经济数学基础之一

微积分学习与解题指导

主　编　程从沈　张良
副主编　张毅　刘玉蓉

中国人民大学出版社

经济数学基础之一

微积分学习与解题指导

主　编　程从沈　张　良
副主编　张　毅　刘玉蓉

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习与解题指导/程从沈,张良主编.
北京:中国人民大学出版社,2001
(经济数学基础之一)

ISBN 7-300-03899-9/O·46
Ⅰ.微…
Ⅱ.①程… ②张…
Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 065345 号

经济数学基础之一

微积分学习与解题指导

主　编　程从沈　张　良

副主编　张　毅　刘玉蓉

出版发行:中国人民大学出版社
　　　　(北京中关村大街 31 号　邮编 100080)
　　　　邮购部:62515351　门市部:62514148
　　　　总编室:62511242　出版部:62511239
　　　　E-mail:rendafx@public3.bta.net.cn
经　　销:新华书店
印　　刷:北京东方圣雅印刷有限公司

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:11.25
2001 年 9 月第 1 版　2002 年10月第 2 次印刷
字数:260 000

定价:16.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

前 言

经济数学基础是教育部指定的财经类本科专业的核心课程之一。它包括“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门具体课程。在多年教学实践中，我们体会到，财经类的同学普遍感到做数学题较困难，而不做习题又能学好数学的想法只能是异想天开。同时，现在的大学生课程多，时间紧，还要应付各种过级考试，没有更多的精力大量演题。因此，我们编写了这本学习与解题指导，旨在帮助学生通过选做较少的有典型意义的习题，使解题能力迅速提高，并且很好地掌握基本概念、基本理论及基本运算技能，从而收到较好的学习效果。

本书内容共分九章，每章均包含基本要求及学习重点，主要内容的理解与剖析，典型例题解析，习题及解答四部分内容。作为一本辅助教材，指明要点、强化练习是本书的特点。本书可以与国家教育部指定的优秀教材，如中国人民大学出版社出版的《微积分》配合使用。当然，也可以作为其他各类社会办学的本科层次，特别是专升本考试的学习用书或参考书。

参加本书编写的有张毅(第一章)、李艳娟(第二章)、

马丽萍(第三章)、程从沈(第四章)、刘玉蓉(第五章)、张良(第六章)、金光成(第七章)、孟丽红(第八章)、赵春昶(第九章)。

本书在编写过程中得到了蔡生、王欣、尹绍平等各位教授的热情帮助,在出版过程中得到陈林先生和郭凯先生的大力支持。全体编者在此向他们表示深深的谢意。

由于编者水平有限,书中的缺点和错误一定不少,欢迎读者批评指正。

编者

2001年6月1日

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　　录

第一章 函数

一、基本要求及学习重点

(一) 基本要求

1.理解实数绝对值的概念，掌握解简单绝对值不等式的方法.

2.理解函数的定义，会求函数的定义域与值域.

3.掌握函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等性质.

4.深刻理解复合函数的概念，知道构成复合函数的条件，熟练掌握将复合函数分解成较简单函数的基本方法.

5.掌握基本初等函数的定义、定义域、基本性质和图像特征.

6.理解初等函数的概念，会判别非初等函数.

7.会建立应用问题的函数关系式，掌握经济学中常用的成本函数、收益函数、利润函数等.

(二) 学习重点

1. 函数的概念.

2. 分段函数的对应关系及图形画法.

3. 反函数及复合函数构成的条件.

二、主要内容的理解与剖析

(一) 绝对值与邻域

实数与数轴上的点是一一对应的.

一个实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

绝对值常用的基本性质有:

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|;\ |x+y|\leqslant|x|+|y|;$$

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|$$

常用的区间有:(a,b),$(a,b]$,$[a,b)$,$[a,b]$,$[a,+\infty)$,$(-\infty,b]$,$(-\infty,+\infty)$ 等.

以 x_0 为中心,长度为 $2\delta(\delta>0)$ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域. 点 x_0 为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,称 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的空心邻域. 表示成不等式为:$0<|x-x_0|<\delta$.

(二) 函数的概念

函数是高等数学研究的主要内容,深刻理解函数定义很重要.

设两个变量 x 与 y，如果 x 在它的变化范围 I 内取每一个值时，y 按照一对应规律 f 有惟一确定值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记做 $y = f(x), x \in I$. 这里 x 是自变量，y 为因变量，x 的变化范围 I 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域.

函数的定义域，函数关系构成函数的两要素. 通常用列表法、图像法、公式法表示函数. 函数的定义域是自变量 x 的合理取值范围，例如分式函数分母不能为 0，开偶次方根的被开方因式不能为负数等，另外还应由所给出的实际问题来分析、判断.

关于分段函数，在学习中应格外注意，分段函数是指对其定义域内自变量 x 的不同值，需要由两个或两个以上的式子来表示其对应规则. 因为其定义域是由几部分组成的，因此其函数值的确定要按所给定义结构来求得. 分段函数作为函数的一种重要形式，应注意其应用.

(三) 关于函数的简单性质

对函数的讨论，往往归结于其性质的研究. 函数的简单性质指单调性、奇偶性、周期性与有界性，通过对函数性质的研究，可以对函数有更深刻的认识.

1. 函数的单调性.

设 $y = f(x)$ 是定义在区间 (a, b) 内的函数，x_1, x_2 是属于区间上任意两点，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $y = f(x)$ 于 (a, b) 内是递增函数；当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $y = f(x)$ 于 (a, b) 内是减函数，递增函数与递减函数统称为单调函数.

· 应注意：若 $f(x)$ 在其整个定义区间上单调，则称它为单调函数，否则，为非单调函数.

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

2. 有界性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，数集 $X \subseteq I$，如果存在与 x 无关的常数 $M>0$，使对于任意的 $x \in X$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $y=f(x)$ 在 X 上有界，否则称之为无界. 如果 $y=f(x)$ 在其整个定义域 D 上有界，则称 $f(x)$ 为有界函数.

函数 $y=f(x)$ 有界，这种界不惟一，另外函数是否有界与对应数域有关.

3. 奇偶性.

设函数 $y=f(x)$ 定义在区间 I 上，I 关于原点对称（即若 $x \in I$，则必有 $-x \in I$），如果对任意 $x \in I$，有 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 在 I 上为偶函数；如果对于任意 $x \in I$，有 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为 I 上奇函数.

注意以下两点：

(1) 讨论函数的奇偶性的前提必须是定义域 I 为对称区域；由于奇函数图像关于原点对称，偶函数图像关于 y 轴对称，故借助函数奇偶性作图有时很方便.

(2) 同一对称域上的奇偶函数具有一些“运算法则”，如偶函数与偶函数的和仍为偶函数，奇偶函数之积为奇函数等，在实际应用中有一定意义.

4. 周期性.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在一个正数 l，使得对于任意的 $x \in I$，有 $(x \pm l) \in I$. 且 $f(x \pm l)=f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 为 I 上的周期函数，$\pm l$ 为它的周期. 注意到，通常所说的周期是指最小正周期；也有的周期函数没有最小正周期，即无周期，一般地，对于周期函数，只研究一个周期内函数的性态，便可推延到整个定义域上去.

(四) 反函数

函数 $y = f(x)$ 是单调函数时才具有反函数. 并记做 $y = f^{-1}(x)$. 应注意, 互为反函数的两个函数之间的定义域、值域的对应关系, 并且它们的图像是关于 $y = x$ 为对称的. 特别注意四个反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ 是在对 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 的定义域分别规定了主值区间才加以定义反函数的.

(五) 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域 $I(f)$, 若函数 $u = \varphi(x)$ 的值域 $Z(\varphi)$, 且 $Z(\varphi) \cap I(f)$ 非空, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 为复合函数. x 为自变量, y 为因变量, u 为中间变量.

正确理解复合函数的意义在于: 可以将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成, 便于对函数的研究. 还有, 不是随便两个函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 都可以复合成 $y = f[\varphi(x)]$ 的, 能够复合的充分条件是两者的对应取值部分为交集非空. 注意复合函数只是函数的一个形式, 不是新的函数类型.

(六) 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数和常值函数统称为基本初等函数. 对于它们的定义域, 值域及图形应准确掌握, 可以结合反函数的定义对照学习.

(七) 初等函数

初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的可用一个式子表达的函数.

由于分段函数是按其自变量取值范围不同而有不同的表达

式,因此分段函数不是初等函数.

另外,常用 $C(x),R(x),L(x)$ 分别表达经济学中的成本函数、收益函数和利润函数,它们之间有以下公式:

$$L(x)=R(x)-C(x).$$

三、典型例题解析

(一) 客观题

1.是非题.

【例1】 若 $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$,$g(x)=x$,则 $f(x)=g(x)$.

解 非.$f(x)$ 的定义域$\{x \mid x\neq 0\}$,而 $g(x)$ 的定义域 $x\in\mathbf{R}$.两者定义域不同.故 $f(x)\neq g(x)$.

【例2】 所有周期函数都有最小周期.

解 非.例如 $y=c$ 函数无最小周期.

【例3】 若 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数,则 $f(x)\equiv 0$.

解 是.由 $f(x)=f(-x)=-f(x)$,可推得 $f(x)=0$.

【例4】 单调递增函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 仍是单调递增函数.

解 是.假设 $x=\varphi(y)$ 不是递增的,则至少存在 y_1 和 y_2,对于 $y_1<y_2$ 时,有 $x_1=\varphi_1(y_1)\geqslant\varphi(y_2)=x_2$.即 $x_1>x_2$ 时,有 $y_1=f(x_1)<f(x_2)=y_2$,或当 $x_1=x_2$,有 $y_1=f(x_1)<f(x_2)=y_2$.均与已知矛盾.

2.填空题.

【例1】 设 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$,考虑有界性,则 $f(x)$ 为______,并且有 $|f(x)|\leqslant$ ______.

解　第一空填有界，第二空填$\frac{1}{2}$.

根据不等式 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ 可知

$$1+x^2 \geqslant 2x$$

因此　$|f(x)| = \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$.

【例 2】　函数 $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$ 的定义域区间是______.

解　定义域区间是$[1,+\infty)$.

由 $x-\sqrt{x} \geqslant 0$ 及 $x \geqslant 0$ 可解出 $x \geqslant 1$.

【例 3】　设 $f(x)=\sqrt[n]{1-x^n}\,(x>0)$，则 $f[f(x)]=$______.

解　应填 x.

将 $f(x)=\sqrt[n]{1-x^n}$ 代入 $f(x)$ 中 x 位置即可.

【例 4】　函数 $y=\arctan(x^3)$ 的图形关于______对称.

解　应填原点.

由 $y=\arctan(x^3)$ 具有 $f(-x)=-f(x)$，知其为奇函数.

3. 选择题.

【例 1】　函数 $y=\arcsin e^x$ 的定义域是(　　).

(A)$x>1$　　(B)$x<1$

(C)$x<0$　　(D)$x \leqslant 0$.

解　选(D).

由 $y=\arcsin e^x$，知 $-1 \leqslant e^x \leqslant 1$，故 $x \leqslant 0$.

【例 2】　下列函数中(　　)是基本初等函数.

(A)$y=x^2+\sin x$　　(B)$y=x$

(C)$y=\begin{cases}4x, & x>0\\ -4x+1, & x<0\end{cases}$　　(D)$y=\cos\sqrt{x}$

解　选(B).

$y=x$ 为幂函数，而其余均不是基本初等函数.

【例 3】 若 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$,则 $f(x)=($ $)$.

(A)x^2 (B)x^2-2

(C)x^2+2 (D)$\frac{x^2+x^4}{1+x^4}$

解 选(B).

由 $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$,

故 $f(x)=x^2-2$.

【例 4】 下列函数中在其定义域内有单值反函数的是( ).

(A)$y=x^2$ (B)$y=\sin x$

(C)$y=2x+1$ (D)$y=2x^2-1$

解 选(C).

由于 $y=2x+1$ 是单值映射关系,而其余三函数非一一对应,故选(C).

(二) 计算题

【例 1】 求 $y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin(\frac{1}{2}x-1)$ 定义域.

解 此函数是函数$\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$与函数 $\arcsin(\frac{1}{2}x-1)$ 的和,其定义域应为两函数的交集.

对于函数$\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$,由 $2-x^2>0$ 得 $|x|<\sqrt{2}$.因此其定义域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

对于函数 $\arcsin(\frac{1}{2}x-1)$,由 $|\frac{1}{2}x-1|\leqslant 1$,得 $0\leqslant x\leqslant 4$,其定义域为$[0,4]$.

故函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin(\dfrac{1}{2}x-1)$ 的定义域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cap[0,4]=[0,\sqrt{2})$.

【例 2】 设 $f(u)=\sqrt{4-u^2}$, $u=\varphi(x)=x+1$,求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解 $f(u)$ 的定义域为 $|u|\leqslant 2$;$\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,由 $|u|=|x+1|\leqslant 2$,得 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[-3,1]$

【例 3】 已知 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$, 求 $f(x-2)$, $f(-x)$.

解

$$f(x-2)=\begin{cases}1+(x-2), & x-2<0\\ 1, & x-2\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x-1, & x<2\\ 1, & x\geqslant 2\end{cases}.$$

$$f(-x)=\begin{cases}1-x, & -x<0\\ 1, & -x\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}1-x, & x>0\\ 1, & x\leqslant 0\end{cases}.$$

【例 4】 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $e^x+1=u$,解得 $x=\ln(u-1)$,因 $u-1>0$,原式成为 $f(u)=e^{2\ln(u-1)}+e^{\ln(u-1)}+1=(u-1)^2+(u-1)+1=u^2+u+1$,将 u 换成 x,取得 $f(x)=x^2-x+1$.

【例 5】 已知 $f(\tan x+\dfrac{1}{\tan x})=\tan^2 x+\dfrac{1}{\tan^2 x}+3$, $x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 及 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 若令 $\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=u$,反解 x 较繁,可直接将所给表达

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com