极限浅说

（增訂本）

高揚芝編著

江苏人民出版社

·内容提要·

这本书介紹了实数的性质，序列的极限，变量的极限，函数的极限，最后介紹微商及定积分的概念，可供初学者一些极限論的初步知識，以巩固中学平面几何課程及高中代数課程关于极限的知識，並帮助学习数学分析。

极限浅說

（增訂本）

高揚芝編著

＊

江苏省书刊出版营业許可証出〇〇一号

江苏人民出版社出

南京湖南路十一号

江苏省新华书店发行　南京前进印刷

＊

开本 787×1092 耗 1/32　印張 4 11/16　字数

一九五六年二月第一版

一九五九年五月南京第五次印刷

印数 21,651—29,650

統一书号：13100·7

定　价：(10) 七角五分

前　言

極限的理論是微積分学的理論基礎，而微積分学是研究近代科学技術不可少的工具。在中学平面幾何課程裏及高中代數課程裏都很重視極限的概念，數学分析教本一般都把極限論放在首要的地位，这就顯示了極限的理論在數学上的重要性。因此愛好科学技術的青年都希望掌握这种知識。目前有些數学書籍对極限論講解还不够詳細，有些書籍又講解得过於艰深，使初学的青年不容易理解極限的精神实質，以至覺得微積分学高深莫測，因而他們对这把科学的鑰匙——數学，覺得很难掌握。

在 2000 年前，莊子天下篇引惠施語“一尺之捶，日取其半，万世不竭”，就是把一尺長的捶第一天截取半尺餘半尺，第二天从第一天所剩的$\frac{1}{2}$尺截取$\frac{1}{4}$尺，餘$\frac{1}{4}$尺，第三天从第二天所剩的$\frac{1}{4}$尺截取$\frac{1}{8}$尺，餘$\frac{1}{8}$尺，……第 n 天从第 n-1 天所剩的$\frac{1}{2^{n-1}}$尺截取$\frac{1}{2^n}$尺，餘$\frac{1}{2^n}$尺。n 無論如何大總要餘下$\frac{1}{2^n}$尺，所以万世取不完。但是所剩的逐日減少，意味着所剩的捶趨近零而不達到零。这就是極限的概

念。因为当時生產技術落後，不需要更多的極限知識，所以極限理論得不到發展。在紀元前580年希臘幾何家畢達哥拉斯已知道夾直角兩边的長是1的直角三角形弦長与边長是不可公度的。在紀元前287年希臘數学家亞奇默德利用圓內接正多边形的周長求圓周長。在公元263年我國數学家刘徽註九章算術，載有求圓周以圓內容六边形起算，謂："割之彌細，所失彌少；割之又割，以至不可割，則与圓周合体而無所失矣"，就是說，計算圓周可从圓內接正六边形入手計算，然後增为十二边形，再增为二十四边形，这样倍增边數，增了再增，一直到不能再增（这句話是不对的，因为边數可以永久增加），那麼，正多边形就与圓周相合了，以多边形的周長代替圓周的長也就沒有什麼差誤了（嚴格說來，差誤永久存在，边愈多，差誤愈小）。在这些实际問題中，已有極限概念的萌芽；但尚沒有明確的敍述，更沒有嚴密的具体的科学理論系統。

英國物理学家牛頓在公元1687年發現微分学。他对極限的概念还很模糊。他意識着某些無窮小量退縮为在零後面的第一个數（这是不对的，因为实數是不可排列的，詳見本書第六章），当時很多学者認为牛頓的微分学是兩个微小量的比值，而这兩个微小量最後退縮为概念模糊的小數，这是暗晦不可知的。在这時，微分学的理論遭到嚴厲的批評，甚至是嘲笑和譏諷；然而微分的方法是經得起实际的考驗的，因为用它解决力学的問題是無往而不利的。十九世紀初，數学家哥西等人建立了嚴格的極限理論，他們指出牛頓微分学

中的兩个微小量，特別着重地指出作分母的微小量不退縮为零，而是無限制地趨於零。这样就奠定了微分学的基礎，明確了微分学的正確性。

为了从实际出發，这本小册子在介紹微商概念之前，先介紹直綫运動的瞬時速度及不均勻物体的密度；在介紹定積分概念之前，先介紹閉曲綫所包圍的面積及密度不均勻的物体的質量。通过这些物理問題，一方面引出極限与生產实踐的關係，另一方面为初学者在認識微商及定積分之前打下辯証唯物观點的基礎。

从以上各方面的敍述，說明了極限論的產生完全出自实际需要，它由不完整的萌芽發展到嚴密的理論是通过歷代數学家的創造性劳動。这些宝貴的成果，滿足了实际迫切的要求，建立了數学分析的科学基礎，从而更有效的指導近代科学技術的進步。

这本小册子敍述極限的理論，从刘徽的割圓術及無理數的表達很自然地介紹序列和它的極限。又由無意义代數式的研究，使初学者認識变數为什麼要依序取某个序列的數值趨近某常數而不等於某常數（这些都是極限的精神实質）。由这些感性認識，不僅指明了我們为什麼要研究極限的理論，並且尋求出研究極限的道路和方法。

通过一系列的实际問題，使初学者对極限有了初步的感性認識，然後引導他們認識实數的性質，序列的極限，变量的極限，函數的極限，最後介紹微商及定積分的概念。这样形成一种自然的順序，使讀者較易理解。眞正的科学，是根

据实际發展，透过現象，研究本質，作理論的總結，再通过理論更好地指導实际，極限論正是循着这程序發展。寫这本小册子的目的，就是供給初学者一些極限論的初步知識，以鞏固中学平面幾何課程及高中代數課程關於極限的知識，並帮助学習數学分析。但作者限於水平和能力，很难符合客观要求，其中不妥之处，希望讀者多予指正。

高揚芝　一九五五年十一月

目　　　錄

第一章　初等數学与極限的關係

一　求圓的周長和面積

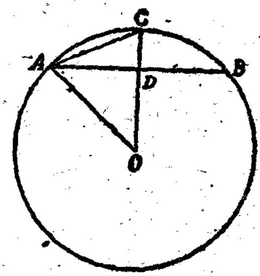
每一个已知圓顯然有它的周長和面積，並且周長和面積都与圓的半徑有密切的關係，即半徑愈大，周長亦愈大，面積亦愈大。但是正確地求出周長和面積，自古以來就是相当困難的問題。紀元前 287 年希臘數学家亞奇默德及公元 263 年我國數学家刘徽先後独立地發現用圓內接正多边形求圓的周長和面積。由於这个实际問題，很自然地引入序列和極限。直到今天我們求圓周長和面積，基本上沒有越出这个範疇。

現在敍述用圓內接正多边形求圓的周長和面積。

預备命題 I

已知一个圓的內接正多边形一边的長，求它的二倍边數的內接正多边形一边的長。

〔解〕　設已知圓的半徑是 r，它的內接正 n 边形一边的長是a_n，它的內接正 2n 边形一边的長是a_{2n}，如第一圖所示：



第　一　圖

$AB = a_n \qquad AC = a_{2n} \qquad OA = OC = r$

由平面幾何定理知:

$$OD \perp AB$$

由直角三角形 ADC 知:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

由直角三角形 ADO 知:

$$\overline{OD}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AD}^2 = r^2 - \frac{1}{4}a_n^2$$

又因 $\qquad DC = r - OD$

故 $\overline{DC}^2 = (r - OD)^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_n^2}\right)^2 \cdots (2)$

將式 (2) 中 $\overline{DC}^2$ 的等值代入式 (1) 中得:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_n^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}a_n^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_n^2}\right)^2$$

$$= 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_n^2}$$

$$= r\left(2r - \sqrt{4r^2 - a_n^2}\right)$$

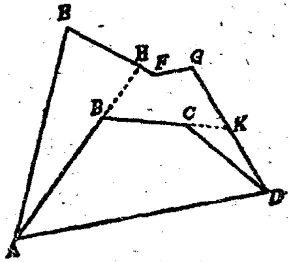
故 $\qquad a_{2n} = \sqrt{r\left(2r - \sqrt{4r^2 - a_n^2}\right)}$

預备定理 1

凸折綫小於包圍它的任何折綫,

〔設〕 ABCD 为凸折綫，被折綫 AEFGD 所包圍。

〔求証〕 $AB+BC+CD<AE+EF+FG+GD$



第二圖

〔証〕 延長 AB 交 EF 於 H，又延長 BC 交 GD 於 K。

在 △AEH 中，$AH<AE+EH$

故 $AB+BH<AE+EH$ ⋯(1)

在折綫 BHFGK 中 $BK<BH+HF+FG+GK$

故 $BC+CK<BH+HF+FG+GK$ ⋯⋯⋯⋯⋯(2)

在 △CKD 中 $CD<CK+KD$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯(3)

(1)+(2)+(3) 得:

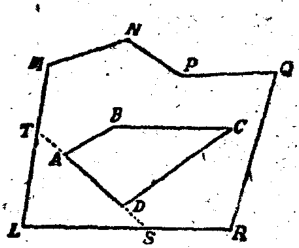
$$AB+BH+BC+CK+CD<AE+EH+BH+HF+FG+GK+CK+KD$$

不等式兩端減去 $BH+CK$ 得:

$$AB+BC+CD<AE+EF+FG+GD$$

預备定理 2

凸多边形的周長小於包圍它的任何多边形的周長。



第三圖

〔設〕 ABCD 是一个凸多边形，它被多边形 LMNPQR 所包圍。

〔求証〕 $AB+BC+CD+DA<LM+MN+NP+PQ+QR+RL$

〔証〕 延長 AD 分别交 LM 和 LR 于 T 和 S。

由預备定理 1 得:

$$AB+BC+CD<AT+TM+MN+NP+PQ+QR+RS+SD \cdots\cdots (1)$$

在 ΔTSL 中 $TS<LT+SL$

又因 $TS=TA+AD+DS \cdots\cdots (2)$

故 $TA+AD+DS<LT+SL \cdots\cdots (3)$

(1)+(3) 得:

$$AB+BC+CD+TA+DA+DS<AT+TM+MN+NP+PQ+QR+RS+SD+LT+SL$$

以上不等式兩边各減去 $AT+DS$ 得:

$$AB+BC+CD+DA<(LT+TM)+MN+NP+PQ+QR+(RS+SL)$$

$$AB+BC+CD+DA<LM+MN+NP+PQ+QR+RL$$

推論 1

圓內接正 2n 边形的周長大于同圓內接正 n 边形的周長。

〔証〕 因圓內接正 2n 边形可以包圍同圓內接正 n 边形。

推論 2

任何圓外切多边形的周長大于同圓的任何內接多边形的周長。

〔証〕 因圓外切多边形包圍同圓內接多边形。

現在我們來計算半徑是一个單位長的圓周長及面積，按照刘徽的办法，从内接正六边形起算。

已知 $a_6=1 \qquad r=1$

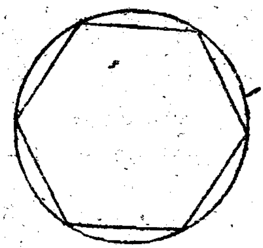
由預备命題 1 得：

$$a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$a_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$a_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}})}}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \text{ 等等}$$



第四圖

把所計算的結果列表如下：

a_n 表一边的長，n 表边数，na_n 表周長，$\sqrt{1-(\frac{a_n}{2})^2}$ 表边心距，$\frac{1}{2}\cdot na_n\cdot\sqrt{1-(\frac{a_n}{2})^2}$ 表 n 边形面積。

n	a_n	na_n	$\sqrt{1-(\frac{a_n}{2})^2}$	$\frac{1}{2}\cdot na_n\cdot\sqrt{1-(\frac{a_n}{2})^2}$
6	1.00000000	6.00000000	0.86602540	2.59807620
12	0.51763809	6.21165708	0.96592065	2.99998432
24	0.26105238	6.26525722	0.99735163	3.12433224
48	0.13080626	6.27870041	0.99787072	3.13266554
96	0.06543817	6.28206396	0.99946458	3.13935021
192	0.03272346	6.28290510	0.99986613	3.14003189
384	0.01636228	6.28311544	0.99999489	3.14154284
768	0.00818126	6.28316941	0.99999849	3.14157997
……	……………	……………	……………	……………

〔附註〕 如果半徑是 r，边長、周長为表上數値乘 r，面積为表上數値乘 r^2。

从上表可以看出下列的事实：

1.一边的長随着边数的增加而逐漸減小（趋向零而不能达到零）。

2.周長随着边数的增加而逐漸增大，但不会超过外切正方形的周長8。

3.边心距随着边数的增加而逐漸增大，但不会超过半徑的長 1。

4.面積随着边数的增加而逐漸增大 但不会超过外切正方形的面積 4。

表上所列的五行数字，都是序列的例子。第一行是遞增序列，愈下愈大。第二行是遞減序列，愈下愈趋向零。第三行是遞增序列，但不超过 8。第四行是遞增序列，但不超过 1。第五行是遞增序列，但不超过 4。

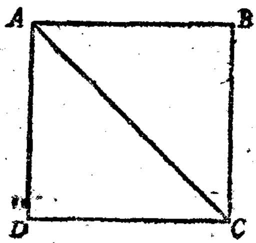
若將表中所列的周長除以2，就是圓周率的近似値。由內接正768边形的周長除以2，得圓周率的近似値3.14158470。刘徽用內接正 1536 边形的周長除以 2，得圓周率的近似値为 3.1416。

从上例可以知道，我們要計算圓周長及圓面積，就必須追究表上第三行及第五行最后的値是什么。但边数不断地增加，永久沒有最后的値，所以第三行及第五行亦沒有最后的値。由直观可以看出，第三行趋近于圓周長，第五行趋近于圓面積。我們就說第三行的極限是圓周長，第五行的極限是圓面積。这个例子說明了圓周長和圓面積与序列及極限有密切的关系。

〔附註〕 序列及極限將於第四章內詳細講述。

二 求邊長為1的正方形的對角綫

因为正方形 ABCD 的对角綫 AC 正好將正方形分成兩个全等的等腰直角三角形 ABC 及 ADC，所以正方形的对角綫就是夾直角边長为1的等腰直角三角形的斜边。按商高定理得：



第五圖

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

現在AB=BC=1，故 $\overline{AC}^2=2$。在代數裏可以証明：在有理數域中，不能求得一个數使它的平方等於 2。

我們可以計算 AC 長度的不足近似值，使这些近似值依次精確到：0.1，0.01，0.001……………

这樣無限的計算下去，每次的精確程度都增加一个小數位。由这个过程所得出來的數依次是一位、二位、三位……………，以至於無窮多的位；但不是循环小數，因为循环小數都可化成有理數。同样亦可計算 AC 長度的过剩近似值。如用 $\sqrt{2}$ 表示 AC 的長，計算結果如下：

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$
$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$
$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$
$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$$