工科研究生数学系列教材

矩阵分析教程

董增福　编著

$$\det \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\boldsymbol{A}}$$

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^{+} = \boldsymbol{A}^{+}\otimes\boldsymbol{B}^{+}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{m\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1j}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{i1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{in}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mj}} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\lambda_i\mu_j = (\prod_{i=1}^{m}\lambda_i)^n(\prod_{j=1}^{n}\mu_j)^m = (\det\boldsymbol{A})^n(\det\boldsymbol{B})^m$$

HITP

哈尔滨工业大学出版社

矩阵分析教程

董增福　编著

哈尔滨工业大学出版社
哈尔滨

内容简介

本书全面、系统地介绍了矩阵论的基本理论、运算方法及其应用。全书分八章,前四章突出基础理论,重点介绍线性空间与线性变换,欧氏空间与酉空间,Jordan 标准形,向量与矩阵的范数理论。后四章侧重应用,学习矩阵的分析运算,特征值的估计,广义逆矩阵在解线性方程组中的应用,矩阵直积在解矩阵方程及矩阵微分方程中的应用。每章配有相应的习题,书末给出答案与提示。本书力求行文流畅,例题详实,推论严谨,深入浅出,旨在提高工科研究生的数学修养和自学能力。

本书可作为工科院校硕士生、博士生矩阵分析课程的教科书,也可供有关专业的教师、工程技术与科研人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

矩阵分析教程/董增福编著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2003.10

ISBN 7-5603-1937-8

Ⅰ.矩… Ⅱ.董… Ⅲ.矩阵分析-高等学校-教材 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 091420 号

出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社　址	哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　真	0451-86414749
电　话	0451-86416203
印　刷	肇东粮食印刷厂
开　本	787×1092　1/16　印张 17　字数 381 千字
版　次	2003 年 10 月第 1 版　2003 年 10 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 7-5603-1937-8/O·156
印　数	1~3 000
定　价	24.00 元

前　言

本书是笔者在近年来为哈尔滨工业大学硕士生、博士生讲授矩阵分析课程的讲义基础上编写而成的。

矩阵作为一种基本的数学工具在数学理论及其他科学领域，如控制理论、数值分析、信息与科学技术、最优化理论、管理科学等学科都有十分重要的应用。毋庸置疑，深入学习和熟练掌握矩阵的基本理论和相关计算对于工科的研究生来说十分重要。

本书共八章，前四章主要侧重基础理论，重点介绍线性空间、线性变换、内积空间、正交投影、Jordan 标准形、向量与矩阵的范数理论。后四章侧重应用，主要学习矩阵的分析运算，矩阵在线性系统中的应用，在求解微分方程组中的应用，特征值的估计，广义逆矩阵在解线性方程组中的应用，矩阵直积在解矩阵方程及矩阵微分方程中的应用，等等。全书大约用 40 学时学完，有些内容因学时所限可以选讲，每章后面配有一定的习题，认真做好习题对掌握教材内容是非常必要的。

在编写本书过程中，得到哈尔滨工业大学研究生院、数学系有关领导的大力支持，特别是研究生院培养处吴林志处长、宋平老师的关怀与帮助为本书的出版创造了必要条件，在此深表诚挚的谢意。笔者还要感谢数学系教学带头人杨克劭教授，本书的出版是和他的鼓励与帮助分不开的。

由于水平所限，书中难免有纰漏之处，敬请广大读者指正。

编　者

2003 年 7 月

于哈尔滨工业大学

主要符号说明

$\mathbf{R}(\mathbf{C})$	实数域,实数集合(复数域,复数集合)
$\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$	n 维实向量集合(n 维复向量集合)
$\mathbf{R}^{m\times n}(\mathbf{C}^{m\times n})$	$m\times n$ 阶实矩阵集合($m\times n$ 复矩阵集合)
$\mathbf{R}_r^{m\times n}(\mathbf{C}_r^{m\times n})$	秩为 r 的实(复)$m\times n$ 矩阵集合
$\mathbf{U}^{n\times n}$	n 阶酉矩阵的集合
$\det \boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置
$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置
$\boldsymbol{\theta}$	零向量,零元素
$\boldsymbol{O}$	零矩阵
$\rho(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径
$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩
$\operatorname{tr} \boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹
$\boldsymbol{J}$	方阵的 Jordan 标准形
$\varphi(\lambda)$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式
$m_A(\lambda)$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式
$\boldsymbol{A}^-$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆
$\boldsymbol{A}^+$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伪逆矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆
$R(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间,值域
$N(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的核空间,零空间,线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\theta}$ 的解空间
$V_n(\mathbf{F})$	数域 $\mathbf{F}$ 上的 n 维线性空间
$V_1\oplus V_2$	子空间 V_1, V_2 的直和
$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的直积或 Kronecker 积
$\operatorname{vec} \boldsymbol{A}$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行拉直的列向量
$\mathscr{A}(V_n(\mathbf{F}))$	线性变换的值域,也记为 $R(\mathscr{A})$
$\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$	线性变换的核,也记为 $N(\mathscr{A})$
$\Vert\boldsymbol{\alpha}\Vert$	向量范数
$\Vert\boldsymbol{A}\Vert$	矩阵范数
$\operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$	向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间
$\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$	对角线元素为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的对角阵
$\dim V$	线性空间 V 的维数
$\square$	表示定理、命题证毕

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　　录

第一章　线性空间与线性变换

线性空间与线性变换的概念是矩阵理论的基础，本教程从此讲起，当然假定读者已经具备了线性代数有关的基础知识。

1.1　线性空间

在线性代数里，我们知道 n 维向量对向量的加法、向量的数乘这两种线性运算保持封闭，并且 n 维向量的线性运算满足 8 条规则。事实上对于矩阵，一元多项式等等也都具有加法和数乘的线性运算，并且这种线性运算也满足 8 条规则，把这里的基本东西抽象出来，就得出线性空间的概念。

定义 1.1　设 $\mathbf{F}$ 是一数域，V 是一非空集合，如果对任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}\in V$，总有惟一的一个元素 $\boldsymbol{\gamma}\in V$ 与之对应，称 $\boldsymbol{\gamma}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$；又对于任一数 $k\in\mathbf{F}$ 及任一元素 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有惟一的一个元素 $\boldsymbol{\delta}\in V$ 与之对应，称为 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积，记为 $\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}$（称为对加法与数乘运算封闭）；并且这两种运算满足以下 8 条规则（设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$；$k,l\in\mathbf{F}$）：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) 在 V 中存在零元素 $\boldsymbol{\theta}$，对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，都有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) 在 V 中存在负元素，即对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，存在 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{\beta}$ 称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素；

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$。

那么，称 V 为数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间，记为 $V(\mathbf{F})$。

上述定义中，没有涉及非空集合 V 是由什么元素组成的，对加法与数乘如何进行都没有具体规定，这样就使线性空间具有丰富的内涵。考虑到线性空间与 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 在本质上十分相似，人们称线性空间为“向量空间”，其元素统称为向量。

线性空间的运算除上面的 8 条规则外，还具有如下性质：

①零元素惟一；

②负元素惟一；$\forall\,\boldsymbol{\alpha}\in V$，用 $-\boldsymbol{\alpha}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素；

③$k\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}$；特别有 $0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$，$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$；

④$k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}\Rightarrow k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\theta}$；

⑤消去律成立，即若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}$，则 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$。

例 1.1 所有 $m\times n$ 实矩阵的全体构成的集合，关于矩阵的加法与数乘构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，记为 $\mathbf{R}^{m\times n}$。

例 1.2 次数小于 n 的实多项式的全体与零多项式组成的集合

$$P[x]_n=\{f(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \mid a_i\in\mathbf{R}\quad i=0,\cdots,n-1\}$$

关于多项式的加法及数与多项式的乘法构成实线性空间，并用 $P[x]_n$ 表示此线性空间。

例 1.3 区间 $[a,b]$ 上全体连续实函数构成的集合，按函数的加法和数与函数的数量乘法构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，记为 $C[a,b]$。

下面介绍一个较复杂的例子。

例 1.4 设 $V=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},x_1,x_2\in\mathbf{R}\}$

定义加法与数乘运算为：若 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}\overset{\triangle}{=\!=}(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)^{\mathrm{T}}$$

$$\lambda\circ\boldsymbol{x}\overset{\triangle}{=\!=}(\lambda x_1,\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2)^{\mathrm{T}},\lambda\in\mathbf{R}$$

为了与通常的加法、数量乘法相区别，此处用“$\oplus$”、“$\circ$”表示所定义的加法与数量乘法。则按照如此定义的加法与数乘运算，V 构成 $\mathbf{R}$ 的线性空间。

显然，如此定义下 $\mathbf{F}$ 对加法与数乘运算封闭。

以下逐一检验 8 条规则成立。

(1) $\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{x}$

(2) 另设 $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2)^{\mathrm{T}}$

$$(\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y})\oplus\boldsymbol{z}=(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)^{\mathrm{T}}\oplus(z_1,z_2)^{\mathrm{T}}=$$
$$(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+x_1y_1+z_2+x_1z_1+y_1z_1)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{x}\oplus(\boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{z})=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\oplus(y_1+z_1,y_2+z_2+y_1z_1)^{\mathrm{T}}=$$
$$(x_1+y_1+z_1,x_2+y_2+z_2+y_1z_1+x_1y_1+x_1z_1)^{\mathrm{T}}$$

故 $(\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y})\oplus\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}\oplus(\boldsymbol{y}\oplus\boldsymbol{z})$。

(3) V 中存在零元素 $\boldsymbol{\theta}=(0,0)^{\mathrm{T}}$，使

$$\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{\theta}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\oplus(0,0)^{\mathrm{T}}=(x_1+0,x_2+0+x_1\cdot 0)=\boldsymbol{x}$$

(4) $-\boldsymbol{x}=(-x_1,-x_2+x_1^2)^{\mathrm{T}}$ 即为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素，这是因为

$$\boldsymbol{x}\oplus(-\boldsymbol{x})=(x_1-x_1,x_2-x_2+x_1^2+x_1(-x_1))^{\mathrm{T}}=$$
$$(0,0)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\theta}$$

(5) $1\circ\boldsymbol{x}=(1x_1,1x_2+\frac{1(1-1)}{2}x_1^2)^{\mathrm{T}}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}$

(6) $k\circ(\lambda\circ\boldsymbol{x})=k\circ(\lambda x_1,\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2)^{\mathrm{T}}=$

$$(k\lambda x_1,k(\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2)+\frac{k(k-1)}{2}(\lambda x_1)^2)^{\mathrm{T}}=$$
$$(k\lambda x_1,k\lambda x_2+\frac{k\lambda(k\lambda-1)}{2}x_1^2)^{\mathrm{T}}=$$
$$(k\lambda)\circ(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}=$$

$$(k\lambda)\circ\boldsymbol{x}$$

$$(7)(k+\lambda)\circ\boldsymbol{x}=((k+\lambda)x_1,(k+\lambda)x_2+\frac{1}{2}(k+\lambda)(k+\lambda-1)x_1^2)^{\mathrm{T}}=$$
$$(kx_1+\lambda x_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2+\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2+(kx_1)(\lambda x_1))^{\mathrm{T}}=$$
$$(kx_1,kx_2+\frac{k(k-1)}{2}x_1^2)^{\mathrm{T}}\oplus(\lambda x_1,\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2)^{\mathrm{T}}=$$
$$k\circ\boldsymbol{x}\oplus\lambda\circ\boldsymbol{x}$$

上式中$\frac{1}{2}(k+\lambda)(k+\lambda-1)x_1^2=\frac{1}{2}[(k+\lambda)^2-(k+\lambda)]x_1^2=$
$$\frac{1}{2}[(k^2-k)+(\lambda^2-\lambda)+2k\lambda]x_1^2=$$
$$\frac{k(k-1)}{2}x_1^2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2+(kx_1)(\lambda x_1)$$

$$(8)\lambda\circ(\boldsymbol{x}\oplus\boldsymbol{y})=\lambda\circ(x_1+y_1,x_2+y_2+x_1y_1)^{\mathrm{T}}=$$
$$(\lambda(x_1+y_1),\lambda(x_2+y_2+x_1y_1)+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}(x_1+y_1)^2)^{\mathrm{T}}=$$
$$(\lambda x_1+\lambda y_1,(\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2)+(\lambda y_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}y_1^2)+\lambda^2x_1y_1)^{\mathrm{T}}=$$
$$(\lambda x_1,\lambda x_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x_1^2)\oplus(\lambda y_1,\lambda y_2+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}y_1^2)^{\mathrm{T}}=$$
$$\lambda\circ\boldsymbol{x}\oplus\lambda\circ\boldsymbol{y}$$

可见 V 构成 $\mathbf{R}$ 上的线性空间，记为 $\mathbf{R}^2(\oplus\quad\circ)$。同 n 维线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中向量组的线性相关性一样，如果 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 为线性空间 $V(\mathbf{F})$中的 m 个向量，且在数域 $\mathbf{F}$ 中存在一组数 $k_1,\cdots,k_m$，使

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m \tag{1.1}$$

则说 $\boldsymbol{x}$ 为向量组 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的线性组合，也称向量 $\boldsymbol{x}$ 可由 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性表示。

如果存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{\theta} \tag{1.2}$$

则称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性相关，否则称其线性无关。也就是说，只有 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时式(1.2)才能成立，称 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 线性无关。

因为式(1.1)、式(1.2)所述的概念仅与向量的线性运算有关，而与向量自身的属性无任何关联，所以在 $\mathbf{R}^n$ 中所讨论的向量相应的结论可以不加改变地移到线性空间中来。

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是线性空间 V 中两个向量组，如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 中每个向量都可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示。如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 可以互相线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是等价的。容易证明向量组之间的等价满足自反性、对称性、传递性。

例 1.5 在线性空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$中 $\boldsymbol{E}_{ij}=(e_{st}^{ij})_{m\times n}$，其中 $e_{st}^{ij}=\begin{cases}1 & s=i,t=j\\0 & \text{其余}\end{cases}$，即 $\boldsymbol{E}_{ij}$是这样一个矩阵，它的第 i 行第j 列元素为 1，其余元素为 0，则 $\boldsymbol{E}_{ij},i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$ 线性无关。

事实上设

$$k_{11}\boldsymbol{E}_{11}+k_{12}\boldsymbol{E}_{12}+\cdots+k_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}+\cdots+k_{m1}\boldsymbol{E}_{m1}+\cdots+k_{mn}\boldsymbol{E}_{mn}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$$

则有

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1j} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & \cdots & k_{2j} & \cdots & k_{2n} \\ k_{i1} & \cdots & k_{ij} & \cdots & k_{in} \\ & & \cdots\cdots & & \\ k_{m1} & \cdots & k_{mj} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$$

所以 $k_{ij}=0, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots n$,即 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{ij},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$线性无关。

例 1.6 (Steinitz 定理) 设 V 为数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间,如果 V 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,并且它们可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,则 $r\leqslant s$。

证 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,因此存在常数 $k_{ij}, i=1,2,\cdots,r; j=1,2,\cdots,s$ 使

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1=k_{11}\boldsymbol{\beta}_1+k_{21}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{s1}\boldsymbol{\beta}_s \\ \boldsymbol{\alpha}_2=k_{12}\boldsymbol{\beta}_1+k_{22}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{s2}\boldsymbol{\beta}_s \\ \qquad\cdots\cdots \\ \boldsymbol{\alpha}_r=k_{1r}\boldsymbol{\beta}_1+k_{2r}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{sr}\boldsymbol{\beta}_s \end{cases}$$

为书写紧凑方便,我们约定

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ \vdots \\ k_{s1} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots \quad \boldsymbol{\alpha}_r=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{bmatrix} k_{1r} \\ k_{2r} \\ \vdots \\ k_{sr} \end{bmatrix}$$

于是有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

若 $r>s$,则线性方程组

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{s1} & k_{s2} & \cdots & k_{sr} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

必有非零解$(c_1,c_2,\cdots,c_r)^{\mathrm{T}}$。

将这一非零解右乘式(1.3)两端有

$$c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\theta}$$

推出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,与已知条件矛盾,故 $r\leqslant s$。 □

如果例 1.6 中 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关,并且这两个向量组等价,显然 $r=s$。

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

同样和线性代数里的向量组一样,我们可以引入极大线性无关向量组及秩的概念,只是这里的向量不局限于 n 维向量而是广义的,于是显然有等价的向量组有相同的秩。

类似地有:若线性空间 V 中线性无关向量组所含向量最多个数为 n,则称 V 是 n 维的;如果 $n=\infty$,即在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量,则称 V 是无限维的。本教材只涉及有限维线性空间。

1.2　线性空间的基与坐标

定义 1.2　线性空间 $V(\mathbf{F})$中的向量组 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 称为$V(\mathbf{F})$的一个基或基向量组,如果它满足:

①$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关;

②$V(\mathbf{F})$中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 均可表成$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 的线性组合。

由定义 1.2 可见,线性空间 $V(\mathbf{F})$的基所含向量的个数即为 $V(\mathbf{F})$的维数,记为 $\dim V(\mathbf{F})=n$,也称 $V(\mathbf{F})$为 n 维线性空间,并记为 $V_n(\mathbf{F})$。

定义 1.3　设 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 为 $V_n(\mathbf{F})$的基,对任意 $\boldsymbol{x}\in V_n(\mathbf{F})$,在此基下有惟一线性表示式 $\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{x}_i,a_i\in\mathbf{F},i=1,\cdots,n$,称 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为向量$\boldsymbol{x}$ 在基$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 下的坐标,为方便计,有时常常把坐标写成 $\mathbf{R}^n$ 中行向量或列向量的形式。

定义 1.3 中的惟一表示式是指:若 $\boldsymbol{x}$ 还有另一表示式$\boldsymbol{x}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\boldsymbol{x}_i$,则 $a_i=b_i,i=1,2,\cdots,n$。

只要两式相减则有

$$\boldsymbol{\theta}=\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\boldsymbol{x}_i$$

因为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关,故 $a_i-b_i=0$,即 $a_i=b_i,i=1,2,\cdots,n$。

这表明一个向量在同一基下的坐标是惟一的。

例 1.7　在线性空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$中,$\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为此空间的基,若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,则有

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 在基$\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$下的坐标即为 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$。

例 1.8　对于线性空间 $P[x]_n$,显然,$1,x\cdots,x^{n-1}$为它的基,若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$,则 $f(x)\in P[x]_n$。于是 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$即为$f(x)$在基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$下的坐标。

另一方面 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$。$x_0\in\mathbf{F}$,而 $1,(x-x_0),\cdots,(x-x_0)^{n-1}$为 $P[x]_n$ 的另一基,可见$f(x)$在基 $1,(x-x_0),\cdots,(x-x_0)^{n-1}$下的坐标为 $f(x_0),f'(x_0),\cdots,\dfrac{f^{(n-1)}(x^0)}{(n-1)!}$。这说明尽管同一基下的坐标惟一,但是同一向量$f(x)$在

不同基下的坐标是不同的,那么它们之间关系如何呢?下面来讨论这个问题,这就是所谓的基变换公式与坐标变换公式。

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是线性空间 $V_n(\mathrm{F})$ 的两个基,且

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1 = p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2 = p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \qquad\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n = p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1 + p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}$$

约定写成紧凑形式如下

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P} \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{n\times n}$。

称式(1.4)为基变换公式,称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵,因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{P}$ 显然是可逆的。

定理 1.1　设 $\boldsymbol{P}$ 是 $V_n(\mathrm{F})$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵, $V_n(\mathrm{F})$ 的元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, $(x_1',x_2',\cdots,x_n')^{\mathrm{T}}$,则有坐标变换公式

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}\quad 或 \quad \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \tag{1.5}$$

证

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix} =$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标的惟一性,所以

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}\quad 或 \quad \begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \qquad \square$$

例 1.9　设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的两个基,若 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,且 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{n}x_i'\boldsymbol{\beta}_i$。求由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$,以及 $\boldsymbol{x}$ 的两个坐标之间的坐标变换公式。

解　显然有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\ddots&\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$$

所以过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\ddots&\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\1&\cdots&\cdots&1\end{bmatrix}$$

经计算

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\-1&1&\ddots&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&-1&1\end{bmatrix}$$

坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\ddots&\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&\cdots&0\\-1&1&\ddots&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x_1' + x_2' \\ \cdots\cdots \\ x_n = x_1' + x_2' + \cdots + x_n' \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 - x_1 \\ \cdots\cdots \\ x_n' = x_n - x_{n-1} \end{cases}$$

例 1.10　在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中，求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_4=\begin{bmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}$ 的过渡矩阵。

解　方法一(直接法)

设 $\boldsymbol{\beta}_1 = \sum\limits_{i=1}^{4} k_i\boldsymbol{\alpha}_i = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + k_4\boldsymbol{\alpha}_4$

比较上式两端的对应元素，可得线性方程组

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & -2 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\\0 & 2 & 1 & 1\\1 & 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\k_3\\k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

它的惟一解 $\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$，为 $\boldsymbol{\beta}_1$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标。同理 $\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$，分别为 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 下的坐标，于是过渡矩阵为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_4)=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

方法二(间接法)

取 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 中的基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$。

设 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2$ 分别为由基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 及 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵，于是有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{Q}_1$$
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{Q}_2$$

可以直接写出 $\boldsymbol{Q}_1=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\\0 & 2 & 1 & 1\\1 & 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$，它的 4 个列向量与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的元素横排竖放相对应。

同理
$$Q_2=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

由
$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{Q}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{Q}_2$$

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{Q}_2=\begin{bmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}$$

在求 $\boldsymbol{P}$ 的作法里，方法一、方法二给出两种不同的途径，我们简称之直接法与间接法。

1.3　线性子空间

在几何空间 $\mathbf{R}^3$ 中，考虑过原点的一条直线或一个平面，可以验证这一直线或这一平面对于几何向量的加法与数乘运算封闭，分别形成了一个一维和二维的线性空间，以此为背景，我们引出以下定义。

定义 1.4　设 V_1 是数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间 V 的一个非空子集，且对 V 中线性运算满足

①如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1$，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$；

②如果 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1, k\in\mathbf{F}$，则 $k\boldsymbol{\alpha}\in V_1$。

则称 V_1 为 V 的线性子空间，简称子空间。

显然线性子空间也是线性空间，因为它除了对 V 所具备的线性运算封闭外，并且满足相应的 8 条运算规则。线性子空间也有基、维数等概念，这里不再一一赘述，一个显而易见的事实是 $\dim V_1\leqslant\dim V$。

对于每一个非零的线性空间 V 至少有两个子空间，一个是 V 自身，另一个仅由零向量所构成的子空间称为零空间，这两个子空间称为 V 的平凡子空间，我们关心的当然是非平凡子空间即真子空间的情况。

例 1.11　n 元齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\theta}$ 的解的集合构成线性空间，称为解空间，记为 $N(\boldsymbol{A})$，它是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间，若 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，即 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$，则 $\dim N(\boldsymbol{A})=n-r$。

例 1.12　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\lambda_i\boldsymbol{\xi}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的所有特征向量加上 $\boldsymbol{\theta}$ 构成 $\mathbf{R}^n$ 的子空间，记为 V_{λ_i}。

例 1.13　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $V(\mathbf{F})$ 的一组向量，令 $V_1=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m \mid k_i\in\mathbf{F}, i=1,\cdots,m\}$，即 V_1 表示 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 生成的子空间，记为
$$V_1=\operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$$
也记为
$$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$$

例 1.14　（矩阵的值域与核）

设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_j,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 个列向

量,则 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 是 m 维线性空间 $\mathbf{R}^m$ 的子空间,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间,记为 $R(\boldsymbol{A})$。$\forall\, \boldsymbol{y}\in \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=R(\boldsymbol{A})$, $\exists\, x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$\boldsymbol{y}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{Ax}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,所以 $R(\boldsymbol{A})$ 可表成

$$R(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{y}\mid \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列空间也叫 $\boldsymbol{A}$ 的值域。

称集合 $\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\theta}\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的核空间(零空间)。显然这一空间恰为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\theta}$ 的解空间,于是 $N(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\theta}\}$,$\boldsymbol{A}$ 的核空间的维数称为 $\boldsymbol{A}$ 的零度。

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 中的一个向量组,与线性代数一致,其极大无关组中所含向量的个数称为此向量组的秩,记为 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$。若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是子空间 V_1 的一组基,显然有

$$V_1=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$$

关于由向量组所生成的子空间,我们有如下重要结论。

定理 1.2 设 $\boldsymbol{\alpha}_i\in V(\mathbf{F}),i=1,2,\cdots,m$,则

$$\dim \mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$$

证 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r(r\leqslant m)$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大无关组,于是

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r$$

则对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,存在 $k_i\in\mathbf{F},i=1,\cdots,m$,使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{\alpha}_i&=\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\sum_{j=r+1}^{m}k_j\boldsymbol{\alpha}_j=\\&\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\sum_{j=r+1}^{m}k_j\Big(\sum_{i=1}^{r}l_{ij}\boldsymbol{\alpha}_i\Big)=\\&\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=r+1}^{m}k_jl_{ij}\Big)\boldsymbol{\alpha}_i=\\&\sum_{i=1}^{r}\Big(k_i+\sum_{j=r+1}^{m}k_jl_{ij}\Big)\boldsymbol{\alpha}_i\end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{\alpha}$ 可表成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 的一个基,因此 $\dim\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)=r=\mathrm{rank}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$。 □

本定理说的是向量组生成子空间的维数恰为向量组的秩,由此可见例 1.11 中 $\dim R(\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$,且有 $\dim(R(\boldsymbol{A}))+\dim(N(\boldsymbol{A}))=n$。

前面曾提及两个向量组的等价问题,对于生成子空间对应有如下定理:

定理 1.3 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价。

证 先证必要性。

设 $\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表示,反过来同样 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 等价。

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com