平流動力理論介紹—公式的演繹與討論

謝光道　王鵬飛著

財政經濟出版社

平流動力理論介紹——公式的演繹與討論

謝光道　　王鵬飛著

財政經濟出版社

平流動力理論介紹
——公式的演繹與討論

定價 4,800 元

著　者：謝光道　王鵬飛

出版者：財政經濟出版社
北京西總布胡同七號

印刷者：文明書局印刷所
上海西康路 337 弄 106 號

總經售：新華書店

分類：氣象　編號：0011

54.9，滬型，42頁，62千字；787×1092，1/25開，3—1/5印張

1954年9月上海初版　印數(滬)1—1,500

(上海市書刊出版業營業許可證出零零八號)

本書內容提要

平流動力分析理論，是蘇聯天氣學的先進理論。由於有了這種理論，使人們對於天氣的結構和演變有了進一步的具體的了解。蘇聯天氣分析和預報的實踐方面，因爲有了這種理論的指導，就不斷地獲得了良好的成就。

由於這理論指出了天氣分析的正確方向，所以蘇聯天氣分析的研究，在這方面的成就，是具有革命意義的。目前，這種理論還在不斷地充實和發展中。

本書通過公式的詳細演繹，有系統地對這理論作初步的介紹。其內容包括兩部分：第一部分，演繹並討論了基培爾第一和第二近似方程及溫度和氣壓的加速度公式；第二部分，演繹並討論了局地的和個別的鋒生鋒消公式及鋒生與動力變壓間的關係等。

本書可供高等學校氣象專業學習天氣學課程時參考者之用，而一般氣象工作者及對天氣學有興趣的同志，在具有一定數學水平時，也可以參考。

前　　言

我們所以寫這本小册子，是因爲當前我國氣象工作者越來越急迫地要求學習蘇聯氣象科學的先進理論——平流動力分析理論．中央氣象局也曾編譯了一些關於平流動力分析理論的册子．可是，由於這些册子裏，每每包含了許多公式，而對於這些公式的來源，書中却很少介紹，使讀者在學習時，發生了困難．同時也因爲對這些公式的假設及演繹過程中所加的假定不很明瞭，在應用這些公式時，就不可避免地也會產生運用不恰當的弊病．因此，爲了要初步地解決上述困難，我們便編寫了這本小册子，供我國氣象工作者在學習蘇聯平流動力理論時的參考．

本書是按照各公式所予的假定，及演繹這些公式所能找到的一些不完全的提示來演繹的．其中有許多步驟，很可能是出於我們自己主觀的意見，和原演繹者有着一些距離．在這一點上，希望讀者們能給予指正．

爲了使這本小册子的內容比較完整，我們並沒有單純的按照演繹公式的方式來編寫，這裏，我們還對這些公式加以討論，各公式的演繹也儘量使它詳盡．我們想，只有這樣才能使讀者得到更大的幫助．

這本小册子是我們兩人分工寫的．雖然我們兩人曾經互相地補充了一些意見，而且也想法使內容統一起來．但在筆調方面，可能還是有些不一致的地方，希望讀者們原諒．

這本小册子可供高等學校氣象專業的學員，或在微積分及向量分析方面有初步了解的讀者學習參考．

謝光道
王鵬飛

目　錄

第一部分　局地溫度和氣壓的變化

第二部分 鋒生和鋒消

第一部分　局地溫度和氣壓的變化

§1. 平流變化——第一近似方程

1. 假設

(1)　$f=2\omega\sin\varphi=$常數，

式中 f 爲地轉參變數，ω 爲地轉角速度，φ 爲緯度.

由於
$$\frac{df}{d\varphi}=2\omega\cos\varphi,$$

所以，我們知道：在赤道地區上，

$$\frac{df}{d\varphi}\sim 2\omega\cos 0^{\circ}=2\omega,$$

這就是說，在低緯地區上，f 隨緯度的改變值是比較大的，我們不能把 f 當爲常數看待，因而我們應用基培爾的理論，來作低緯地區的預報，結果不會是很理想的.

(2)　$\dfrac{dQ}{dt}=0,$

意即謂氣團在運動中的熱力過程是絕熱的．這個假設局限了基培爾理論應用的時限．在較短的時間內，氣團在運動中的熱力過程很接近於絕熱的過程．所以，一般說來，應用基培爾理論來作 1—2 天的短期預報，是比較準確的.

(3)　$T=T_0-\gamma Z,$

其中 T_0 爲地面氣溫，Z 爲高度，T 爲 Z 高度上的氣溫，γ 爲氣溫直減率．這個式子假定了，氣溫的直減率 γ 是一個常數，也就是說：基培爾所究的對象是常定直減率的斜壓大氣.

(4)亂流未考慮在內.亂流對近地面大氣的溫度的影響是很大的,但是我們所研究的是整個對流層下半層的情況,所以地面亂流的影響,從量的方面來說是無關緊要的.如果討論的時間的尺度比較長,亂流是應當考慮在內的.

(5)此外,基培爾沒有考慮地形的影響,可以假設地面的鉛直風速為零.這個假設應用在地形少變化的地域是允許的,在山地上,則應將地形的影響考慮在內.

2.第一基本方程

由假設(2),氣團在運動中的熱力過程是絕熱的,亦即$\frac{dQ}{dt}=0$,我們可以利用絕熱方程

$$T^{C_p}p^{-R}=\text{常數},$$

或

$$C_p\log T-R\log p=\text{常數}. \tag{1}$$

取(1)式對於時間 t 的全微分,則得

$$C_p\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}-\frac{R}{p}\frac{dp}{dt}=0. \tag{2}$$

如為近地面的大氣,設地面氣溫為 T_0,地面氣壓為 p_0,則(2)式可寫為

$$\frac{dT_0}{dt}=\frac{RT_0}{p_0C_p}\frac{dp_0}{dt}. \tag{3}$$

因為

$$T_0=T_0(x,y,t),$$

$$\frac{dT_0}{dt}=\frac{\partial T_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial T_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial T_0}{\partial y}, \tag{4}$$

其中 u_0、v_0 為沿 x、y 直角坐標軸方向地面風的分速.地面上實際風(u_0、v_0)是由地轉風與非地轉風兩部分合成的,亦即

$$u_0=u_g+u_0',$$

$$v_0=v_g+v_0', \tag{5}$$

其中 u_g、v_g 為地轉風;u_0'、v_0' 為地轉風偏差.

將(5)式代入(4)式得:

$$\frac{dT_0}{dt}=\frac{\partial T_0}{\partial t}+u_g\frac{\partial T_0}{\partial x}+v_g\frac{\partial T_0}{\partial x}+u_0'\frac{\partial T_0}{\partial x}$$

$$+v_0'\frac{\partial T_0}{\partial y}. \tag{6}$$

其中 u_g、v_g 爲地轉風，$u_g=-\frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y}$, $v_g=\frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x}$.

(6)式可寫爲：

$$\frac{dT_0}{dt}=\frac{\partial T_0}{\partial t}+\left(-\frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial y}\frac{\partial T_0}{\partial x}+\frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial P_0}{\partial x}\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)$$

$$+u_0'\frac{\partial T_0}{\partial x}+v_0'\frac{\partial T_0}{\partial y}=\frac{\partial T_0}{\partial t}-\frac{1}{f\rho_0}\left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial T_0}{\partial y}\right)+u_0'\frac{\partial T_0}{\partial x}+v_0'\frac{\partial T_0}{\partial y}.$$

假使利用下面的表示法：

$$(T_0,p_0)=\nabla T_0\times\nabla p_0=\frac{\partial T_0}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}-\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial T_0}{\partial y},$$

那末前式可寫爲

$$\frac{dT_0}{dt}=\frac{\partial T_0}{\partial t}-\frac{1}{f\rho_0}(T_0,p_0)+u_0'\frac{\partial T_0}{\partial x}+v_0'\frac{\partial T_0}{\partial y}. \tag{7}$$

將(7)式與 $p_0=\rho_0RT_0$ 的關係式代入(3)式，得

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}-\frac{RT_0}{fp_0}(T_0,p_0)+u_0'\frac{\partial T_0}{\partial x}+v'\frac{\partial T_0}{\partial y}$$

$$-\frac{RT_0}{C_pp_0}\frac{dp_0}{dt}=0, \tag{8}$$

此即基培爾理論中所用到的第一基本方程.

3. 第二基本方程

基培爾假定對流層頂爲一物質面，係由同一些質點所組成的. 此外，從觀測的結果，我們知道：對流層頂高度與對流層頂的溫度之間存在着負的相關. 分析的經驗顯示在氣旋發展的時期中，對流層頂漸漸低降，它的溫度却升高. 有人把這種現象稱之爲漏斗作用，它意味着：把空氣吸了下來. 這就表明了對流層頂有物質面的性質. 不過，這種說法只

就較短的時期說，才是正確的.

對流層頂的溫度 T_H 可以用下式來表示:

$$T_H(x,y,H,t)=T_0(x,y,t)-\gamma H. \tag{9}$$

式中 H 爲對流層頂的高度. 我們也可以把上式視爲對流層頂的方程式. 基培爾氏既假定對流層頂爲物質面，則按動力的邊界條件，得有

$$\frac{d}{dt}(T_0-\gamma H-T_H)=0, \tag{10}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}(T_0-\gamma H-T_H)+u_H\frac{\partial}{\partial x}(T_0-\gamma H-T_H)$$

$$+v_H\frac{\partial}{\partial y}(T_0-\gamma H-T_H)=0. \tag{11}$$

就某一地點而言，對流層頂升高，其溫度就低降；對流層頂降低，其溫度就升高. 這意味着 $\frac{\partial T_H}{\partial t}$ 與 $\frac{\partial H}{\partial t}$，$\frac{\partial T_H}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial H}{\partial x}$，$\frac{\partial T_H}{\partial y}$ 與 $\frac{\partial H}{\partial y}$ 的符號是相反的. 基培爾計算出:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T_H}{\partial t}+\gamma\frac{\partial H}{\partial t}&<<\frac{\partial T_0}{\partial t},\\ \frac{\partial T_H}{\partial x}+\gamma\frac{\partial H}{\partial x}&<<\frac{\partial T_0}{\partial x},\\ \frac{\partial T_H}{\partial y}+\gamma\frac{\partial H}{\partial y}&<<\frac{\partial T_0}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

如果利用上列的三個不等式，則(11)的近似式可寫爲

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}+u_H\frac{\partial T_0}{\partial x}+v_H\frac{\partial T_0}{\partial y}=0, \tag{13}$$

或者用向量來表示，上式就成爲

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}+\overline{\mathrm{v}}_H\cdot\nabla T_0=0. \tag{14}$$

這個式子說明了，對流層頂上的流場能顯示出地面氣溫場的傳播速度.

4. 溫度和氣壓的平流變化

(1)第一近似方程:

由(14)式得

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}+u_H\frac{\partial T_0}{\partial x}+v_H\frac{\partial T_0}{\partial y}=0,$$

其中

$$u_H=u_{Hg}+u_H',\quad v_H=v_{Hg}+v_H'.$$

而 u_{Hg}、v_{Hg} 爲地轉風分速，u_H'、v_H' 爲地轉風偏差分速. 因而

$$u_{Hg}=-\frac{1}{f\rho_H}\frac{\partial p_H}{\partial y},\quad v_{Hg}=\frac{1}{f\rho_H}\frac{\partial p_H}{\partial x}.$$

我們將這些關係式代入前式,就得到

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}=\frac{1}{f\rho_H}\frac{\partial p_H}{\partial y}\frac{\partial T_0}{\partial x}-\frac{1}{f\rho_H}\frac{\partial p_H}{\partial x}\frac{\partial T_0}{\partial y}-u_H'\frac{\partial T_0}{\partial x}-v_H'\frac{\partial T_0}{\partial y}$$

$$=\frac{1}{f\rho_H}(T_0,p_H)-u_H'\frac{\partial T_0}{\partial x}-v_H'\frac{\partial T_0}{\partial y}.$$

如果用向量來表示上式,並設

$$\bar{v}_H'=u_H\bar{i}+v_H\bar{j},\quad \nabla T_0=\frac{\partial T_0}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial T_0}{\partial y}\bar{j},$$

則得

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}=\frac{1}{f\rho_H}(T_0,p_H)-\bar{v}'_H\cdot\nabla T_0. \tag{15}$$

用常定直減率的斜壓大氣中($\gamma=$常數)的氣壓測高公式

$$\log p_H-\log p_0=\frac{g}{R\gamma}\log\frac{T_0-\gamma H}{T_0}, \tag{16}$$

假定在很小的範圍內,H就很少變動,因此我們求得

$$\frac{\nabla p_H}{p_H}-\frac{\nabla p_0}{p_0}=\frac{g}{R\gamma}\left(\frac{\nabla T_0}{T_0-\gamma Z}-\frac{\nabla T_0}{T_0}\right)=\frac{gH}{R}\frac{\nabla T_0}{T_HT_0},$$

其中 ∇ 代表下列意義:

$$\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y},$$

故得:

$$\nabla p_H=\frac{\rho_H gH}{T_0}\nabla T_0+\frac{p_H}{p_0}\nabla p_0. \tag{17}$$

將(17)式代入(15)式，則

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_0}{\partial t}&=\frac{RT_H}{fp_H}(\nabla T_0\times\nabla p_H)-\bar{v}_H'\cdot\nabla T_0\\&=\frac{RT_H}{fp_H}\left[\nabla T_0\times\left(\frac{\rho_H g_H}{T_0}\nabla T_0+\frac{p_H}{p_0}\nabla p_0\right)\right]-\bar{v}_H'\cdot\nabla T_0\\&=\frac{RT_H}{fp_0}(\nabla T_0\times\nabla p_0)-\bar{v}_H'\cdot\nabla T_0\\&=\frac{RT_H}{fp_0}(T_0,p_0)-\bar{v}_H'\cdot\nabla T_0.\end{aligned}\tag{18}$$

在上式的演算中，我們用了 $p_H=\rho_H RT_H$ 與 $\nabla T_0\times\nabla T_0=0$ 的關係. 如果對流層頂的風為地轉風的話，卽在 $\bar{v}_H'=0$ 時，則(18)式變為

$$\frac{\partial T_0}{\partial t}=\frac{RT_H}{fp_0}(T_0,p_0).\tag{19}$$

將(19)式的結果代入(8)式，同時我們又設地面風為地轉風(卽是 $\bar{v}_0'=0$)，由於 $\frac{dp_0}{dt}=\frac{\partial p_0}{\partial t}+(\bar{v}_g+\bar{v}_0')\cdot\nabla p_0=\frac{\partial p_0}{\partial t}+\bar{v}_g\cdot\nabla p_0=\frac{\partial p_0}{\partial t}$ (因 $\bar{v}_g$ 與 ∇p_0 垂直)，則得

$$\frac{RT_H}{fp_0}(T_0,p_0)-\frac{RT_0}{fp_0}(T_0,p_0)=\frac{RT_0}{C_p p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_0}{\partial t}&=\frac{C_p}{fT_0}(T_H-T_0)(T_0,p_0)\\&=-\frac{C_p}{f}\left(1-\frac{T_H}{T_0}\right)(T_0,p_0).\end{aligned}\tag{20}$$

令

$$\alpha=\frac{C_p}{f}\left(1-\frac{T_H}{T_0}\right),$$

$$\beta=\frac{RT_H}{fp_0},$$

則(20)與(19)兩式可分別寫成為

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1=-\alpha(T_0,p_0),\tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial t}\right)_1 = \beta(T_0, p_0). \tag{22}$$

以上兩個式子，是在假設有地轉風的條件下所求得的，因而叫做基培爾第一近似方程，也就是地面氣壓和氣溫平流變化的公式．為了與動力變化有所區別起見，我們以 $\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1$ 和 $\left(\frac{\partial T_0}{\partial t}\right)_1$ 來分別表示地面氣壓和氣溫的局地平流變化．

由 α 與 β 的定義，我們知道 α 和 β 為正數，因此，(21)和(22)兩式就說明了地面氣壓的局地平流變化與地面氣溫的局地平流變化的符號是相反的．也就是說，對某一地點而言，如果有冷平流的話，則該地的氣壓就將升高；如果有暖平流的話，則該地的氣壓就將降低．

(2)地面的溫度和氣壓系統的平移與等 θ 線的關係——高空引導層的意義：

將(21)、(22)式分別乘以 β 與 α，然後再相加，則得

$$\alpha\left(\frac{\partial T_0}{\partial t}\right)_1 - \beta\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1 = \alpha\beta(T_0, p_0) - \alpha\beta(T_0, p_0) = 0.$$

α、β 在比較短的時間內可以視為常數，則前式可寫為

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha T_0 + \beta p_0) = 0. \tag{23}$$

將(23)式積分，則得

$$\alpha T_0(x, y, t) + \beta p_0(x, y, t) = \theta(x, y) \tag{24}$$

其中 θ 為不隨時間而改變的純量．

由(24)式得

$$\alpha T_0 = \theta - \beta p_0,$$

取上式對於 x 和 y 的偏微分，並將所得的兩式分別乘以 $\frac{\partial p_0}{\partial y}$ 與 $\frac{\partial p_0}{\partial x}$，然得再相減，則

$$\left.\frac{\partial p_0}{\partial y}\right| \quad \alpha\frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} - \beta\frac{\partial p_0}{\partial x},$$

$$\left.\frac{\partial p_0}{\partial x}\right| \quad \alpha\frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} - \beta\frac{\partial p_0}{\partial y},$$

$$\alpha\left(\frac{\partial T_0}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}-\frac{\partial T_0}{\partial y}\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)=\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial p_0}{\partial y}-\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial p_0}{\partial x}.$$

$$\alpha(T_0,p_0)=(\theta,p_0). \tag{25}$$

用類似的方法，我們可以求得

$$\beta(p_0,T_0)=(\theta,T_0). \tag{26}$$

將(25)和(26)兩式的結果代入(21)和(22)兩式，則得

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1=(p_0,\theta), \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial T_0}{\partial t}\right)_1=(T_0,\theta). \tag{28}$$

這兩式告訴我們：在平流的作用下，p_0 與 T_0 場是沿 θ 線而傳播的，而它們的速度等於 $|\nabla\theta|$. 其理由見下.

現在我們僅將(27)式爲例來說明上面所述的結果.(27)式

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1=(p_0,\theta)$$

就是

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1-\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y}+\frac{\partial p_0}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x}=0, \tag{29}$$

而我們知道，在運動學裏求 p_0 等壓線的速度是由下列的方式求得的：

p_0 等壓線的方程爲

$$p_0=p_0(x,y,t),$$

而

$$\frac{dp_0}{dt}=0,$$

卽

$$\frac{dp_0}{dt}=\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1+\frac{\partial p_0}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial p_0}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0,$$

或

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1+v_x\frac{\partial p_0}{\partial x}+v_y\frac{\partial p_0}{\partial y}=0.$$

$$\left(\because v_x=\frac{dx}{dt},\ v_y=\frac{dy}{dt}\right) \tag{30}$$

將(29)與(30)兩式相比較，就得到

$$v_x = -\frac{\partial\theta}{\partial y},\quad v_y = \frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

這就是說，p_0 等壓線速度爲：

$$\bar{v} = -\frac{\partial\theta}{\partial y}\bar{i} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\bar{j},$$

而

$$\nabla\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\bar{j},$$

故

$$\bar{v}\cdot\nabla\theta = \left(-\frac{\partial\theta}{\partial y}\bar{i} + \frac{\partial\theta}{\partial x}\bar{j}\right)\cdot\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\bar{j}\right) = 0.$$

上面的結果說明了 $\bar{v}$ 和 $\nabla\theta$ 互相垂直，所以 p_0 等壓線是沿着 θ 線而傳播的.

在氣壓系統中心，

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0,$$

代入(29)式知：

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}\right)_1 = 0.$$

這就是說氣壓系統中心不因平流的作用而增強或減弱，因而估計氣壓系統中心的發展有賴於第二近似方程.

(3)高空引導層的高度：

氣壓梯度與位勢梯度之間的關係如下：

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_p,\\ -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_p.\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

在常定直減率的斜壓大氣裏，

$$\log p - \log p_0 = \frac{g}{R\gamma}\log\frac{T}{T_0},\tag{32}$$