按教育部新大纲新教材同步编写

黄金搭配

主　　编　马　超

撰　　文　刘行功

　　　　　余爱明

一面讲一面练

高二数学（下）

（试验修订版）

龍門書局

www.sciencep.com

黄金搭配

一面讲 一面练

高二数学（下）

主　编：马　超
撰　文：刘行功
余爱明

龍門書局
北　京

图书在版编目(CIP)数据

黄金搭配·一面讲一面练. 高二数学. 下 /马超主编；刘行功，余爱明编著. —北京：龙门书局，2004. 1

ISBN　7-80191-165-2

I. 黄… II. ①马…②刘… ③余… III. 数学课-高中-习题 IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第086758号

责任编辑：吴浩源　魏　华 / 封面设计：耕者设计工作室

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http: //www.sciencep.com

中国科学院印刷厂　印刷

科学出版社发行　各地书店经销

*

2004年1月第　一　版　开本：787×1092　1/16

2004年1月第一次印刷　印张：11 1/2

印数：1 — 15 000　字数：255 000

定价：17.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)


黄金搭配
一面讲一面练

前言

亲爱的读者，欢迎你使用《黄金搭配·一面讲一面练》新型练习册！

《黄金搭配·一面讲一面练》高中版共10册，依照教学大纲和人教社高中各科课本编写。为使读者用好这套练习册，下面介绍它的特点。

书名解读

“黄金”是“好”、“最优”的代名词。这套练习册在“讲”与“练”的搭配，同步性与问题分类的搭配，知识点与重难点的搭配，基础题、中等题与难题的搭配，分课讲练与单元综合讲练的搭配，师生共用的搭配等方面的设计都争取最优化，故谓“黄金搭配”。

这套练习册按一面“讲”配一面“练”进行编排，“一面讲一面练”也有一边讲一边练或老师、学生面对面讲练的寓意。

丛书特色

在设计形式上，一面“讲”与一面“练”合成一页，每页均标有剪裁线，页页可撕，互不影响，不是活页胜似活页，学生使用方便，交作业方便，老师批阅方便，家长检查也方便。

在内容策划上，不是单纯的讲完一堂课布置一个练习，因为这种性质的练习在课本上都有课后练习题，我们不拟重复。而目前学生需要的是这样的练习册：在同步的前提下，把一章的知识体系归纳成几类完整的问题(一个完整的问题可能一堂课就能讲完，也可能两三堂课或更多堂课才能讲完)逐一进行讲解，然后根据分类的问题布置练习题。这种形式的练习册在讲解和布题的目的性和综合性、知识的完整性和应试性等方面就提高了一大步。学生使用后，在方法运用和综合能力方面也必然会迅速提高。《黄金搭配·一面讲一面练》就是根据学生的需求策划出来的，这种练习册的优越性是普通练习册所无法比拟的。

完美结合

形式是一面“讲”一面“练”，内容是在同步的前提下按问题分类讲练。所以，这套练习册把二者完美地结合在一起——“以题代讲”，“以讲带练”，“以练为主”。“以题代讲”，就是以“题”讲知识，以“题”讲方法，以“题”讲能力。“以讲带练”，就是以“题”检测知识，以“题”检测方法的运用，以“题”检测能力，通过讲解后练“题”，提高综合能力、创新意识和应试能力。“以练为主”，就是讲解后有同步练习(语文科有分课讲练)、单元综合练习、期中测试、期末测试等练习，可以满足不同程度学生的需求。布题的难度除注意基础题外，中等题和较难题是这套练习册的重点。

使用范围

这套练习册适合中等及中等以上学生使用。由于其同步性强、剪裁方便，可以在课堂教学中使用，也可供学生在课后复习中及家长辅导时使用。由于这套练习册是按问题分类同步编写的，所以也适合使用非人教版教材的地区使用。拥有这套练习册就是拥有一位良师伴读，与良师为伴，将会实现您六月的美好梦想。

圆六月梦，从这里开始；圆六月梦，从拥有《黄金搭配》开始！

编委会

2004年元月于北京

目录

学生使用指南

第一步：

上课前，先阅读本单元“知识结构”与“问题分类”，做到对本章内容及结构了然于心。

第二步：

下课后，选择与课堂内容对应的问题，读懂“讲”，仔细体会老师是如何讲题、解题的。

第三步：

读懂“讲”后，可按老师的要求或自己选择与讲对应的“练”——“同步训练”，做题。

第四步：

做完“同步训练”，可交老师批改，或者自己对照本书的“解题思路与答案”，看看答案对了没有，看看解题过程是否规范。

第五步：

本单元所有的问题“讲”、“练”部分都完成了，你就可以做“单元综合能力训练”，看看自己到底掌握了多少。

第六步：

本单元所有的题做完后，你可以再翻到“知识结构”与“问题分类”，进行多方面的记忆与思考。

第七步：

每一单元你都按第一步至第六步学完后，就可以做“期中”或“期末”试题，迎接考试与挑战。

教师使用指南

第一步：

本书内容与教材同步。可通读问题分类的“讲”与“练”，与自己的教学进度相匹配。

第二步：

可选择“讲”中的例题在课堂上讲解。

第三步：

在课堂中或上完1～2节课后，对应“问题分类”中讲完的问题布置“练”，并请学生按剪切线裁下“同步训练”交老师批改。(可要求学生裁下答案部分，交老师保存)

第四步：

按“思路提示与解答”进行批改。

第五步：

相应的“同步训练”完成后，可布置学生完成“单元综合能力训练”。

第 9 章　直线、平面、简单几何体

能力要求

1. 掌握平面的基本性质，空间两条直线、直线和平面、两个平面的位置关系，以及它们所成的角与距离的概念.

2. 能运用上述概念及有关两条直线、直线和平面、两个平面的平行和垂直关系的性质与判定，进行论证和解决有关问题.

3. 会用斜二测法画水平放置的平面图形直棱柱、正棱锥的直观图，能根据图形想像它们的位置关系.

4. 理解棱柱、棱锥、球的有关概念和性质.

5. 掌握直棱柱、正棱锥、球的表面积和体积公式，并能运用这些公式进行计算.

6. 会用反证法证明一些简单的立体几何命题.

知识结构

- 直线、平面
  - 平面 → 平面的基本性质(三个公理、三个推论)　重点
  - 空间两条直线 → 平行直线：公理 4；相交直线：等角定理；异面直线：
    - 判定方法
    - 异面直线所成的角
    - 异面直线间的距离
  - 空间直线与平面 →
    - 直线在平面内
    - 直线与平面平行
      - 概念
      - 判定定理
      - 性质定理
    - 直线与平面相交
      - 垂直 ——
        - 判定定理
        - 性质定理
        - 点到平面的距离
      - 斜交 ——
        - 三垂线定理及其逆定理、射影定理
        - 直线与平面所成的角
  - 空间两个平面 →
    - 平行 ——
      - 判定定理、性质定理
      - 两平行平面间的距离
    - 相交 ——
      - 斜交——二面角及其平面角
      - 垂直——判定定理、性质定理

平行与垂直问题是本章的重点

异面直线间的距离是难点

空间中角和距离的计算是考试热点

以简单几何体为载体，考查直线与平面知识，这是多数试题的特点

- 空间向量
  - 空间向量的概念及运算、空间向量的坐标：共线向量定理、共面向量定理、空间向量基本定理、夹角、距离公式
  - 空间向量在立体几何中的应用

- 简单几何体
  - 棱柱、棱锥：
    - 定义及有关概念、性质
    - 直观图的画法
    - 面积公式、体积公式
  - 正多面体 ——
    - 多面体
    - 欧拉公式
  - 球 ——
    - 概念、性质、画法
    - 面积公式、体积公式

问题分类

1. 判断两条直线、直线与平面、平面与平面的位置关系
2. 空间的角的计算
3. 空间的距离的计算
4. 简单几何体的面积和体积的计算
5. 图形的组合、翻折、展开、割补、平移
6. 证明空间中的一些简单几何命题

讲

9.1　平面(1)

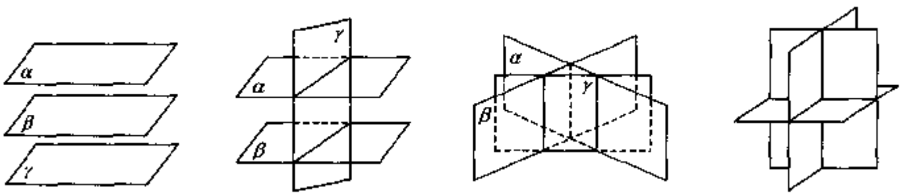
例1　空间相交于一点的4条直线最多可以确定平面(　　)

A. 4个　　B. 5个　　C. 6个　　D. 7个

解　选C. 确定最多平面的情况应是每两条直线所确定的平面都不重合. 不妨将4条直线依次编号，则相邻两个号码的直线共确定4个平面，相间两号码的直线共确定2个平面，故最多时确定6个平面.

例2　3个平面将空间分成n个部分，则n值为________.

解　n值为4或者6或者7或者8. 如图9-1中甲、乙、丙、丁分别是n依次取4，6，7，8时的一种情况.



甲　　乙　　丙　　丁

图 9-1

例3　求证：两两相交且不共点的4条直线必共面.

证明　设4条直线为l_1，l_2，l_3，l_4，$l_1\cap l_2=A$，则经过l_1，l_2可以确定一个平面α.

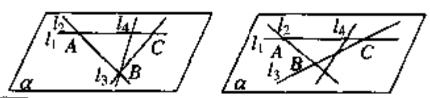
∵ 4条直线不共点.

∴ l_3，l_4中至少有1条不过A点，不妨设l_3不过A点，则l_3交l_1，l_2于异于A的两点B、C，从而有$l_3\subset\alpha$.

又∵ l_4与l_1，l_2，l_3都相交，共有3个交点，其中至少有两个交点不重合. 如图9-2中甲和乙两种情形，否则这4条直线共点，与题设矛盾.

解决共面问题，先确定一个平面，再证其他的点或线在这个平面内

∴ $l_4\subset\alpha$，故4条直线共面.



甲　　乙

图 9-2

例4　如图9-3，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知E、F分别为AB、BC中点；H、G分别为D_1C_1、C_1B_1中点.

求证：E、F、G、H四点共面.

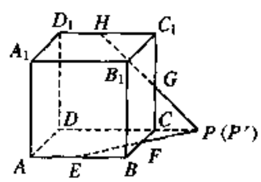


图 9-3

证明　在平面$ABCD$上，因E、F分别为AB、BC中点，则过E、F的直线不可能平行于CD，设EF与DC的延长线交于点P，容易判定$\triangle BEF\backsim\triangle PCF$，

∴ $PC=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}DC$.

证明P'与P重合，为同一法
本例亦给出了三线共点的证法

同理，在平面DCC_1D_1上，过H、G的直线也必与DC的延长线交于一点P'，且$P'C=\frac{1}{2}DC$.

∴ $PC=P'C$，故P与P'重合，即直线HG与EF相交于P点.

∴ 直线HG与EF确定一个平面α，故E、F、G、H四点共面.

注：证明四点共面，可证某一点在其三点所确定的平面内，亦可证明此四点分别在两条相交或平行的直线上.

例5　已知平面α，β，γ两两相交于三条直线l_1，l_2，l_3，且l_1，l_2，l_3不平行.

求证：l_1，l_2，l_3相交于一点.

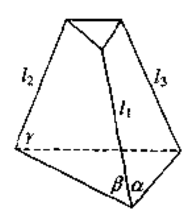


图 9-4

证明　如图9-4，$\alpha\cap\beta=l_1$，$\beta\cap\gamma=l_2$，$\gamma\cap\alpha=l_3$.

∵ $l_1\subset\beta$，$l_2\subset\beta$. 且l_1 $\nparallel$ l_2，

∴ l_1与l_2必相交. 设$l_1\cap l_2=P$，又$P\in l_1\subset\alpha$，$P\in l_2\subset\gamma$，

∴ $P\in\alpha\cap\gamma=l_3$，∴ l_1，l_2，l_3相交于一点P.

班级______ 姓名______

同步综合训练

练

1. 空间有不同的五个点，若有某四点共面，则这五点最多可确定多少个平面？

2. 从空间一点出发的 n 条射线，最多可以确定几个平面？最少可以确定几个平面？请说明理由.

3. 三条平行线都和第四条直线相交. 求证这四条直线在同一平面内.

4. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 的中点，F 为 A_1A 的中点. 求证：(1) E、C、D_1、F 四点共面；(2) CE、D_1F、DA 三线共点.

5. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H、K、L 分别为 AB、BC、CC_1、C_1D_1、D_1A_1、AA_1 的中点. 求证：E、F、G、H、K、L 六点共面.

讲

9.2 平面(2)

例1 已知空间四边形$ABCD$中，E、F分别是AB、AD的中点，G、H分别是BC、CD上的点，且$\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$．求证：直线$EG$、$FH$、$AC$相交于一点．

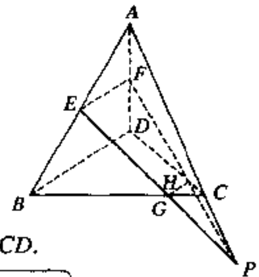


图 9-5

证明 如图9-5，$\because$ E、F分别是AB、AD的中点，$\therefore$ $EF\underset{=}{\parallel}\frac{1}{2}BD$．

又$\because$ $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$，$\therefore$ $GH\underset{=}{\parallel}\frac{1}{3}BD$．$\therefore$ $EF\parallel GH$且$EF\neq GH$，

$\therefore$ $EFGH$是梯形．$\therefore$ 两腰EG、FH必相交于一点P．

$\because$ $GE\subset$平面ABC，$FH\subset$平面ACD，$\therefore$ $P\in$平面ABC，$P\in$平面ACD．

$\therefore$ P点在平面ABC和平面ACD的交线AC上．

$\therefore$ 直线EG、FH、AC相交于一点．

证点在直线上，直线过定点，三点共线，常用公理2

例2 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E、F分别为D_1C_1、B_1C_1的中点，$AC\cap BD=P$，$A_1C_1\cap EF=Q$，求证：(1) B、D、E、F四点共面；(2) 若A_1C交平面$BDEF$于R点，则P、Q、R三点共线．

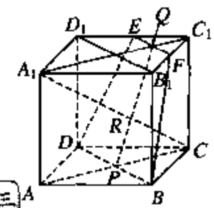


图 9-6

证明 (1) 如图9-6，$\because$ EF是$\triangle D_1B_1C_1$的中位线，

证四点共面，可通过证四点在两条平行线上而得证

$\therefore$ $EF\parallel B_1D_1$，在正方体AC_1中，$B_1D_1\parallel BD$．

$\therefore$ $EF\parallel BD$，$\therefore$ EF、BD确定一个平面．即B、D、E、F四点共面．

(2) 设平面ACC_1A_1为α，平面$BDEF$为β．

$\because$ $Q\in A_1C_1\subset\alpha$，$\therefore$ $Q\in\alpha$，

又$Q\in EF\subset\beta$，$\therefore$ $Q\in\beta$，$\therefore$ Q是α与β的公共点，

证三点共线，可证此三点均在两平面的交线上

同理P是α与β的公共点，$\therefore$ $\alpha\cap\beta=PQ$，

又$A_1C\cap\beta=R$，$\therefore$ $R\in A_1C$，$\therefore$ $R\in\alpha$且$\alpha\in\beta$，$\therefore$ $R\in PQ$．故P、Q、R三点共线．

例3 过空间一点O作不在同一平面内的三条射线OA、OB、OC．设$\angle AOB$的平分线为OP，$\angle BOC$的平分线为OQ，$\angle COA$的邻补角的平分线为OR，求证：OP、OQ、OR三线共面．

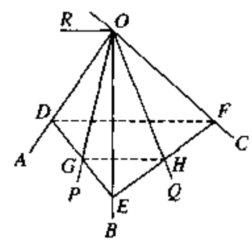


图 9-7

证明 如图9-7，不妨在射线OA、OB、OC上取$OD=OE=OF$，设OP、OQ分别交DE、EF于G、H．则G、H分别为DE、EF的中点，$\therefore$ $GH\parallel DF$．

OR是$\angle COA$的邻补角的平分线，也是$\triangle ODF$的外角平分线，

$\angle ROD=\angle ODF=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle DOF)$，

$\therefore$ $OR\parallel DF$，$\therefore$ $GH\parallel OR$，GH、OR确定一个平面α．

由O、R、G、$H\in\alpha$，知OG、OH、OR共面，即OP、OQ、OR三线共面．

例4 定线段AB所在直线与定平面α相交，P为直线AB外的任意一点，且$P\notin\alpha$，直线AP、BP与α交于A'、B'，求证：不论P在什么位置，$A'B'$总过一个定点．

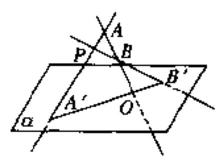


图 9-8

证明 如图9-8，设定直线AB与定平面α相交于定点O．

$\because$ AP、AB是相交直线，$\therefore$ AP、BP可以确定一个平面β．

$\because$ $AP\cap\alpha=A'$，$BP\cap\alpha=B'$，$AB\cap\alpha=O$，$\therefore$ A'，O，B'是平面α与β的公共点．

$\therefore$ A'，O，B'三点都在α与β的交线上．$\therefore$ $A'B'$总过定点O．

例5 已知两直线$a\cap b=A$，求证：经过a，b有且只有一个平面．

证明 在直线a上另取异于A的一点B，在直线b上另取异于A的一点C，则A、B、C三点不共线．

$\therefore$ 过A、B、C可以作一个平面α，$\because$ a，b上各有两点在α内，$\therefore$ a、$b\subset\alpha$．

若过a、b还有一个平面β，则A、B、$C\in\beta$．

证明平面的惟一性常用同一法或反证法

$\because$ 经过A、B、C的平面只能有一个．$\therefore$ α与β重合．$\therefore$ 过a、b有且只有一个平面．

同步综合训练

练

1. 已知空间四边形 $ABCD$ 中，E、H 分别是边 AB、AD 的中点，F、G 分别是 BC、CD 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$．求证：三条直线 EF、GH、AC 交于一点.

2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O_1 为上底面的中心，过顶点 A、B_1、D_1 作一个平面，此平面与对角线 A_1C 交于 P 点，求证：P 点必在线段 AO_1 上.

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，设 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于 Q．求证：B、Q、D_1 共线.

4. 如图 9-9，设 E、F、G、H 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边的中点，已知对角线 $BD=8$，$AC=10$.
(1) 求证：$EFGH$ 为平行四边形；(2) 计算 EG^2+HF^2 的值.

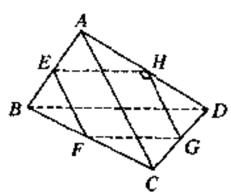


图 9-9

5. 已知两条直线 $a/\!/b$，求证：经过 a、b 有且只有一个平面.

9.3 空间直线(1)

例 1 AB、CD、EF 是三条两两异面且两两垂直的异面直线，BC 是 AB、CD 的公垂线，DE 是 CD、EF 的公垂线，FA 是 EF、AB 的公垂线，$BC=3$，$DE=4$，$FA=5$，则 $AD=$________.

解 构造长方体 $ABCG-FHDE$. 如图 9-10，所求 AD 的长，就是该长方体的对角线 AD.

构造图形、凸现问题

在 Rt$\triangle FED$ 中，$DF^2=EF^2+ED^2=BC^2+ED^2$.

在 Rt$\triangle AFD$ 中，$AD^2=AF^2+DF^2$

$\therefore\ AD^2=AF^2+BC^2+ED^2=3^2+4^2+5^2=50$.

$\therefore\ AD=5\sqrt{2}$.

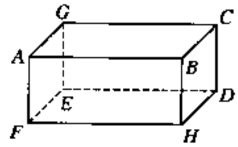


图 9-10

例 2 如图 9-11，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应顶点的连线 AA'、BB'、CC' 交于同一点 O，且 $\dfrac{AO}{OA'}=\dfrac{BO}{OB'}=\dfrac{CO}{OC'}=\dfrac{2}{3}$. (1) 求证：$AB/\!/A'B'$，$AC/\!/A'C'$，$BC/\!/B'C'$；(2) 求 $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}$ 的值.

证明 (1) $\because$ AA' 与 BB' 相交于 O 点，且 $\dfrac{AO}{OA'}=\dfrac{BO}{OB'}$，

$\therefore$ $AB/\!/A'B'$. 同理，$AC/\!/A'C'$，$BC/\!/B'C'$.

解 (2) $\because$ $AB/\!/A'B'$，$AC/\!/A'C'$，

$\therefore$ AB 和 AC，$A'B'$ 和 $A'C'$ 所成的锐角(或直角)相等　运用等角定理

即 $\angle BAC=\angle B'A'C$，同理，$\angle ABC=\angle A'B'C'$，$\angle ACB=\angle A'C'B'$.

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，又 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AO}{OB'}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore$ $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$.

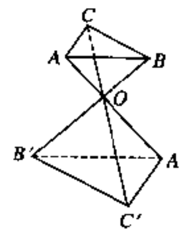


图 9-11

例 3 a、b、c 是不共面的三条直线，它们相交于点 M，又 A、D 是直线 a 上异于点 M 的不同两点，B、C 分别是直线 b、c 上异于点 M 的两点，求证 BD 与 AC 是异面直线.（图 9-12）

证明 (方法一)设相交直线 a，b 确定平面 α，$\because$ $D\in a$，$a\subset\alpha$，$\therefore$ $D\in\alpha$.

同理，$B\in\alpha$，$\therefore$ $BD\subset\alpha$. 又 $A\in a$，$a\subset\alpha$，$\therefore$ $A\in\alpha$，

又 $A\notin BD$，$C\notin\alpha$，$\therefore$ BD 与 AC 是异面直线.　运用异面直线判定定理

(方法二)用反证法.

设 BD 与 AC 不是异面直线，则 BD 与 AC 可以确定一个平面 α.

又 $A\in a$，$D\in a$，$\therefore$ $a\subset\alpha$，又 $M\in a$，$\therefore$ $M\in\alpha$.

又 $B\in b$，$M\in b$，$\therefore$ $b\subset\alpha$，同理 $c\subset\alpha$，$\therefore$ a，b，c 同在 α 内，这与 a，b，c 不共面矛盾.

$\therefore$ BD 与 AC 是异面直线.　运用反证法，导致矛盾，否定假设，肯定结论

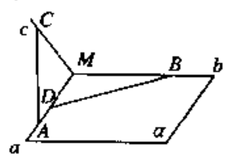


图 9-12

例 4 如图 9-13 是正方体的平面展开图，在这个正方体中，① BM 与 ED 平行；② CN 与 BE 是异面直线；③ CN 与 BM 成 60° 角；④ DM 与 BN 垂直. 其中正确命题的序号是________.

解 把平面展开图折叠成正方体 $ABCD-EFMN$. 易知① BM 与 ED 异面；② CN 与 BE 平行；③ CN 与 BM 所成的角为 60°；④ DM 与 BN 垂直.

$\therefore$ 正确序号是③、④.

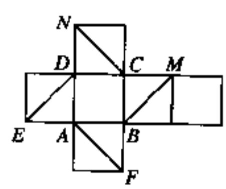


图 9-13

例 5 如果直线 a 垂直于直线 b，那么直线 a 与平行于直线 b 的任一直线 b' 互相垂直.

证明 过直线 a 上任意一点 A，作直线 b_1，使 $b_1/\!/b$，如图 9-14，

则直线 a 和 b_1 的夹角为直角.

$\because$ $b/\!/b'$，$b/\!/b_1$. $\therefore$ $b_1/\!/b'$，

$\therefore$ 直线 a 和 b_1 的夹角与 a、b' 所成的角相等，

$\therefore$ 直线 a 与 b' 互相垂直.

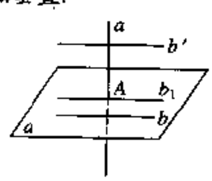


图 9-14

班级______ 姓名______

同步综合训练

练习

1. 设 a、b、c 是两两异面的三条直线，已知 $a\perp b$，且 d 是 a，b 的公垂线，如果 $c\perp a$，那么 c 与 d 的位置关系是（　）

A. 相交　　B. 平行　　C. 异面　　D. 异面或平行

2. 已知命题：如果一个角的两边和另一个角的两边分别垂直，那么这两个角相等或互补．试判断其真假．

3. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别为 AB、BC 的中点．求证：EF 和 AD 为异面直线．(如图 9-15)

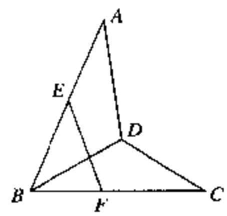


图 9-15

4. 将正方体的纸盒展开，如图 9-16．直线 AB、CD 在原正方体中的位置关系是：① 平行；② 垂直；③ 相交且成 60°角；④ 异面且成 60°角．其中正确的序号是________.

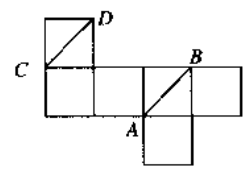


图 9-16

5. 在空间四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，$AC\perp BD$．如图 9-17.

(1) 求证：四边形 $EFGH$ 是矩形；(2) 试比较 EG 与 $\frac{1}{2}(AC+BD)$ 的大小．

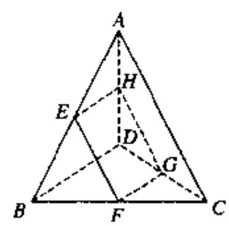


图 9-17

9.4 空间直线(2)

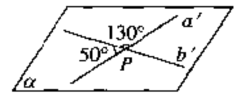


图 9-18

例 1 已知异面直线 a 与 b 所成的角为 50°，P 为空间一定点，则过点 P 且与 a、b 所成的角都是 30°的直线有且仅有______条.

解 有且仅有 2 条，如图 9-18．过点 P 作直线 a、b 的平行线分别为 a'、b'，则 a'、b'确定一个平面 α，且它们所成的角为 50°．将 50°角的平分线绕定点 P 在垂直于 α 的平面内转动，可以得到两条与 a'、b'所成角都是 30°的直线，则这两条直线与异面直线 a 和 b 也都成 30°角.

注：若 50°不变，① 将 30°改为 25°，则答案为 1 条；② 将 30°改为 65°，则答案为 3 条；③ 将 30°改为 70°，则答案为 4 条.

例 2 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F 分别为 BB_1、CC_1 的中点，求 AE、BF 所成角的余弦值.

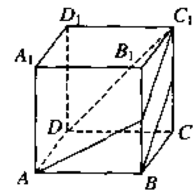


图 9-19

解 如图 9-19，连 EC_1、BF，则 $EC_1 /\!/ BF$，

∴ AE 和 EC_1 所成的角就是 AE 和 BF 所成的角. 求两条异面直线所成的角，要做到：作出来，说出来，求出来

连 AC_1，设正方体棱长为 a．则 $AE = EC_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，$AC_1 = \sqrt{3}a$.

在$\triangle AEC_1$ 中，$\cos\angle AEC_1 = \dfrac{2AE^2 - AC_1^{\ 2}}{2AE^2} = 1 - \dfrac{6}{5} = -\dfrac{1}{5}$

∴ AE、BF 所成角的余弦值为 $\dfrac{1}{5}$. 两条直线所成角为锐角或直角．此处容易错答为 $-\dfrac{1}{5}$

例 3 已知空间四点 A、B、C、D，且 $AB = BC = CD = DA = AC = BD = a$，$E$、$F$ 分别为 BD、AC 的中点. (1) 求 CE、DF 所成角的余弦；(2) 求 AC 与 BD 的距离.

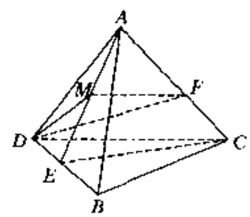


图 9-20

解 (1) 如图 9-20，连 AE，取 AE 中点 M，连接 MF、DM. 选定特殊点 M 是关键

在$\triangle AEC$ 中，MF 为中位线，∴ $MF = \dfrac{1}{2}EC$，$MF /\!/ EC$，∴ MF 与 DF 所成的角即为 DF 与 CE 所成的角. $MF = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，$DF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

在 Rt$\triangle DEM$ 中，$DE = \dfrac{a}{2}$，$EM = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，$DM = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}a$.

在$\triangle DFM$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle DFM = \dfrac{2}{3}$. 将条件集中到一个三角形内，解三角形得解

(2) 连 EF. ∵ $\triangle ABC \cong \triangle ADC$，∴ 对应中线 $BF = DF$，∴ $\triangle FBD$ 为等腰三角形.
又 E 为 BD 中点，∴ $EF \perp BD$. 同理 $EF \perp AC$. ∴ EF 是 AC 和 BD 的公垂线段.

在 Rt$\triangle DEF$ 中，易求 $EF = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. ∴ AC 和 BD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

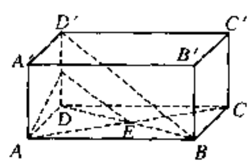


图 9-21

例 4 在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，已知 $AB = a$，$BC = b$，$AA' = c\ (a > b)$. 求异面直线 $D'B$ 和 AC 所成角的余弦值.

解 如图 9-21，连接 BD、AC，相交于 E. 取 DD'的中点 F，连 EF，则 $EF \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \dfrac{1}{2}D'B$.

∴ AC 与 EF 所成的角就是 AC 和 $D'B$ 所成的角. 连 AF，则 $AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \dfrac{\sqrt{4a^2 + c^2}}{2}$.

又 $AE = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$，$EF = \dfrac{1}{2}BD' = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$. 在$\triangle AEF$ 中，得 $\cos\angle AEF = \dfrac{b^2 - a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}$.

∵ $a > b$. ∴ $D'B$ 与 AC 所成角的余弦值为 $\dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}$.

班级______ 姓名______

同步综合训练

练

1. 相交直线 a，b 的夹角为 $60°$，则过交点且与 a、b 所成角均为 $60°$的直线条数为________.

2. A 是 $\triangle BCD$ 所在平面外一点，$AD=BC$，E、F 分别是 AB、CD 的中点，且 $EF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，求异面直线 AD 和 BC 所成的角.

3. 空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，AB 与 CD 成 $30°$角，E、F 分别为 BC、AD 的中点，求 EF 和 AB 所成的角.

4. 在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$中，$\angle B'AB=\alpha$，$\angle C'BC=\beta$，求 AB'与 BC'所成角的余弦值.

5. 如图 9-22，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M、N、P 分别是 A_1B_1、BB_1、CC_1 的中点. 求异面直线 D_1P 与 AM，CN 与 AM 所成的角.

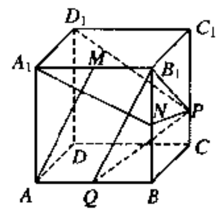


图 9-22