自学輔导叢書

学立体几何的钥匙（高中組）

上海市中学教师进修学院科普工作組

上海科学普及出版社

內 容 提 要

立体几何是高中数学中最后的一个課程，它的內容并不太难，可是自学的人往往因为教科書的叙述太簡略，而感到較难理解，同时也因为無人指点而感到它太抽象。本書用具体的事例和詳細的分析，引导讀者来理解立体几何学的內容；并用簡單通俗的比喻，帮助讀者建立空間概念，掌握立体的計算；用讀者已經知道的三角、代数知識，来解若干計算問題。对自学青年說来，本書虽然不能全部代替老师，至少也能解除学習中一定程度的困难。

本書最好对照教科書閱讀。

总号：055

自学立体几何的鑰匙（高中組）

組　稿：上海市中学教/修学院科留工

著　者：陈朝龙　凌康源

封面設計：蔡　振

出版者：上海科学普及出

（上海市南昌路47

上海市書刊出版業營業許可証出字

發行者：新华书店上海

印刷者：上海市印刷

上海新閘路174

开本：787×1092 耗 1/32　印張：3 5/16

字数：77,000　統一書号：T 70128·14

印数：140,001—210,000　定　价：2 角 7 分

1957年12月第一版　1958年6月第三次印刷

目　录

第一章　直綫和平面

一、直綫和平面的相互位置

平面几何和立体几何的异同　平面几何和立体几何是初等几何的兩个部分。它們的研究方法和所研究的問題是相同的；它們所研究的对象是不相同的。平面几何和立体几何，都是用“邏輯推理”的方法研究圖形性質的学科；这就是說，它們都是在一些公理的基础上，用定义和定理的形式把几何圖形的相互位置、形狀、大小等性質，一个一个地排列起来；所有后面的定理都是用公理、定义和在它前面的定理来証明的。这一点，如果讀者回想一下已經学过的平面几何，就会明白了。平面几何是研究同一平面內几何圖形的相互位置、形狀和大小等性質的，立体几何是研究不全在同一平面內的几何圖形的相互位置、形狀、大小等性質的，这是兩者的差別。因此，学过了平面几何，已經懂得了几何学中研究眞理的方法，再来学習立体几何，应該說是比較容易的事情了。

什么叫做几何圖形的相互位置、形狀和大小等性質呢？在平面几何里，直角三角形斜边中点到三頂点的距离相等、圓心和弦的中点連綫垂直于弦，这兩条定理，讀者一定很熟悉的。这兩条定理不是清楚地說明了圖形上点和点、直綫和直綫的相互位置关系嗎？又例如，直角三角形斜边的平方等于其他兩边平方之和，一个三角形的內角(或外角)平分綫分对边所成兩綫段之比等于夾角兩边之比，梯形的面积等于上下底之和之半和高的乘积；不是清楚地說明了圖形的形狀和大小等性質嗎？立体几何里同样地研究和平面几何里的相类似的几何圖形的性質。因此初学立体几何的人，可以把立体几何里的某一些定理和平面几何里的类似的定理，比較地研究一下，理解起来就容易了。

平面几何里，研究圖形性質的形式有証明題、軌迹題、作圖題和計算題等四种；立体几何里，同样也有这四类問題。

在平面上画空間的圖形　研究几何圖形的性質，就需要把圖形作出来；研究空間圖形的性質，就必須把空間的圖形在平面上画出来，不可能仅仅使用模型。在平面上画出的空間圖形，又必須使人看起来能够产生立体的感覺或印象。怎样才能做到这一点呢？

我們周圍有很多物体的表面是平面，它們的形狀有很多是正方形的，有很多是長方形的。如果我們站在不远的地方，用一只眼睛去看它們，这些正方形和長方形就好像是平行四边形了。所以，在立体几何里，經常画一个平行四边形（在紙面上）代表空間的某个平面，同时，当我們看到这个平行四边形时，还要設想它是向四方無限伸展的，它的广闊是無限的，不过我們只画出它的一小部分罢了，希望讀者很快地养成这个習慣来看圖。

在平面上表示空間的圖形，方法很多，屬于制圖学的范圍。在立体几何里，通常采用一种“平行投影的方法”。我們在地面上放一張紙，在紙面放置物体，讓太陽光綫斜射过来，那末物体的外形便在紙上現出来了（这些光綫可以看成是互相平行的，影子是由平行的光綫投射产生的）。用这种方法来画圖，一方面可以使人产生和实际空間相类似的感覺；另一方面，原来平行的綫段，投射以后的影子还是平行的，同一直綫上兩条綫段長度的比和投射以后兩个影子的比，完全相同。这一点，对于几何研究是有好处的。平行投影法和拍照、放电影是不相同的，因为拍照和放电影的光綫是集中到一点，或从一点出發的，这种方法叫中心投影法。

画空間圖形时，有些綫可以从正面看到的，有些綫往往被遮盖住了。凡是从正面看得到的綫，一律要画实綫，凡是被遮盖住了的綫，我們常常用虛綫来表示。

复杂空間圖形的画法，我們在后面再研究，这里介紹几个簡單空間圖形的画法。希望讀者在研究几何內容的同时，經常注意看圖，經常自

已画圖（可以先做好模型，对着模型画）。这里圖 1(*a*) 表示一个正方形；圖 1(*b*) 表示一个等腰三角形和它底边上的高；圖 1(*c*) 表示一个直角三角形和它斜边上的高；圖 1(*d*) 表示平面上的一个圓；圖 1(*e*) 表示一个正方体；圖 1(*f*) 表示一个長方体。这些圖的画法，可以供讀者参考。

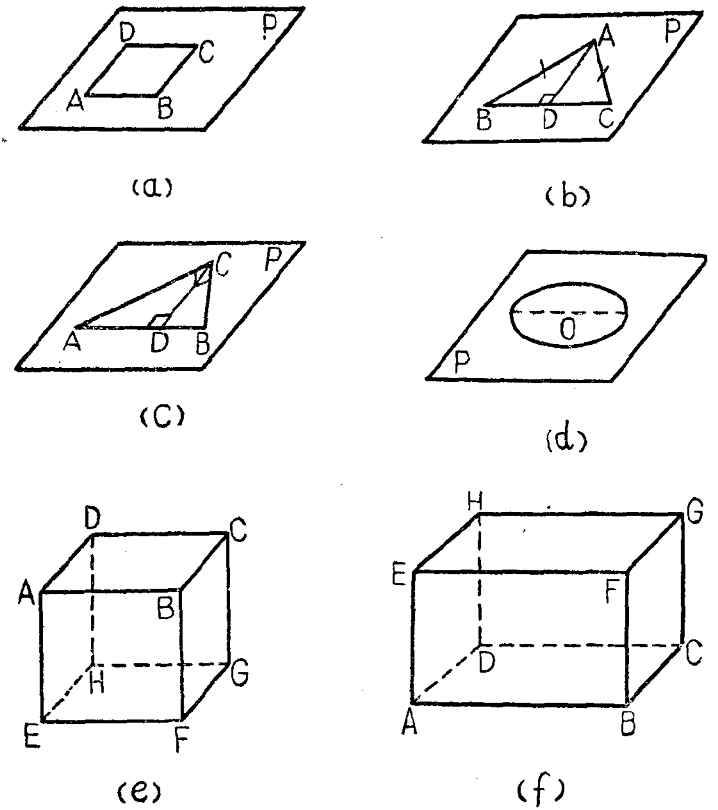


圖 1.

立体几何里的公理 讀者在平面几何里已經学習过許多几何公理了，公理是不經証明而采用的眞理。几何学理的公理，事实上是最簡單

而又最基本的几何事实，它的作用是描述几何基本元素的性質的，它是論証几何定理的根据。公理是經过人类忆万次驗証無誤的眞理。

平面几何里曾經提到的公理有：（1）联綫公理——經过兩点可以作一条直綫而且只可以作一条直綫；（2）移形公理——几何圖形可以在空間移动而形狀大小不变；（3）平行公理——經过直綫外一点可以作一条而且只能作一条直綫与已知直綫平行；（4）亞基默得公理——如果 AB 与 CD 是兩綫段，且 $CD<AB$，那么，一定可以得到一个正整数 n，使 $(n-1)CD\leqq AB<n\cdot CD$。这一些公理，在立体几何里同样是重要的論証依据。

联綫公理是說明（描写或規定）点和直綫的相互位置关系的，它不仅說明了經过兩个不同的点可以作一条直綫而且只能作一条直綫，同时也間接地說明經过一点可以作無数条直綫，經过三点不一定能作一条直綫。讀者在平面几何里早已熟悉这些事实了。立体几何里首先研究空間的点、直綫和平面的相互位置，必然需要有一些描述空間几何元素——点、直綫和平面的基本性質的公理，必然需要有一些說明点和平面、直綫和平面以及平面和平面的位置关系的公理；然后在这些公理的基础上来論述其余的几何事实，或者說，根据这些公理来論証其余的定理。当然要求公理的个数是最少的，公理所說明的事实是最簡單而且是最基本的。下面就是这一些公理。

公理1：經过不在一条直綫上的三点可以作一个平面，并且只可以作一个平面。

这一条公理說明了点和平面的位置关系。經过不在一条直綫上的三点，可以确定一个平面的位置；經过一点或兩点，就不可能确定通过它們的平面的位置，或者說这样的平面的位置是不确定的；而經过空間的任意四个点，就不一定能作一个平面同时通过这四个点。

公理2：如果一条直綫上的兩点在一个平面內，那末这直綫上所有的点都在这平面內。

这一条公理說明了直綫和平面的相互位置（直綫在平面內的情形），

它描述了平面的一个性質。如果有一个球面，在球面上任取兩点并用直綫連起来，那末这条直綫上只有兩点在球面上，其余的点全都不在球面上。这样，我們就明白了，公理是深刻地指出了平面的性質，我們也可以說公理2描述了直綫的性質。

公理3：如果兩个平面有一个公共点，那末它們相交于通过这点的一条直綫。

球面和球面相交、平面和球面相交的情况，就不是这样，这条公理是描述平面的性質的。这条公理說明，空間兩个平面的相互位置（除了重合以外）只有兩种情形，一种是相交于一条直綫的（相交的平面）；另一种是沒有交点的（平行的平面）。

在立体几何里，确定平面位置的問題是很重要的。根据上面三条公理和平面几何里的联綫公理、平行公理，就很容易証明下列事实：（1）过一条直綫和这直綫外的一点，可以作一个平面，并且只可以作一个平面；（2）过兩条相交的直綫可以作一个平面，并且只可以作一个平面；（3）过兩条平行直綫可以作一个平面，并且只可以作一个平面。这些定理在高中立体几何課本里都詳細地証明了，讀者在理解这些証明内容的同时，要注意到几何学的特点，即任何簡單的几何事实，如果不是在公理里面規定了的，都要以公理和已經証明过的定理为根据进行严密的証明。并且要研究这个事实是从那几条公理或定理推証出来的、为什么需要这样严密的論証。

空間点、直綫、平面的相互位置 在研究空間圖形的位置关系之前，先要研究空間的点、直綫和平面相互之間的位置关系。如果我們用几塊硬板紙代表平面，用竹筷或粗鉄絲代表綫，用泥土球或橡皮泥代表点来做出一些模型；凭我們生活的經驗，就可以理解下列事实。

（1）一个点可以在直綫上也可以在平面內；一条直綫可以在平面內。或者說，直綫可以通过点，平面可以通过点，平面也可以通过直綫。圖2中A、B、C代表点，a、b代表直綫，P代表平面。

（2）一个点可以不在直綫上，也可以不在平面內；一条直綫可以不

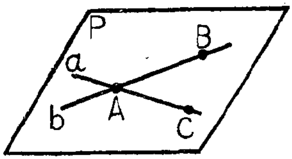


圖 2.

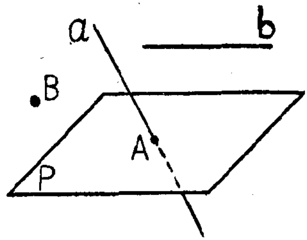
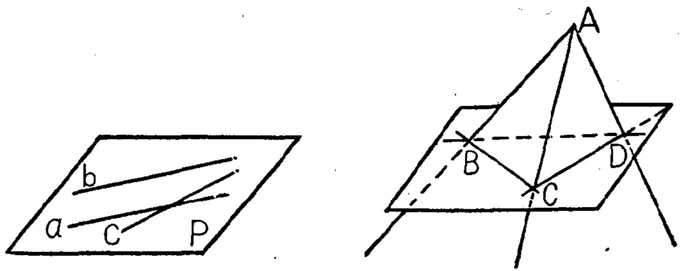


圖 3.

在平面內，这就是直綫和平面相交，或直綫和平面平行。如圖 3，点 B 不在直綫 a 上，也不在平面 P 內，直綫 a 和平面 P 相交，直綫 b 和平面 P 平行。

（3）直綫和直綫可以相交，可以平行；相交的或平行的直綫都是在同一个平面內的。如圖 4(a) 中直綫 a 和直綫 b 平行，直綫 a 和直綫 c 相交，它們都在平面 P 內。直綫和直綫也可能既不平行又不相交，这样的兩条直綫称为异面直綫，这样的兩条直綫不可能同在某一平面上。如圖 4(b) 中的 AB 和 CD，AC 和 BD，AD 和 BC 都是既不平行又不相交的异面直綫。异面直綫在立体几何里經常見到，在生活里例子也是很多的，希望讀者留意它們。



(a)　　(b)

圖 4.

（4）平面和平面的相互位置，只有兩种情形。一种是兩平面相交，另一种是兩平面平行。圖 5 中的平面 $P \parallel Q$，而平面 R 和平面 P，Q 分別

相交于直綫 a 和 b。

上述的点、直綫和平面的各种位置关系，是实际存在的事实，其中值得注意的是异面直綫的問題。空間中的不相交直綫，不一定就是平行的直綫。今后証明两直綫平行的时候，必須要首先注意它們是否在同一平面內。

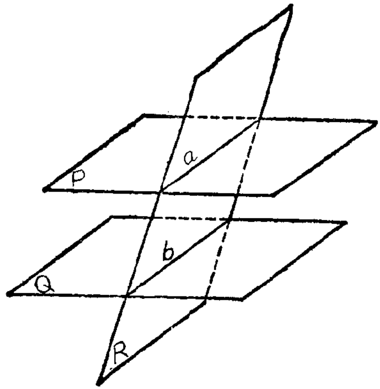


圖 5.

怎样理解平面几何作圖問題 学習立体几何，不仅要会画圖，不仅要理解几何公理的意义，还要懂得什么叫做空間作圖問題。这里，我們先談談平面几何的作圖問題。

平面几何全部作圖題的解，都是使用直尺和圓規来完成的，任何一个能够解决的作圖題的作圖步驟，如果細心地分析一下，我們仅仅做过五种不同的工作。这五种工作是：（1）經过两个已知的点画一条直綫，或者說根据已知的两个点的位置来确定一条直綫的位置；（2）有了圓心和半徑画一个圓（包括画圓弧），或者說根据已知的或选定的綫段作半徑、和已經有确定位置的点做圓心，来确定一个圓的大小和位置；（3）如果两条直綫已經画出来了，并且又知道它們是不平行的；那末，这两条直綫交点的位置就算是被确定了；（4）如果一条直綫和一个圓（或圓弧）已經画出来了，并且圓心到直綫的距离又小于半徑，那末，它們的两个交点的位置就算是确定了；（5）如果两个圓已經画出来了，并且它們中心的距离又大于两圓半徑之差、小于两圓半徑之和，它們两个交点的位置就算是被确定了。除此以外，我們再沒有做其他工作了。簡單的作圖題，重复进行这些动作的次数少一些；复杂的作圖題，重复进行这些动作的次数多一些而已。如果你还不相信，請你选一个你熟悉的作圖題，把作法的每一个步驟仔細分析一下，你就明白了。事实上，复杂的作圖

題，都可以由若干个基本作圖題分步进行作圖来解决的，因此我們只要看一看基本作圖題就行了。例如：已知綫段的垂直平分綫的作法，是由上面所講2、2、5、1四个动作完成的。已知角的分角綫的作法，是由2、4、4、2、2、5、1七个动作完成的。其他基本作圖題的作法，留給讀者去分析。

上述平面几何作圖过程中的五个基本动作，在几何里称为作圖公法。任何可作的作圖題的作法，都是由这五条公法按照一定的次序組合起来的（可以重复使用，但个数是有限的）。

怎样理解空間几何作圖問題　在高中立体几何課本里，第一个作圖題是："求作一个已知平面和不在这个平面内的已知直綫的公共点"。讀者一定会提出下列兩个疑問，（1）这个公共点不是很清楚嗎？用一根鉄絲穿过一張紙不是有一个小洞嗎？为什么叫它作圖題呢？（2）就算是个作圖題吧，可是又怎样用直尺和圓規作出这个点子呢（平面几何里作三角形外接圓心时是用直尺和圓規的）？

建筑一所房屋，可以先做一个小的模型，但更重要的是把房屋的結構在圖紙上画出，使建筑工人看了圖紙以后能够进行工作。空間几何作圖問題的解，可以利用模型来进行思考，重要的是把作圖过程按照邏輯的層次表达出来。解空間作圖題是需要画出圖形的，但圖形还不是最主要的东西，我們不能用直尺和圓規在空間活动，这里直尺和圓規的作用就不是主要的了。

空間作圖題的解和平面几何作圖題的解一样，都是由作圖公法組成的。除了上述五条平面几何作圖的公法以外，立体几何里規定有下列三条作圖公法：

（1）經过不在同一直綫上的三个已知点可以作一个平面（即这个平面的位置被認为是确定了的）；

（2）如果兩平面为已知，并且它們不是互相平行的，可以作出它們的交綫（即交綫的位置被認为是确定了的）；

（9）如果已知空間中有一个平面，那么在这平面內，就可以使用直

尺和圓規来进行平面几何作圖。

空間的基本作圖題，都应該根据这三条公法来解；复杂的作圖題，再根据基本作圖題去解。因此一切空間的可解作圖題，都是由有限个数的作圖公法按照一定次序排列起来的。如果我們已經理解了公理在証明題中的地位和作用，那末，也就容易理解作圖公法在解作圖題当中的地位和作用。

空間作圖題作法的依据是作圖公法。証明的依据是公理、定理和作法步驟，空間作圖題也是需要进行討論的。高中立体几何課本中，每个作圖題都列出了作法、証明和討論，这里不再詳細叙述，只是將主要作圖題列举如下：

作圖題1：过一条已知直綫和这直綫外一个已知点，作一个平面。

作圖題2：过已知的兩条相交的直綫，作一个平面。

作圖題3：求作已知平面P和不与这平面平行的已知直綫a的公共点(交点)。

作圖題4：过已知直綫a外一已知点A，作直綫a的平行綫。

作圖題5：过已知的兩条平行的直綫，作一个平面。

作圖題1和2应用的机会比較多，它們的証明需要引用公理2。作圖題5可由作圖題4得出，再引用平行公理来証明。下面我們再研究一个作圖題，其余的一些重要的作圖題，將在后面几节来叙述。

作圖題6：求作一直綫过已知点A，并且使它与不过这点的兩条已知的异面直綫a和b分別相交。

首先，假設C是所求的一条直綫；因为它經过点A又和直綫a相交，所以它一定在經过点A和直綫a的一个平面內；又因为它經过点A又和直綫b相交，所以它一定在經过点A和直綫b的另一个平面內；因此，直綫C势必要同时在这兩个平面內了。根据这样分析，得到下列作法(圖6)。

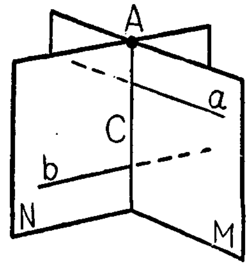


圖 6.

过点 A 和直綫 a 作平面 M (作圖題1)，过点 A 和直綫 b 作平面 N (同前)；平面 M 和 N 的交綫 c 即为所求的直綫(公法2)。

平面 M 和 N 既有一个公共点 A，因此它們一定是相交的，直綫 c 的位置总是可以决定的。但直綫 a 和 c、直綫 b 和 c 就不一定是相交的，因为 a 和 c 同在平面 M 內，b 和 c 同在平面 N 內，所以当 $a \parallel c$ 或 $b \parallel c$ 时这道題就無解。

二、平行的直綫和平面

在这一节里，我們研究四个問題："直綫和平面平行，直綫和直綫平行，平面和平面平行，直綫和平面的交角"。在学習这一节的时候，希望讀者注意一些定义的內容，哪些定理是性質定理，哪些定理是判定定理。

直綫和平面平行的判定和性質 在平面几何里，作出了平行綫的定义之后，就研究平行綫的判定定理，并且用反証法来証明它；然后再根据平行公理来証明平行綫的性質定理。立体几何里的情形，也是相仿佛的。

(1)如果有一条不在平面 P 內的直綫 a，和平面 P 內的另一条直綫 b 互相平行，即 $a \parallel b$，那么直綫 a 和平面 P 相平行。

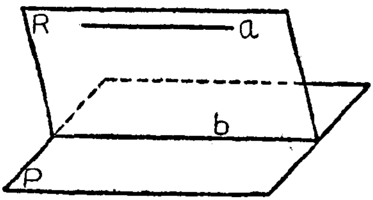
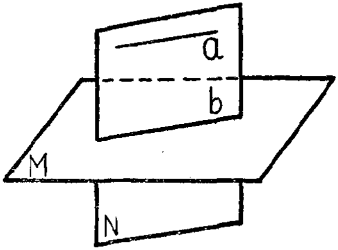


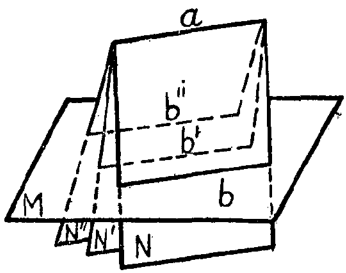
圖 7.

这里首先要注意兩直綫相平行、直綫和平面相平行的定义。由題設 $a \parallel b$，所以过 a 和 b 可作一个平面 R。要証明 $a \parallel P$，按定义，应証明直綫 a 和平面 P 不相交。目前我們还沒有定理可应用，所以只好采取反証法；这就是，假設 a 和 P 相交，那末就必然引出 $a \nparallel b$ 的矛盾的結論来(圖 7)。

(2)如果一条直綫 a 与一个平面 M 相平行，那末，經过直綫 a 的平面 N 和平面 M 的交綫 b，一定和直綫 a 平行。



(a)



(b)

圖 8.

这个定理是直綫和平面相平行的性質定理，同时也是上面判定定理的逆定理。我們仍然采用反証法来証明它。

假設 $a \nparallel b$，由于 a 和 b 是在同一平面 N 內的 (圖 8 a)，那末 a 和 b 就应該相交。又因为 b 在平面 M 內，因而交点也要在 M 內，这和題設 $a \parallel M$ 相矛盾。所以在平面 N 內的直綫 a 和 b 一定是平行的。

注意，經过 c 可以作無数平面 N、N'、N''……，它們和平面 M 相交于直綫 b，b'、b''…，因此 $a \parallel b$，$a \parallel b'$，$a \parallel b''$……(圖 8 b)

利用这个性質定理，可以解下列作圖題。

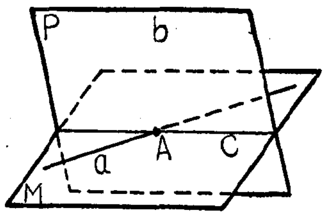


圖 9.

作圖題 7：过一条已知直綫 a 作一个与另一条已知直綫 b 平行的平面(圖 9)。

在已知直綫 a 上任取一点 A 过点 A 及直綫 b 作平面 P，在平面 P 內經过点 A 作直綫 c 和直綫 b 平行，再經过直綫 a 和 c 作平面 M，那末，平面 M 就是經过已知直綫 a 同时与已知直綫 b 相平行的平面。

当 $a \parallel b$ 时，有無数解；当 a 和 b 相交时，無解。

空間直綫平行性質的傳遞性 平面几何里講过，如果有三条直綫

a、b和c，其中$a \parallel b$，$b \parallel c$，那末$a \parallel c$。这个定理說明了平面內直綫和直綫相平行的性質是可以傳遞的。这个定理在空間里仍然成立，但是需要就空間的情形重新証明才能够应用。証明分兩段进行。

（1）如果直綫$a \parallel b$，同时平面M經过直綫a，平面N經过直綫b，平面M和N相交于直綫c，那么，$a \parallel c$，$b \parallel c$。

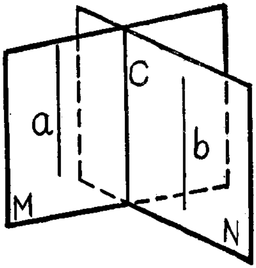


圖 10.

由題設$a \parallel b$，同时b在平面N內，根据直綫与平面相平行的判定定理知道，$a \parallel N$，因为$a \parallel N$，过a的平面M与平面N相交于直綫c根据直綫与平面相平行的性質定理，所以$a \parallel c$（圖 10）。

依同理，可証明$b \parallel c$。

（2）若直綫$a \parallel b$、$b \parallel c$，則$a \parallel c$。

在証明之前，要注意直綫a和b是在同一平面內的，直綫b和c也是在同一平面內的，但是直綫a和c是否在同一个平面內，那就需要証明以后才能肯定。

在直綫c上任取一点P，經过点P及直綫a作平面M，經过点P及直綫b作平面N，假定平面M和N相交的直綫是d（平面M和N有公共点P）；根据上面証明的定理(1)，应該有$a \parallel d$，$b \parallel d$。但由題設$b \parallel c$，这样經过P点的直綫d和c都和直綫b平行，因此直綫c和d应該重合。这就証明了$a \parallel c$（图11）。

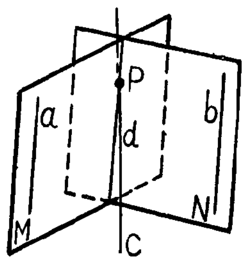


圖 11.

平面和平面平行的判定定理和性質定理

判定直綫和直綫是否平行，有好几种方法，判定平面和平面相平行的方法也有几种。这里只提出利用直綫和平面相平行的定理，来判定兩平面平行的方法。

若直綫a和b是相交的，且直綫a和b都和平面M相平行，那末，

經过直綫 a 和 b 的平面和平面 M 平行。

我們用反証法来証明。假定平面 M 和 N 不平行，并且相交于直綫 c。根据直綫与平面相平行的性質定理，应該有 $a \parallel c$，$b \parallel c$；那末，在平面 N 上就有兩条相交的直綫 a 和 b 都平行于直綫 c，这和平行公理相矛盾，所以这兩平面平行(圖 12)。

利用这条性質定理，可以解决下面的作圖題。

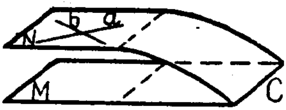


圖 12.

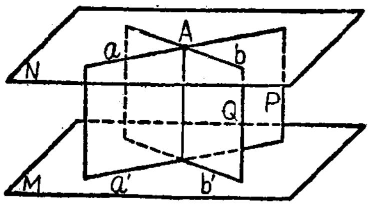


圖 13.

作圖題 8：过已知平面 M 外一已知点 A，作一个平面和已知平面 M 平行。

在已知平面 M 內作任意的兩条相交直綫 a' 和 b'，再过已知点 A 作直綫 $a \parallel a'$、$b \parallel b'$ (先作平面 P 和 Q)，那末，經过直綫 a 和 b 所作的平面 N 就是所求作的平面(圖 13)。

証明是容易的，要注意的是：本題总有一个解答，而且只有唯一的解答。

关于平行平面的几何性質，是很容易理解的。高中立体几何課本里提出下列三条性質定理：

(a)兩个平行平面 M 和 N 分別与第三个平面 P 相交于直綫 a 和 b，那末直綫 a 和 b 必定是平行的；

(b)夾在兩个平行平面之間的平行綫段总是相等的；

(c)兩条直綫被三个平行平面所截，对应的綫段成比例。

如果我們理解了平行平面的定义，又分析了这些定理的假設和結論，証明是不困难的。定理(a)可用反証法，証明同一平面內的直綫 a

和 b 不可能相交。定理(b)証明这两条綫段是平行四边形的对边。定理(c)可应用平行截割定理来証明，但是需要添作一条輔助綫。

空間任意兩直綫所成的角　前面，我們已經講过，空間兩条直綫的相互位置，一共有三种情形：(1)平行的，(2)相交的，(3)既不平行又不相交的异面直綫。在几何学里，需要用一个量来表示它們之間的位置关系；更确切的說，就是要規定直綫間(包括异面直綫在内)交角的一般定义。

为了理解这个定义的意义，我們可先研究平面几何里的兩直綫相交的情况。假設有兩組平行綫 $a_1\parallel a_2\parallel a_3\parallel\cdots\cdots$、$b_1\parallel b_2\parallel b_3\parallel\cdots\cdots$，如果 a_1 和 b_1 相交成 θ 角，那末 a_1、a_2、$a_3\cdots\cdots$ 中的任一条直綫和 b_1、b_2、$b_3\cdots\cdots$ 中任一条直綫所成的交角都等于 θ。从这个例子可以看出，把角的一边或兩边平行移动，所成的交角还是不变的。再例如，有一条东西方向的河道，河上架設鉄桥行走火車，火車路的方向是北 60° 偏东，我們一定会說河道和火車路相交成 30° 角。这里火車路和河道是不在同一平面内的既不相交又不平行的兩条異面直綫。

根据理論(由平面内二直綫的交角推广)，实际經驗和解析几何中的应用，我們作出下列定义：

"过一点并与兩条异面直綫分別平行且有同方向的兩条射綫所組成的角，叫做兩条异面直綫所成的角。"(直綫 a 和 b 的方向預先指定)

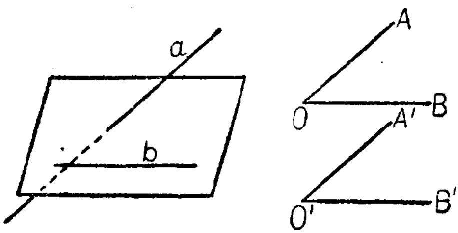


圖 14.

例如，a、b 是兩条异面直綫。任取一点 O，过 O 作 $OA\parallel a$，$OB\parallel b$，則 $\angle AOB$ 就是直綫 a 和 b 所成的角。这里，是把直綫 a 平行移动到 OA