经济数学基础参考丛书

概率论与数理统计复习与考试指导

区兆丞　郭文英　主编

首都经济贸易大学出版社

概率论与数理统计
复习与考试指导

区兆丞
郭文英　主编

首都经济贸易大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计复习与考试指导/区兆丞，郭文英主编.—北京:首都经济贸易大学出版社,2004.2
(经济数学基础参考丛书)
ISBN 7-5638-1045-5

Ⅰ.概…　Ⅱ.①区…②郭…　Ⅲ.①概率论-应用-经济-高等学校-教学参考资料②数理统计-应用-经济-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.F224.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 003679 号

概率论与数理统计复习与考试指导
区兆丞　郭文英　主编

出版发行	首都经济贸易大学出版社
地　　址	北京市朝阳区红庙(邮编 100026)
电　　话	(010)65976483　65065761　65071505(传真)
E-mail	publish @ cueb.edu.cn
经　　销	全国新华书店
照　　排	首都经济贸易大学出版社激光照排服务部
印　　刷	北京地泰德印刷有限责任公司
开　　本	850 毫米×1168 毫米　1/32
字　　数	275 千字
印　　张	10.75
版　　次	2004 年 2 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数	1～5 000
书　　号	ISBN 7-5638-1045-5/O·24
定　　价	17.00 元

前 言

高等学校招生制度改革后，连年的扩大招生，使越来越多具有不同知识背景的学生走进大学。学生知识水平的差异及其他各种原因导致部分学生在数学学习中遇到较大困难，不及格率有逐年增长的趋势；另外近年来学生考研热情空前高涨，而作为全国统考课程的微积分、线性代数和概率论与数理统计，却成为许多学生考研的主要障碍。为此，我们结合多年来的教学经验并借鉴同类型的其他参考书，根据各类学生在学习数学中的不同问题编写了这套适合经济类专业本(专)科生且兼顾其他非数学专业学生的教学参考书。

本套参考书按教学大纲的要求，突出知识结构，便于学生理解掌握现行教材中所涉及的基本概念、基本理论和基本方法；在此基础上精选典型例题，详细介绍各种解题思路和方法，并配有一定数量的练习题及参考答案；同时结合学生考研的需要，选用部分考研试题进行解析，使学生对考试题型以及深度、广度有一个总体的把握。

本套参考书包括《微积分复习与考试指导》、《线性代数复习与考试指导》、《概率论与数理统计复习与考试指导》三册，适合所有非数学专业的本、专科学生使用。

《微积分复习与考试指导》第1～5章由李宇编写；第6～9章由张惠欣编写；第10章由张广梵编写；李宇任主编。

由于水平所限，错误难免，欢迎读者批评指正。

目　录

1 随机事件及其概率

1.1 基本要求

1. 理解基本事件、随机事件、样本空间的概念，熟练掌握随机事件之间的关系与运算及概率的基本性质。

2. 掌握古典概型概率的计算，能熟练应用乘法公式、全概率公式与逆概率公式计算随机事件的概率。

3. 理解独立性的概念并能熟练应用。

1.2 内容提要

1.2.1 排列与组合

1. 乘法原理：完成一项工作有两个步骤，第一步有 m 种方法，第二步有 n 种方法，则完成此项工作共有 mn 种方法。

2. 加法原理：完成一项工作有两类不同的方法，第一类方法有 m 种方式，第二类方法有 n 种方式，则完成此项工作共有 $m+n$ 种方法。

3. 排列：从 n 个不同元素中任取 m 个(不许重复，$m \leqslant n$)按一定顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中任取 m 个的排列。其排列总数为

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

当 $m = n$ 时，

$$P_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

4. 组合：从 n 个不同元素中任取 m 个(不许重复，$m \leqslant n$)不计顺序构成一组，称为从 n 个不同元素中任取 m 个的组合，其组合总数为

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1.2.2 随机事件

1. 基本事件：随机试验 E 的每一个不可分解的可能结果，称为基本事件，或称为样本点，记为 ω。

2. 随机事件：由基本事件及基本事件复合而成的事件，称为随机事件，简称事件，记为 $A, B, \cdots$。

3. 样本空间：由全体样本点构成的集合，称为样本空间，记为 Ω。

4. 事件之间的关系和运算：

$A \subseteq B$　事件 A 发生则事件 B 发生。

$A \cup B$　事件 A 与 B 至少有一个发生。

$A \cap B$　事件 A 与 B 同时发生，若 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与 B 为互不相容事件（互斥事件）。

$\bar{A}$　事件 A 不发生。

$A - B$　事件 A 发生且事件 B 不发生。

5. 事件之间的运算律：

交换律：$A \cup B = B \cup A \quad AB = BA$

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(AB)C = A(BC)$

分配律：$(A \cup B)C = AB \cup BC$

$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$

对偶公式：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

1.2.3 概率的古典定义

1. 古典概型：假设在一个随机试验中共有 n 个样本点，且每个样本点出现的可能性相同，则称这个随机试验为古典概型。

2. 设在古典概型中共有 n 个样本点，A 为包含其中 m 个样本

点的随机事件，则事件 A 的概率为$P(A)=\frac{m}{n}$，即

$$P(A)=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

1.2.4 概率的性质

1. 对任意事件 A，有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，且$P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$。

2. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

3. 对任一事件 A，有 $P(\bar{A})=1-P(A)$。

4. 设 A,B 为二事件，且 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

5. 设 A,B 为二事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

此公式可推广到任意有限个事件的情形。例如：

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

1.2.5 条件概率及乘法公式

1. 记 A,B 为两事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件 A 发生的条件下事件B 的概率。

2. 乘法公式：设 A,B 两事件，且 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$$

此公式可推广到任意有限个事件的情形，即对任意有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

1.2.6 全概率公式与逆概率公式

1. 全概率公式：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为互不相容事件，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，且 $P(A_i) > 0 (i = 1, \cdots, n)$，则对任意事件 B 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)$$

2. 逆概率公式：若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为互不相容事件，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，且 $P(A_i) > 0 (i = 1, \cdots, n)$，$P(B) > 0$，则

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j) P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

1.2.7 事件的独立性

1. 若 A, B 两事件满足 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立。

2. 若事件 A, B 相互独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

3. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则任意个事件交的概率等于其概率的乘积，即对任意 $k (2 \leqslant k \leqslant n)$ 及任意的 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

1.2.8 贝努里概型

1. n 重贝努里试验：设在随机试验 E 中只有两种可能结果 A 和 $\bar{A}$，且 $P(A) = p (0 < p < 1)$，将 E 独立地重复 n 次，那么这一组试验整个地称为 n 重贝努里试验。

2. n 重贝努里试验中，事件 A 发生 k 次的概率为

$$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

1.3 例题解析

【例 1.1】 设作如下的随机试验：抛掷一枚硬币，若字面朝上，则抛掷第二次；若第一次抛掷是花面朝上，则抛掷一枚骰子。

(1) 列出此随机试验的样本空间 Ω 的各个样本点。

(2) 记 A = “骰子点数小于 4”，列出 A 包含的基本事件。

(3) 记 B = “硬币发生两次花面朝上”，列出 B 包含的基本事件。

解 (1) 若第一次抛掷是字面朝上，则第二次抛掷有两种可能结果：字面朝上，或花面朝上。

若第一次抛掷是花面朝上，则抛掷一枚骰子会有六种可能结果：

$$T_i = \text{“骰子为 } i \text{ 点”} \qquad (i = 1,2,3,4,5,6)$$

记 H = “花面朝上”，Z = “字面朝上”，因此样本空间

$$\Omega = \{ZZ, ZH, HT_1, HT_2, HT_3, HT_4, HT_5, HT_6\}$$

(2)A = “骰子点数小于 4” 表示第一次抛掷必是花面朝上时第二次抛掷骰子点数为 1,2 或 3，因此

$$A = \{HT_1, HT_2, HT_3\}$$

(3)B = “硬币发生两次花面朝上”，而随机试验是第一次抛掷花面朝上时，第二次抛掷骰子，因此不可能出现硬币两次花面朝上，即

$$B = \varnothing$$

注：① 写出样本空间就要先找出基本事件，因此就要找出随机试验的各种可能结果；② 写出随机事件就是找出哪个基本事件出现此随机事件就可以发生了。

【例 1.2】 一批产品中有正品和次品，依次任取 3 件，设 A_i = “第 i 件为正品”($i = 1,2,3$)，试用 A_1, A_2, A_3 表示下列事件：

(1)3 件都是正品；

(2)3 件都不是正品；

(3)3 件不都是正品；

(4)3 件中只有第 1 件是正品；

(5)3 件中恰有 1 件正品；

(6)3 件中至少有 1 件正品；

(7)3 件中至多有 1 件正品。

解 (1)3 件都是正品表示第 1 件为正品且第 2 件为正品且第 3 件为正品，因此表示为 $A_1A_2A_3$。

(2) 表示第 1 件不是正品且第 2 件不是正品且第 3 件不是正品，因此表示为 $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$。

(3) 表示至少有 1 件次品，这件次品可以是第 1 件或第 2 件或第 3 件，因此表示为 $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$。

(4) 表示第 1 件为正品且第 2 件为次品且第 3 件为次品，因此表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$。

(5) 表示有 1 件正品 2 件次品，即第 1 件为正品且第 2，3 件为次品，或第 2 件为正品且第 1，3 件为次品，或第 3 件为正品且第 1，2 件为次品，因此表示为 $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$。

(6) 表示第 1 件为正品或第 2 件为正品或第 3 件为正品，因此表示为 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$。

(7) 表示 3 件都是次品或恰有 1 件正品，因此表示为 $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$。

注：① 随机事件常用“恰好”、“都是”、“都不是”、“不都是”、“至多”、“至少”等词来描述，为了正确地表示出一个随机事件，首先必须弄清楚这些词的含义，然后把语言上的描述和数学符号相统一，例如(1) 中第 1 件为正品且第 2 件为正品且第 3 件为正品 $\Leftrightarrow A_1A_2A_3$，而(3) 中第 1 件为次品或第 2 件为次品或第 3 件为次品 $\Leftrightarrow \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$；② 复杂事件可以通过运算用简单事件来表示。

【例 1.3】 某人在图书馆中任选一本书，设 $A = \{$选到数学书$\}$，$B = \{$选到中文版的书$\}$，$C = \{$选到1970年后出版的书$\}$，问：

(1)$A \cap B \cap \bar{C}$ 表示什么?

(2) 在什么条件下 $A \cap B \cap C = A$?

(3)$\bar{C} \subset B$ 表示什么?

(4) 若 $\bar{A} = B$,则是否意味着馆中所有数学书都不是中文版的?

解 (1)$AB\bar{C}$ = {选到数学书是中文版的且是1970年或1970年以前出版的},即 $AB\bar{C}$ = {选到1970年或1970年以前出版的中文版数学书}。

(2)$A \cap B \cap C = A$ 意味着 $A \subset B \cap C$,$B \cap C$ 表示1970年以后出版的中文版书,因此当馆中所有数学书都是1970年以后出版的中文版书时 $A \cap B \cap C = A$。

(3)$\bar{C}$ = {选到1970年或1970年以前出版的书},因此 $\bar{C} \subset B$ 表示馆内1970年或1970年以前出版的书都是中文版的。

(4)$\bar{A}$ = {选到非数学书},因此 $\bar{A} = B$ 表示馆中非数学书都是中文版的,且中文版的书都不是数学书。

注:① 针对事件之间的关系,要求不仅能将语言描述转化为数学符号,还能将数学符号转化为文字描述;② 两事件 A,B 相等,等价于 $A \subset B$ 且 $B \subset A$。

【例1.4】 证明等式:

(1)$A \cup B = A \cup (B\bar{A})$

(2)$(A - B) \cup (B - A) = \overline{(AB) \cup (\bar{A}\bar{B})}$

(3)$B - A = \overline{AB} - (\overline{\bar{A}B})$

证 (1) 由分配律有

$$A \cup (B\bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = (A \cup B) \cap \Omega = A \cup B$$

(2) 由对偶公式有

$$\overline{(AB) \cup (\bar{A}\bar{B})} = \overline{(AB)} \cap \overline{(\bar{A}\bar{B})} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (A \cup B) = [(A \cup B)\bar{A}] \cup [(A \cup B)\bar{B}] = \text{(由分配律)}$$

$$A\bar{A} \cup B\bar{A} \cup A\bar{B} \cup B\bar{B} = \qquad \text{(由分配律)}$$

$$B\bar{A} \cup A\bar{B} = \qquad (A\bar{A} = \varnothing, B\bar{B} = \varnothing)$$

$$(A - B) \cup (B - A)$$

(3) 由减法性质有

$$\overline{AB} - \overline{(\bar{A}B)} = (\overline{AB}) \cap (\overline{\overline{\bar{A}B}}) = (\overline{AB}) \cap (\bar{A}B) =$$

$$(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A}B) = \qquad \text{(由对偶公式)}$$

$$(\bar{A} \cap \bar{A}B) \cup (\bar{B} \cap \bar{A}B) = \qquad \text{(由分配律)}$$

$$\bar{A}B = B - A$$

注:对于事件之间关系的等式,在证明过程中,一般先对其复杂的一边进行化简。

【例 1.5】 袋中共有 5 只球,其中 3 只红球、2 只白球,试分别按下列方式抽取 2 只:(1) 一次取出;(2) 有放回抽取;(3) 无放回抽取。求所取 2 只同为红球的概率和恰有 1 只红球的概率。

解 设 A = "所取 2 只同为红球"

B = "所取 2 只中恰有 1 只红球"

(1) 一次取出:

随机试验为 5 只球中一次取出 2 只,因此样本空间的样本点总数为 C_5^2。

事件 A 要求取到 2 只红球,由于只能从 3 只红球中取 2 只才能完成 A,因此 A 包含的样本点数为 C_3^2,故

$$P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

事件 B 要求所取 2 只中恰有 1 只红球,也即 1 只红球 1 只白球。因此要完成事件 B 必须分两个步骤:第一步从 3 只红球中取 1 只,第二步从 2 只白球中取 1 只。第一步有 C_3^1 种方式,第二步有 C_2^1 种方法,因此 B 包含的样本点数为 $C_3^1C_2^1 = 3 \times 2 = 6$,故

$$P(B) = \frac{6}{C_5^2} = \frac{3}{5}$$

(2) 有放回抽取(即每次取 1 只球,观察颜色后放回袋中,然后再取下 1 只):

随机试验为 5 只球中有放回地抽取 2 只,而每一次抽取都有 5 种可能,因此样本空间的样本点总数为 $5 \times 5 = 25$。

完成事件 A 只能从 3 只红球中有放回地抽取 2 只,而每一次抽取都有 3 种可能,因此 A 包含的样本点数为 $3 \times 3 = 9$,故

$$P(A) = \frac{9}{25}$$

事件 B 意味着 1 只红球 1 只白球,而完成事件 B 有两种方法:第一种方法为第一次取到红球,则第二次必须取到白球;第二种方法为第一次取到白球,则第二次必须取到红球。第一种方法有 3×2 种方式,而第二种方法有 2×3 种方式,因此 B 包含的样本点数为 $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$, 故

$$P(B) = \frac{12}{25}$$

(3) 无放回抽取(即每取 1 只,不放回袋中,再从袋中取 1 只):

随机试验为 5 只球中无放回抽取 2 只,第一次抽取有 5 种可能,第二次抽取有 4 种可能,因此样本空间的样本点总数为 $5 \times 4 = 20$。

事件 A 包含的样本点数为 $3 \times 2 = 6$,故

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

类似于(2) 中的分析,事件 B 包含的样本点数为 $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$。故

$$P(B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

注:在计算古典概型的概率时,为了得到样本点总数和事件包含的样本点数,必须首先搞清随机试验是什么,然后应用排列组合的知识计算出样本点数。

【例 1.6】 掷骰子 6 次,求所有点数 $1,2,\cdots,6$ 都出现的概率。

解　随机试验为将骰子掷6次，而每次都有6种可能结果，因此样本空间的样本点总数为 $6\times6\times6\times6\times6\times6=6^6$。

设 $A=$"所有点数 1,2,…,6 都出现"，而 1,2,…,6 点均出现一次相当于把 1,2,…,6 按一定顺序排成一列，因此 A 包含的样本点数为 6!，故

$$P(A)=\frac{6!}{6^6}\approx0.0154$$

注：计算样本点数时一定要分清随机试验中样本点是否是可以重复排列的，是有顺序的还是无顺序的。

【例 1.7】 房间中 10 个人，分别佩戴着从 1 到 10 号牌，现等可能地从中任选 3 人，记录其号码。

(1)$A=$"最大号码为 5"，求 $P(A)$；

(2)$B=$"最小号码为 5"，求 $P(B)$。

解　随机试验为 10 个人中任选 3 人，因此样本空间的样本点数为 C_{10}^3。

完成事件 A 意味着 5 号必须选到，其他两人从 1,2,3,4 号中选取，因此 A 包含的样本点数为 C_4^2。故

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$$

完成事件 B 意味着 5 号必须选到，其他两人从 6,7,8,9,10 号中选取，因此 B 包含的样本点数为 C_5^2。故

$$P(B)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$$

注：一定要弄清楚什么叫完成一随机事件，什么样条件下才完成了一个随机事件。

【例 1.8】 10 个人中包括 A,B 两人，随机排成一列，求"A,B 之间恰有 4 人"的概率。

解　设 $C=$"A,B 之间恰有 4 人"。随机试验为 10 人随机排成一列，是有顺序的，因此样本点总数为 10!。

事件 C 意味着A,B间恰有4人,但没限定A,B的前后位置,因此A,B两人的排法就有2种。若A在前,则A只能占第1到第5号位置,相应地B的位置就确定了。因此共有5种可能,其余8人分别排在剩下的8个位置上,共有8!种排法。因此 C 包含的样本点数为 $2\times 5\times 8!$,故

$$P(C)=\frac{10\times 8!}{10!}=\frac{1}{9}$$

注:也可这样考虑事件 C,即从除去A,B的剩下8人中选4人与A,B两人看成一组与剩下的4个位置做排列,共有5!种结果。而8人中选4人共有 C_8^4 种方法,这4人也存在一个排序共有4!种排法。A,B两人又有2种排法,因此 C 包含的样本点数为 $C_8^4\times 4!\times 2\times 5!$。

【例1.9】一架电梯开始时有6位乘客并等可能地停于10层楼的每一层,求下列事件的概率:

(1) 指定某一层有两位乘客离开;

(2) 没有2位及2位以上的乘客在同一层离开;

(3) 恰有2位乘客在同一层离开;

(4) 至少有2位乘客在同一层离开。

解　随机试验为6人随机等可能地离开10层楼的每一层,每个人都可在10层的某一层离开,因此样本点总数为 10^6。

(1) 设 A =“某一层有两位乘客离开”,完成事件 A 就要首先选取两位乘客,然后让剩下4人在其余的9层离开,因此 A 包含的样本点数为 $C_6^2 9^4$,故

$$P(A)=\frac{C_6^2 9^4}{10^6}=0.1$$

(2) 设 B =“没有2位及2位以上乘客在同一层离开”,也即6个人在不同的层离开,因此 B 包含的样本点数为 P_{10}^6,故

$$P(B)=\frac{P_{10}^6}{10^6}$$