互联系的系统性关系。它突破了区域性、行政性和学科性的界限，成为一类具有特殊性质的问题。每个部门为了达到自己的目的，就必须从总体的立场出发，综合地系统地掌握它与外界的联系，从总体最优化的立场出发，不仅要调整各个部门之间的关系，而且各个部门也有一个从整体来考虑自己行动的问题。因此，过去使用的比较狭窄和孤立的方法已经不能解决问题，而要求有一种新的能适应这种新情况的方法，这就是从系统的角度去观察、思索、分析解决问题的方法。这种要求便是系统工程产生的基础。

2）大范围内情报流的形成

近二十年来，由于通讯技术和信息科学的发展，使社会生产和经营过程的各个环节得以迅速地有机地联系起来。同时，由于电子计算技术的高度发展，使情报的收集、贮存、加工、传递的能力大幅度增加，大大缩短了空间和时间的界限，使人们有可能全面地掌握、处理和传递大量的情报。同时也被迫在短时间内，对综合性很大的系统性问题作出判断和决策。这种情况刺激了系统工程的急速发展。

3）最优化技术的出现

随着现代数学、计算技术和计算方法的发展，现代化的最优化技术体系已经形成。它的产生为解决大型复杂的问题提供了合理、可靠的选择和最优化决策，使得系统的思想方法和最优化管理成为可能。

4）高水平的设备和仪器的出现

由于科学技术和生产的高度发展，使各种设备仪器能够高功能化、多功能化、小型化、自动化，为自动控制和自动检测提供了可靠的手段。同时，装备和系统的稳定性、可靠性、精确性也不断提高。这使得系统地研究问题和处理问题有了可靠的先进的物质基础。因而促进了系统工程的发展。

2．系统工程的发展简况与应用范围

系统的概念在古代人们的社会实践中就已经产生了。例如：战国时期秦国李冰设计修造的都江堰，包括"鱼嘴"泯江分水工程，"飞沙堰"分洪排沙工程，"宝瓶口"引水工程等三大主体工程和一百二十个附属渠堰工程。工程之间的联系关系处理得恰到好处，形成一个能协调运转的工程总体，直到现在我们仍然受益。在我国的古代军事、农业、医药、天文等方面也有不少事例反映了朴素的系统概念和自发应用。

随着生产的发展，科学技术的进步以及在军事上的应用，在二十世纪后半叶系统工程

有了较大的发展。在1960年左右开始形成体系。

1969年，有700万个以上的零件，42万人参加研制的阿波罗宇宙飞船登月的成功是系统工程学的一大成果。

运筹学在我国的发展始于1955年，到1966年已取得了一定的成果。1976年以后，系统工程的研究和应用才得到了迅速、广泛的开展。

现在系统工程学不仅用在工程、科研上，而且在处理公害对策、地区开发、交通运输直到行政、经济、教育、消费生产等各个领域，是解决复杂问题的有效方法。

三、系统工程的理论基础及其在矿山上的应用

1．系统工程的理论基础

系统工程的理论基础是数学的部分分支，包括

一般的数学理论：微分、积分、微分方程、概率与数理统计、计算技术等等；

运筹学：主要内容是线性规划、非线性规划、动态规划、排队论、对策论、模拟方法、决策论、存储论、网络分析、统筹方法等等。

国外矿山企业应用运筹学内容最多的是统筹方法、线性规划、模拟方法、排队论、存储论等。

2．系统工程在我国采矿事业中的发展

统筹方法在我国矿山上应用得较早。1965年6月，华罗庚教授在人民日报上发表了《统筹方法平话》，相继出版了《统筹方法平话及补充》小册子。从此在我国各行业中开始采用统筹方法，并收到了良好的效果。

1966年2月，华罗庚教授曾在煤炭部煤机厂统筹方法训练班上讲课。此后，在内蒙五虎山煤矿与山东兖州南屯煤矿的矿井建设中都应用了统筹方法。

1975年，在邯郸南铭河铁矿曾用统筹方法进行了井巷工程总排队。

系统工程的研究与应用在矿山上得以较快发展的时间还是最近几年。

从1976年以来，先后多次在各地举办了系统工程学习班；煤炭、冶金、建筑各系统多次召开了系统工程学术讨论会；并有许多采矿系统工程方面的科研成果，在全国鉴定会上得到肯定。

系统工程在矿山上的应用，首先是在设计上，其次是施工和管理。露天矿应用得较早，地下采矿的条件虽然复杂，近年来应用得也较多。在矿井建设方面，不仅在工程计划上有很多矿井在应用统筹方法，在建筑施工和结构的最佳设计上也正在应用和研究。

第一章 线 性 规 划

线性规划是现代管理科学的重要基础和手段之一。自1947年，丹泽克（G.B.Dantzig）提出了求解一般线性规划问题的方法——单纯形法之后，线性规划在理论上趋向成熟，在实际应用上也日益广泛。特别在能用电子计算机处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后，它的适用范围则更加广泛与深入。从解决技术问题最优化，到工业、农业、商业、交通运输、军事的计划和管理及决策分析都可以发挥作用；从规模来说，小到一个作业的计划与安排，大至整个部门，以至国民经济计划的最优化方案的提出，它都有用武之地。它适应性强、应用面广，而且计算技术比较简便。

第一节 线性规划问题及数学模型

一、实例

在生产经营与技术管理活动中，经常提出两方面的问题：一是在一定的人力、物力、财力等资源条件下，如何安排，以便用有限的资源去完成最大的任务；另一是任务已定，即工作量一定，应如何统筹安排，以便以最小的资源去完成这项任务。这两方面的问题，实际上是一个问题的两种提法。

例1 某企业在计划期内要生产A、B两种产品。每种产品生产1单位所需的原料、电力与劳动量，以及计划期内能供应的原料、电力和劳动量均示于表1-1。生产1单位A产品能获利7万元，生产1单位B产品能获利12万元。该企业应如何安排生产计划，所得利润最多？

表 1-1

活动 / 资源	单位产品消耗资源量		资源供应限度
	A 产 品	B 产 品	
原料，t	9	4	360
电力，kW·h	4	5	200
劳动量，工日	3	10	300

这问题可用以下数学语言来描述。

假设产品A、B的产量分别为x_1单位、x_2单位，则这两种产品共需消耗资源：原料$(9x_1+4x_2)$t；电力$(4x_1+5x_2)$kW·h；劳动量$(3x_1+10x_2)$工日。但这些数量不能超过计划期内能供应的数量，因此x_1和x_2要满足

$$9x_1+4x_2\leqslant 360$$
$$4x_1+5x_2\leqslant 200$$
$$3x_1+10x_2\leqslant 300$$

两种产品的产量不可能是负数，因此x_1和x_2还要满足

$$x_1 \geqslant 0 \qquad x_2 \geqslant 0$$

该企业目标是：在不超资源供应能力的条件下，如何确定产量x_1和x_2，以 便得到最大的利润。若用z表示利润，则$z = 7x_1 + 12x_2$。

综合上述，这个计划问题可归纳为

满足约束条件：

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

使得企业的经营目标（利润）$z = 7x_1 + 12x_2$为最大。

例2 某矿井的钢筋原材料，每件长5.0m，现要求截成长2.6m、1.8m和1.2m三种不同的长度，以作钢筋砂浆锚杆之用。这三种钢筋的需要量分别为1000根、2000根和4000根。问哪种截法用的钢筋原材料最少？

不难想到：上述三种不同长度的钢筋用5.0m原材料下料有如表1-2所示的不同截法。

表 1-2

截 法	截成2.6m长的根数	截成1.8m长的根数	截成1.2m长的根数	剩下料头的长度，m
Ⅰ	1	1	0	0.6
Ⅱ	1	0	2	0
Ⅲ	0	2	1	0.2
Ⅳ	0	1	2	0.8
Ⅴ	0	0	4	0.2

假设用截法Ⅰ截x_1根，截法Ⅱ截x_2根，截法Ⅲ截x_3根，截法Ⅳ截x_4根，截法Ⅴ截x_5根，则这问题可归纳为

满足约束条件：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 2000 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

使得总共消耗的材料钢筋根数$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$为最小。

从上两例看出，它们都是属于优化问题，并具有以下共同特征：

（1）每一个问题都用一组未知数（x_1，$x_2\cdots$，x_n）表示某一方案。通常要 求这些未知数的取值是非负的；

（2）存在一定的限制条件（称为约束条件），这些限制条件都可以用一组线性等式或线性不等式来表达；

（3）都有一个目标要求，并且这个目标可表示为一组未知数的线性函数（称为目标函数）。按问题不同，要求目标函数实现最大化或者最小化。

一般来讲，这类问题可用数学语言描述如下：

求 $$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

满足：
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$
(1-2)

(1-3)

这就是线性规划的数学模型。其中 a_{ij}，b_i，c_j ($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$) 为已知量；x_j ($j=1, 2, \cdots, n$) 为未知量。方程（1-1）称为目标函数；公式（1-2）与（1-3）称为约束条件，公式（1-3）也称为非负条件。满足约束条件（1-2）、（1-3）的解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，称为线性规划问题的**可行解**；满足（1-1）的可行解称为线性规划问题的**最优解**。

二、图解法

图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理。

现以例 1 进行图解。在以x_1，x_2为坐标轴的直角坐标中，非负条件 $x_1 \geqslant 0$与$x_2 \geqslant 0$，要求点（x_1，x_2）应在第一象限内；约束条件$9x_1 + 4x_2 \leqslant 360$要求点（$x_1$，$x_2$）应在以直线$9x_1 + 4x_2 = 360$为边界的左下半平面内；同理，$4x_1 + 5x_2 \leqslant 200$，$3x_1 + 10x_2 \leqslant 300$分别要求点（$x_1$，$x_2$）应在以直线$4x_1 + 5x_2 = 200$与$3x_1 + 10x_2 = 300$为边界的左下半平面内。因此，同时满足所有约束条件的点（x_1，x_2）应在五边形OABCD区域内（图 1-1），亦即区域OABCD中的每一个点（包括边界点）都是这个线性规划问题的一个解（称可行解），区域OABCD即是例1线性规划问题的解集合（或称它为可行域）。

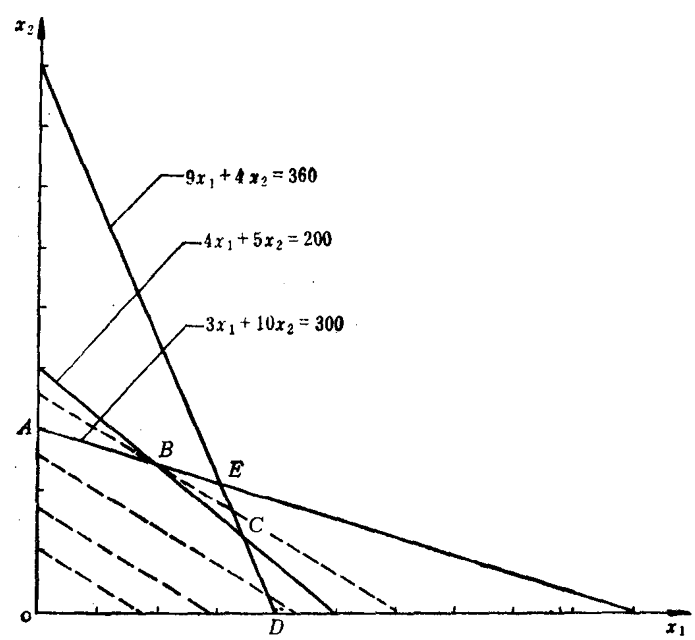

图 1-1

目标函数$z = 7x_1 + 12x_2$，在坐标平面上可以表示为以z为参数的一族平行线

$$x_2 = -\frac{7}{12}x_1 + \frac{z}{12}$$

当z值由小变大时，此直线沿其法线方向向右上方移动（图1-1的虚线）。当移动到B点时，z的取值最大，这就得到了例1的最优解。B点坐标是$x_1 = 20$，$x_2 = 24$，于是可计算出 $z = 428$。

这说明该企业最优生产计划方案是：在计划期内生产A产品20单位，B产品24单位，可得最大利润428万元。

如果将例1的目标函数改为

$$\max\ z = 9.6x_1 + 12x_2$$

则表示这个目标函数的一族平行线，与约束条件$4x_1 + 5x_2 \leqslant 200$的边界直线相平行。当$z$值由小到大变化时，表示目标函数的这直线就与$BC$重合。这表明线段$BC$上任意一点都使目标函数$z$取得相同的最大值。在这种特殊情况下，该线性规划问题有无限多个最优解。

例3　用图解法求解下述线性规划问题求

$$\max\ z = x_1 + x_2$$

满足：

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 < 2 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

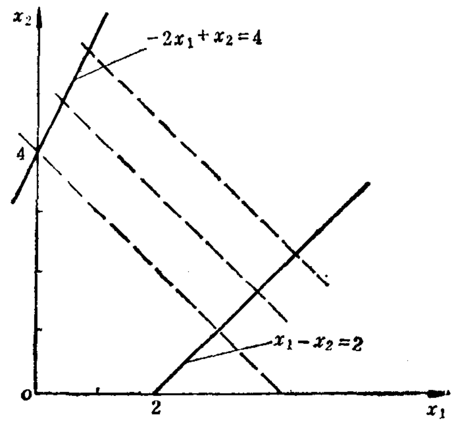

图 1-2

解：图解见图1-2。从图中可以看到，可行域无上界。目标函数的值$z \to +\infty$。这种情况有可行解，但无最优解。若求 $\min\ z = x_1 + x_2$时，不但有可行解，也有最优解。最优解在原点，此时$\min\ z = 0$。

通过图解法看到，线性规划问题的所有可行解构成的可行域一般是凸多边形（有时可行域是无界的）。若存在最优解，则一定可在可行域的某顶点上得到，若在两个顶点上同时得到最优解，则这两顶点连线上的任一点都是最优解。在求极大值时若可行域无上界，或求极小值时可行域无下界，此时则最优解不存在。如果例3再增加约束条 $x_1 + x_2 \leqslant -1$，则可行域是空集，这时不仅无最优解，而且也无可行解。

图解法只适用于两个变量的求解，在变量多（三个以上），即高维的情况下，就必须通过代数方法——单纯形法求最优解。

三、线性规划问题的标准型

从公式（1-1）、（1-2）及（1-3）可以看出，线性规划的数学模式是各式各样的。为了便于以后讨论，我们规定线性规划问题的标准形式（标准型）为：

求

$$\max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

满足：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

其简缩形式为

求
$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$
满足：
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad (i=1,2,\cdots,m)$$
$$x_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)$$

这里我们假定$b_i\geqslant 0$（否则等式两端乘以-1）。

有时用向量和矩阵符号比较方便，这时则可表述为以下形式：

用向量描述

求
$$\max\ z=CX$$
满足：
$$\sum_{j=1}^{n}P_jx_j=b$$
$$x_j\geqslant 0\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$
其中：$C=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$；
$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix};\quad P_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$
向量P_j是其对应变量x_j的系数列向量。

用矩阵描述

求
$$\max\ z=CX$$
满足：
$$AX=b$$
$$X\geqslant 0$$
其中
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=(P_1,P_2\cdots,P_n)；$$
$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

称A为约束方程组的系数矩阵（$m\times n$），一般情况下$m<n$；mn为正整数；b为限定向量，一般情况下，$b_i\geqslant 0$；C为价值向量；X为未知向量。

下面讨论如何化为标准型的问题。

（1）若给的目标函数是求$\min\ z=CX$

可变换为求$\min\ z=-\max(-z)$

令$z'=-z$则得$\max\ z'=-CX$

这就同标准型的目标函数的形式一致了。

（2）若在所给的约束条件中含有不等式为：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

或

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i$$

可化为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i \quad x_{n+1}\geqslant 0$$

或

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n-x_{n+1}=b_i \quad x_{n+1}\geqslant 0$$

这种“加上”或“减去”的非负变量x_{n+1}，称为松弛变量。

（3）若问题中有某变量x_k是自由变量，没有非负要求。这时可令$x_k=x_k'-x_k''$，其中$x_k'\geqslant 0$，$x_k''\geqslant 0$。由于x_k'可能大于x_k''，也可能小于x_k''，故x_k可以为正或为负。这样，只要将$(x_k'-x_k'')$代替问题中的x_k，就化为标准型了。

四、线性规划问题的解的概念

对线性规划问题：

求
$$\max\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{1-4}$$

满足：
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{1-5}$$

$$x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1-6}$$

设A是约束方程组的$m\times n$阶系数矩阵，其秩为m。B是矩阵A中$m\times m$阶非奇异子矩阵（$|B|\neq 0$），则称B是线性规划问题的一个**基**。这就是说，矩阵B是由m个线性独立的列向量组成。不失一般性，可设

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}=(P_1,P_2,\cdots,P_m)$$

称P_j（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）为**基向量**，与基向量P_j相对应的变量x_j（$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$）为**基变量**，否则称为**非基变量**。

现在来研究约束方程组（1-5）的求解问题。假设该方程组系数矩阵A的秩为m。因$m<n$，故它有无穷多个解。假设前m个变量的系数列向量是线性独立的，这时约束方程组（1-5）可写成

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}x_2+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix}x_m=$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{1m+1} \\ a_{2m+1} \\ \vdots \\ a_{mm+1} \end{pmatrix}x_{m+1}-\cdots-\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}x_n \tag{1-7}$$

或

$$\sum_{j=1}^{m} P_j x_j = b - \sum_{j=m+1}^{n} P_j x_j$$

方程组（1-7）的一个基是

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = (P_1, \ P_2, \cdots, P_m)$$

设X_B是对应这个基的基变量（向量）

$$X_B = (x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_m)^T$$

现若令（1-7）的非基变量$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，并用高斯消去法，可求出一个解，即

$$X = (x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_m, \ 0, \ \cdots, \ )^T$$

这个解的非零分量的数目不大于方程数目m，称X为**基本解**。可见，有一个基就可以求出一个基本解。

满足非负条件公式（1-6）的基本解，称为**基本可行解**。图1-1中的点O、A、B、C、D代表基本可行解。可见，基本可行解的非零分量数目也不大于m，并且都是非负的。对应于基本可行解的基，称为可行基。

约束方程组（1-5）具有基本解的数目最多是C_n^m个。一般讲，基本可行解的数目要小于基本解的数目，最多是相等。

第二节　单纯形法的原理

单纯形法是线性规划问题的一般解法，也是行之有效的方法。它可以求解一切标准型的线性规划问题。

一、单纯形法的思路

单纯形法的基本思路是：根据问题的标准型，从可行域中一个基本可行解（一个顶点）开始，转换到另一个基本可行解（顶点），并使目标函数的值逐步增大。当目标函数达到最大值时，问题就得到了最优解。现仍以例 1 来加以说明。

求
$$\max \ z = 7x_1 + 12x_2$$

满足：
$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 200 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ x_1, \ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

首先将上述数学模型化为标准型，即得

求
$$\max \ z = 7x_1 + 12x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \tag{1-8}$$

满足：
$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 360 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_4 = 200 \\ 3x_1 + 10x_2 + x_5 = 300 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-9}$$

所加松弛变量x_3，x_4，x_5表示没有被利用的三种资源（在例1中具体指没有被利用的原

料、电力和劳动量）。由于它们未被利用，当然也没有转为价值，所以在目标函数中，它们的系数应当为零，即$c_3=c_4=c_5=0$。

现在看怎样求得第一个基本可行解（即初始基本可行解）。约束条件（1-9）的系数矩阵

$$A=(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5)=\begin{pmatrix}9&4&1&0&0\\4&5&0&1&0\\3&10&0&0&1\end{pmatrix}$$

其中可看到x_3，x_4，x_5的系数列向量P_3，P_4，P_5是线性独立的，可构成一个基

$$B=(P_3,\ P_4,\ P_5)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

对应B的变量x_3，x_4，x_5为基变量，从公式（1-9）中可得到

$$\begin{aligned}x_3&=360-9x_1-4x_2\\x_4&=200-4x_1-5x_2\\x_5&=300-3x_1-10x_2\end{aligned}\tag{1-10}$$

将公式（1-10）代入目标函数（1-8），得

$$z=0+2x_1+3x_2\tag{1-11}$$

当非基变量$x_1=x_2=0$，便得$z=0$，同时得到一个基本可行解$X^{(0)}$，

$$X^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ x_4^{(0)},\ x_5^{(0)})^T=(0,\ 0,\ 360,\ 200,\ 300)^T$$

这个基本可行解表示，企业没安排生产产品A，B；原料、电力和劳动量都没有被使用，所以企业的利润指标$z=0$。

下一步从分析目标函数的表达式（1-11）可以看到，非基变量x_1，x_2的系数都是正数，只要增大x_1或x_2，则z值均可增大，所以$X^{(0)}$不是最优解。而将非基变量变换为基变量，目标函数的值就可能增大。所以只要在目标函数公式（1-11）的表达式中还存在有正系数的非基变量，即表示目标函数值还有增大的可能，就需要将非基变量与基变量进行对换。一般选择正系数最大的那个非基变量（此例为x_2）为换入变量，将它换入到基变量中去，同时还要确定基变量中有一个要换出来成为非基变量。可按下述方法来确定换出变量。

从公式（1-10）中看，将x_2定为换入变量后，必须从x_3，x_4，x_5中换出一个变量，并要保证x_3，x_4，$x_5\geqslant 0$。当$x_1=0$，则由公式（1-10）得到

$$\begin{aligned}x_3&=360-4x_2\geqslant 0\\x_4&=200-5x_2\geqslant 0\\x_5&=300-10x_2\geqslant 0\end{aligned}\tag{1-12}$$

从公式（1-12）中可以看出，只有选择

$$x_2=\min\left(\frac{360}{4},\ \frac{200}{5},\ \frac{300}{10}\right)=30$$

时，才能使（1-12）中三个式子同时成立。而当$x_2=30$时，$x_5=0$，这就决定了要用x_2去替换x_5。

为了求得以x_3，x_4，x_2为基变量的一个基本可行解和进一步分析问题，将公式（1-10）中x_2的位置与x_5的位置对换。得到