高/等/学/校/适/用/教/材

工科数学分析教程

下册

孙振绮
(乌克兰) О.Ф.包依丘克 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高 等 学 校 适 用 教 材

工科数学分析教程

下 册

主　编　孙振绮　（乌克兰）О. Ф. 包依丘克
副主编　丁效华　金承日

机 械 工 业 出 版 社

本书是以教育部（原国家教委）1995 年颁布的高等工科院校本科高等数学课程教学基本要求为纲，广泛吸取国内外知名大学的教学经验而编写的工科数学分析课程教材。

《工科数学分析教程》上册共 8 章：实数，数列的极限，函数的极限与连续性，导数及其应用，不定积分，定积分，广义积分，定积分的应用。下册共 7 章：多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，数项级数，函数项级数，傅里叶级数，常微分方程。每章都配有大量的例题与典型计算题，便于自学。

本书可作为工科大学本科生的数学课教材，也可供准备报考工科硕士研究生的人员与工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工科数学分析教程．下册/孙振绮等主编．—北京：机械工业出版社，2003.7

高等学校适用教材

ISBN 7-111-12230-5

Ⅰ．工…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．数学分析—高等学校—教材　Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 038583 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：韩雪清　郑　丹　版式设计：冉晓华　责任校对：董纪丽

封面设计：鞠　杨　　　　责任印制：路　琳

北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5・14.375 印张・557 千字

0 001—4 000 册

定价：32.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

前　言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法。为此，我们进行了十多年的教学改革实践。先后在哈尔滨工业大学、黑龙江省教委立项，长期从事《高等数学教学过程的优化设计》课题的研究，该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学成果一等奖，本教材正是这一研究成果的最新总结。

本教材在编写上广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）等的教学改革经验，提高了知识的起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养。具体的，①加强对传统内容的理论叙述（增加了某些理论的证明）；②适当运用近代数学观点来叙述古典微积分的内容，加强了对重要的数学思想方法的阐述；③加强了与复变函数论，数学物理方程，微分几何学，线性代数与几何等课程内容的相互渗透；④把精选教材内容与编写典型计算题有机地结合起来。从而加强了知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具有较高的系统性和逻辑性，使学生能从整体知识结构上掌握知识的共同本质和内在联系。

此外，我们认为，必须把教师与学生、内容与方法、教学活动看作是教学过程中三个有机联系的整体，教学必须实现传授知识与培养学习能力、发挥教师主导作用与调动学习积极性的结合。为此，教材的编写上注意运用启发式教学，有利于教师组织教学过程，充分调动学生学习的积极性，不断地引导学生进行深入思维。

本书可供工科大学自动控制、计算机、工程物理等数学要求较高的专业本科生使用。按大纲讲授需198学时，全讲需230学时。

本书是根据哈尔滨工业大学与乌克兰人民科技大学的合作协议确定的合作项目而编写的，并得到了教育部哈尔滨工业大学工科数学教学基地的资助。

这里，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意。

本书由孙振绮、（乌克兰）О.Ф. 包依丘克任主编，丁效华、金承日任副主编。参加本书编写的还有哈尔滨工业大学（威海）数学教研室邹巾英、孙建邵、李福梅、杨毅、伊晓东、林迎珍、李宝家、于淑兰等。崔明根、刘铁夫、文松龙三位教授分别审阅了教材的各个部分内容，提出了许多宝贵意见。

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正！

编者

记号与逻辑符号

符　号	表示的意义
$\vee$	或
$\wedge$	和
$\exists$	“存在”或“找到”
$\forall$	“对任何”或“对每一个”
:	使得
$\Leftrightarrow$	等价，充分且必要，当且仅当
$A \to B$	由 A 得到 B
$f: A \to B$	f 是从集合 A 到集合 B 的映射
$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{Q}$	有理数集合
$\mathbf{J}$	无理数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$x \in A$	x 是集合 A 的元素
$A \subset B$	集合 A 是集合 B 的子集
$\sup\limits_{x \in X} \{x\}$	集合 X 的上确界
$\inf\limits_{x \in X} \{x\}$	集合 X 的下确界
$C = A \cup B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的并集
$C = A \cap B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的交集
$x \in A \cup B$	或 $x \in A$ 或 $x \in B$
$x \in A \cap B$	$x \in A$ 且 $x \in B$
$C = A \setminus B$	C 是集合 A 与集合 B 的差集
$x \in A \setminus B$	$x \in A$，但 $x \notin B$（x 不属于 B）
$f \in C([a, b])$	f 属于在 $[a, b]$ 上连续的函数类
$f \in C^1([a, b])$	f 属于在 $[a, b]$ 上具有连续导数的函数类
$f \in R([a, b])$	f 属于在 $[a, b]$ 上黎曼可积的函数类

目　　录

第 9 章　多元函数微分学

9.1　$\mathbf{R}^n$ 空间

9.1.1　测度空间

如果对于集合 X 的每一对元素 x 与 y，都有一个非负实数 ρ（x，y）与之相对应，且对集合 X 的任意元素 x，y，z 都满足下列条件：

（1）$\rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y$

（2）$\rho(x, y)=\rho(y, x)$

（3）$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z)+\rho(z, y)$（三角不等式）

则称 $\rho(x, y)$ 是元素 x 与 y 之间的距离，而称 X 为测度空间.

我们称测度空间的元素为点，而称定义在测度空间 X 的点对集合上的函数 $\rho(x, y)$为测度，而条件（1）～（3）为测度公理.

如在 $\mathbf{R}$ 内定义 $\rho(x, y)$：设 $\alpha \in \mathbf{R}$，$\beta \in \mathbf{R}$，则 $\rho(\alpha, \beta)=|\alpha-\beta|$，从而得到测度空间 $\mathbf{R}$，而在 $\mathbf{R}^2$ 中，若定义

$$\rho(x,y)=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2\right]^{1/2}$$
$$x=(x_1,x_2),\quad y=(y_1,y_2)$$

则得到测度空间 $\mathbf{R}^2$.

需指出，在同一个集合上可用不同的方式定义元素之间的距离，从而得到不同的测度空间，如在集合 $X=\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$上可定义

$$\widetilde{\rho}(x,y)=\max(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|)$$

作为两点间的距离，且容易验证满足测度公理的三个条件.

同样，在测度空间 $\mathbf{R}^3$ 中，可定义

$$\rho(x,y)=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2\right]^{1/2}$$

其中，$x=(x_1, x_2, x_3)$，$y=(y_1, y_2, y_3)$.

更一般地，在 $\mathbf{R}^n$ 空间中，设

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

则

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$$

此外，还可设

$$\widetilde{\rho}(x,y)=\max_{i=1,2,\cdots,n}|x_i-y_i|,\hat{\rho}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

最后，举一个与 $\mathbf{R}^n$ 不同的测度空间，当 $t\in[0,1]$ 时，我们定义两个有界函数 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的距离

$$\rho(x,y)=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$$

可以证明它满足测度公理的三个条件，这样由所有在 $[0,1]$ 上的有界函数所组成的集合是一个测度空间.

9.1.2 在测度空间中的点列的收敛性

设 $\{x_n\}$ 是测度空间 X 的点列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=0$，则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 a（有极限 a）且记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

如果 $\exists\, C\in\mathbf{R}$ 且 $\exists\, a\in X$，使对任何 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\rho(x_n,a)\leqslant C$，则称点列 $\{x_n\}$ 是有界的.

下面证明几个收敛点列的简单性质：

引理 1 如果点列 $\{x_n\}$ 有极限，则它必有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=0$，所以数列 $\rho(x_n,a)$ 有界，即 $\exists\, C\in\mathbf{R}$: $\forall n\in\mathbf{N}\to\rho(x_n,a)\leqslant C$.

引理 2 点列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$，根据三角不等式知

$$0\leqslant\rho(a,b)\leqslant\rho(a,x_n)+\rho(x_n,b)$$

因数列 $\rho(a,x_n)$ 与 $\rho(x_n,b)$ 均为无穷小量，所以 $\rho(a,b)=0$，即 $a=b$.

我们称测度空间 X 的点集

$$S_r(a)=\{x:x\in X,\rho(x,a)<r\}$$

为以 $a\in X$ 为中心半径为 r 的球.

引理 3 设 $x_m=(x_{m1},x_{m2},\cdots,x_{mn})\in\mathbf{R}^n$——测度空间，点列 $\{x_m\}$ 收敛于 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=a$ 的充分且必要条件是

$$\lim_{m\to\infty}x_{mi}=a_i,i=1,2,\cdots,n$$

证 设 $\lim\limits_{m\to\infty}x_{mi}=a_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\lim\limits_{m\to\infty}|x_{mi}-a_i|=0$，$i=1,2,\cdots,n$，从而有

$$\rho(x_m,a)=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_{mi}-a_i)^2\Big)^{1/2}\to0,m\to\infty$$

反之，若 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=a$，则 $\lim\limits_{m\to\infty}\rho(x_m,a)=0$，所以，对任何 $i=1,2,\cdots,n$ 有

$$0\leqslant|x_{mi}-a_i|\leqslant\Big(\sum_{j=1}^{n}(x_{mj}-a_j)^2\Big)^{1/2}=\rho(x_m,a)\to0,m\to\infty$$

如果对于点列 $\{x_n\}$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$：$\forall n>N$，$\forall m>N\rightarrow\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$，则称它是测度空间 X 的基本点列.

引理 4 如果测度空间 X 的点列 $\{x_n\}$ 是收敛的，则它是 X 的基本点列.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，使对任何 $n>N$ 与任何 $m>N$ 有 $\rho(x_n, a)<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 且 $\rho(x_m, a)<\dfrac{\varepsilon}{2}$，所以，根据三角不等式：$\forall n>N$，$\forall m>N$

$$\rho(x_m,x_n)\leqslant\rho(x_n,a)+\rho(a,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

对于任意测度空间 X，上述命题的逆命题不成立，即基本点列可能不是收敛的.

对于测度空间 X，若它的任何基本点列都收敛于 X 的点，则称 X 是完备的测度空间.

根据数列收敛的柯西准则知实数空间 $\mathbf{R}$ 是完备的.

定理 9-1 $\mathbf{R}^n$ 空间是完备的.

证 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的基本点列. 如果

$$x_k=(x_{k1},\cdots,x_{kn})$$

则数列 $\{x_{ni}\}$ $i=1, 2, \cdots, n$ 是基本数列. 事实上，$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$：$\forall k>N$，$\forall m>N\rightarrow\rho(x_k, x_m)<\varepsilon$，但

$$|x_{ki}-x_{mi}|\leqslant\rho(x_k,x_m)<\varepsilon, i=1,2,\cdots,n$$

根据柯西准则知：数列 $\{x_{ki}\}$，$i=1, 2, \cdots, n$ 收敛. 再由引理 3 知点列 $\{x_k\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中收敛.

9.1.3 在测度空间中的开集与闭集

前面曾定义 $S_r(a)=\{x: x\in X, \rho(x, a)<r\}$ 是以 a 为中心半径为 r 的球. 在 $\mathbf{R}$ 中 $S_r(a)=(a-r, a+r)$；在 $\mathbf{R}^2$ 中

$$S_r(a)=\{(x_1,x_2): (x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<r^2\}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中

$$S_r(a)=\{x: x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n, \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2<r^2\}$$

设 M 是测度空间 X 中的点集. 如果 $\exists S_\varepsilon(x_0)\subset M$，$x_0\in M$，则称点 x_0 是集合 M 的内点，集合 M 的所有内点的集合称为它的内部，且记为 $\mathrm{int}M$. 显然，$\mathrm{int}M\subset M$，若 $\mathrm{int}M=M$，即 M 的所有点都是内点，则称集合 M 为测度空间 X 的开集. 由定义知空集是开集.

例 9-1 在测度空间中的球是开集.

事实上，设

$$S_C(a)=\{x: \rho(x,a)<C\}$$

且设点 $\tilde{x}\in S_C(a)$，$\rho(\tilde{x}, a)<C$. 令

$\varepsilon=C-\rho(\tilde{x}, a)$，则有 $S_\varepsilon(\tilde{x}) \subset S_C(a)$（见图 9-1）. 事实上，若 $x \in S_\varepsilon(\tilde{x})$，则 $\rho(x, \tilde{x})<\varepsilon$. 根据三角不等式得

$$\rho(x,a) \leqslant \rho(x,\tilde{x}) + \rho(\tilde{x},a) < \varepsilon + \rho(\tilde{x},a)$$
$$= C - \rho(\tilde{x},a) + \rho(\tilde{x},a) = C$$

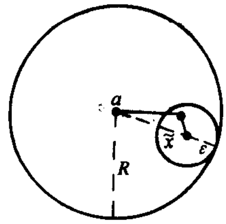

图 9-1

因此，$x \in S_C(a)$. 因 x 是任意球 $S_\varepsilon(\tilde{x})$ 的点，故 $S_\varepsilon(\tilde{x}) \subset S_C(a)$，这样，$S_C(a)$ 的任何点 $\tilde{x}$ 连同某个球 $S_\varepsilon(\tilde{x})$ 都属于 $S_C(a)$，所以$S_C(a)$是开球.

定理 9-2 测度空间的开集具有下述性质：

(1) 整个空间 X 及空集$\varnothing$均是开集.

(2) 有限个开集的交集仍是开集.

(3) 任何多个开集的并集仍是开集.

证 (1) 显然.

(2) 设 $G=\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$，其中 G_i 是开集，我们取任意点 $a \in G$，则 $a \in G_i$，$i=1, 2, \cdots, n$. 因集合 G_i 是开集，故存在球 $S_{\varepsilon_i}(a) \subset G_i$，设 $\varepsilon=\min\limits_{(i=1,2,\cdots,n)} \varepsilon_i$，则$S_\varepsilon(a) \in G_i$，$i=1, 2, \cdots, n$. 所以

$$S_\varepsilon(a) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i = G$$

因此，G 是开集.

(3) 设 $G=\bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$，其中 G_α 是开集. 设点 $a \in G$ 则存在 $\tilde{\alpha} \in \Lambda$：$a \in G_{\tilde{\alpha}}$. 但集合 $G_{\tilde{\alpha}}$ 是开集，所以存在球 $S_\varepsilon(a) \subset G_{\tilde{\alpha}}$，从而 $S_\varepsilon(a) \subset G$. 这样，$a$ 是集合 G 的内点. 根据点 a 任意性知集合 G 是开集.

9.1.4 极限点 闭集

设 X 是测度空间，称任何集合 $O(x^0) \in X$，x^0 是 X 的内点，是点 $x^0 \in X$ 的邻域. 如 $S_\varepsilon(x^0)$ 就是点 x^0 的邻域.

如果 $M \subset X$，而在点 x^0 的任何邻域内都有集合 M 的点 $x \neq x^0$，则称 x^0 是集合 M 的极限点. x^0 可以属于 M，也可不属于 M. 譬如 (a, b) 区间内的所有点都是它的极限点，a，b 这两个端点也是 (a, b) 的极限点，但不属于 (a, b).

若集合 M 的点不是它的极限点，则称该点为 M 的孤立点. 如果 x^0 是集合 M 的孤立点，则存在邻域 $O(x^0)$，其内不含集合 M 的点 $x \neq x^0$.

集合 M 的每个点或为 M 的极限点，或为集合 M 的孤立点.

如果集合 $M \subset X$ 包含其所有的极限点，则称 M 为闭集. 譬如在 $\mathbf{R}$ 内 $[a, b]$ 是闭集，(a, b) 为开集.

我们称集合 M 与其所有极限点的并集为闭集 $\overline{M}$.

定理 9-3 测度空间 X 中的集合 F 是闭集的充要条件，是它的补集 $X\backslash F$ 是开集.（证略）

定理 9-4 闭集具有如下性质：

（1）整个空间 X 与空集 $\varnothing$ 均为闭集.

（2）任意多个闭集的交集仍是闭集.

（3）有限个闭集的并集仍是闭集.（证略）

9.1.5 测度空间中的紧致统

设测度空间 $X\supset M$，如果能从任何点列 $x_n\in M$ 中选出收敛于 M 自身点的点列，则称集合 M 在 X 中是紧致统.

如区间 $[a,b]$ 是 $\mathbf{R}$ 中的紧致统，而 $[a,b)$ 就不是 $\mathbf{R}$ 中的紧致统.

在 $\mathbf{R}^n$ 中有推广的波尔察诺—维尔斯特拉斯定理.

定理 9-5 从 $\mathbf{R}^n$ 空间中的任何有界点列中可选取收敛的点列.（证略）

推论：集合 $M\subset\mathbf{R}^n$ 是紧致统的充分且必要条件是 M 为有界闭集.

9.1.6 集合的边界

设测度空间 $X\supset M$，$a\in X$. 如果在点 a 的任何邻域内都既有属于集合 M 的点，也有不属于集合 M 的点，则称点 a 是 M 的边界点.

集合 M 的界点 a 可以不属于集合 M.

集合 M 的所有界点的集合称为集合 M 的边界，且记为 ∂M，如

$$\partial(a,b)=\{a,b\},\partial[a,b]=\{a,b\},a,b\in\mathbf{R}$$

$$\partial\{x:\rho(x,a)<\varepsilon,x\in\mathbf{R}^n\}=\{x:\rho(x,a)=\varepsilon,x\in\mathbf{R}^n\}$$

9.2 多元函数的极限

9.2.1 函数在一点处的极限

设在测度空间 X 中点 x^0 的邻域为 $O(x^0)$，而对应的去心邻域为

$$\mathring{O}(x^0)=O(x^0)\backslash\{x^0\}$$

下面考虑函数 f：$M\to\mathbf{R}$，其中 M 是属于测度空间 X 的某个集合，如果 $X=\mathbf{R}^n$，则函数 f：$M\to\mathbf{R}$ 称作 n 元函数且记为

$$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n),\qquad x\in M$$

如函数 $f=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中以 $(0,0)$ 为圆心的单位圆上有定义；$f=\ln(x_1^2+x_2^2)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 中任何点 $(0,0)$ 的去心邻域内有定义.

定义 9-1 设函数 $f(x)$ 在测度空间 X 的点 x^0 的去心邻域 $\mathring{O}(x^0)$ 内有定义. 如果 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0:\forall\ x\in\mathring{O}(x^0):\rho(x,x^0)<\delta\to|f(x)-A|<\varepsilon$，则称数

A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x^0$ 时的极限.

定义 9-2 设 $f(x)$ 在 $\mathring{O}(x^0)$ 内有定义，如果对任何点列 $x_k \in \mathring{O}(x^0)$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^0$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = A$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x^0$ 时的极限.

这两个极限定义的等价性的证明类似于一元函数.

如果数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x^0$ 时的极限，则记作 $A = \lim\limits_{x\to x^0} f(x)$. 如果二元函数 $f(x, y)$ 在 $\mathring{O}((a, b))$ 内有定义，而数 A 是 $f(x, y)$ 当 $(x, y) \to (a, b)$ 的极限，则记为

$$A = \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x, y)$$

类似地对 n 元函数引入记法

$$A = \lim_{\substack{x_1\to x_1^0 \\ \vdots \\ x_n\to x_n^0}} f(x_1, \cdots, x_n)$$

引理 1 设函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在 $\mathring{O}(x^0)$ 内有定义且 $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, $\forall x \in \mathring{O}(x^0)$. 如果 $\lim\limits_{x\to x^0} \varphi(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = 0$.

证 因 $\lim\limits_{x\to x^0} \varphi(x) = 0$，故对任何 $\varepsilon > 0$ 存在一个球 $\mathring{S}_\delta(x^0)$，使当 $x \in \mathring{S}_\delta(x^0)$ 时，恒有 $|\varphi(x)| < \varepsilon$，从而对所有的 $x \in \mathring{S}_\delta(x^0)$ 满足不等式 $|f(x)| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = 0$.

例 9-2 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x^2+y^2)^a = 0$, $a > 0$.

证 任取 $\varepsilon > 0$，令 $\delta = \varepsilon^{1/2a}$，设 $(x, y) \in \mathring{S}((0, 0))$，则

$$(x^2 + y^2)^a < \delta^{2a} < \varepsilon$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x^2 + y^2)^a = 0$$

例 9-3 若 $\alpha + \beta - 2\gamma > 0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma} = 0$，试证明.

证 因

$$|x| < \sqrt{x^2 + y^2}, |y| < \sqrt{x^2 + y^2}$$

故当 $x^2 + y^2 > 0$ 时，有

$$0 \leqslant f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^\gamma} \leqslant \frac{(x^2 + y^2)^{\alpha/2}(x^2 + y^2)^{\beta/2}}{(x^2 + y^2)^\gamma}$$

$$= (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-2\gamma)} = \varphi(x,y)$$

由例 9-2 知：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varphi(x, y)=0$，所以由引理 1 知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)=0.$

需注意，在 $\mathbf{R}^n$ 中

(1) 如果事先并不知道 $f(x)$ 在点 x^0 处是否存在极限，而仅知道当点 x 以某些特殊方式趋向于点 x^0 时，$f(x)$ 均趋向于同一数 A，则不能断定 $f(x)$ 在 x^0 处的极限存在.

(2) 如果点 x 以两种不同的方式趋向于点 x^0 时，$f(x)$ 趋向于不同的数，则可断定 $f(x)$ 在 x^0 处的极限不存在.

例 9-4 证明：函数 $f(x, y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时没有极限.

证 令 $(x_n, y_n)=\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$，则 $f(x_n, y_n)=1$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n, y_n)=1$. 若取 $(x_n', y_n')=\left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n', y_n')=-1$. 因对任何 $n\in\mathbf{N}$，点 (x_n, y_n) 与 (x_n', y_n') 都不与 $(0, 0)$ 重合且点列 (x_n, y_n) 与 (x_n', y_n') 均收敛于 $(0, 0)$，所以由定义 9-2 知：当 $(x, y)\to(0, 0)$ 时，$f(x, y)$ 没有极限.

9.2.2 沿集合取极限

定义 9-3 设 M 是函数 $f(x)$ 的定义域的子集，x^0 是集合 M 的极限点. 如果 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$：$\forall\ x\in\mathring{S}_\delta(x^0)\cap M\to|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 沿 M，当 $x\to x^0$ 时的极限且记为

$$A=\lim_{x\to x^0,x\in M} f(x)$$

设二元函数 $f(x, y)$ 在去心邻域 $\mathring{O}(x_0, y_0)$ 内有定义，则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 沿方向 $l=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 的极限可表为：

$$\lim_{t\to+0}f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in\mathring{O}((x_0,y_0)\cap L)}} f(x,y)$$

其中 L 是从 (x_0, y_0) 出发沿 l 方向所引的射线.

例 9-5 证明：函数 $f(x, y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 处沿任何方向 $l=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 的极限都存在且等于 $\sin 2\alpha$.

证 因 $t>0$ 时

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$$

故有

$$\lim_{t\to+0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\sin 2\alpha$$

例 9-6 证明：函数 $f(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ 在 (0, 0) 点处沿任何方向 $l=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的极限都存在且等于零.

证 当 $t>0$ 时，有

$$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\frac{2t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$$

如果 $\sin\alpha=0$，则 $f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$，从而 $\lim\limits_{t\to+0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$.

如果 $\sin\alpha\neq0$，则 $\lim\limits_{t\to+0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=0$.

练习

比较例 9-5 与例 9-6 的结论，可得出什么样的结论？

9.2.3 累次极限、无穷极限

设二元函数 $f(x,y)$ 在集合

$$\Pi=\{(x,y):0<|x-x_0|<a,0<|y-y_0|<b\}$$

上有定义，假设 $\forall\ x\in(x_0-a,x_0+a)$，$x\neq x_0$，存在 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$ 而函数 $g(x)$ 在 x^0 的去心邻域内有定义，如果存在极限

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y)$$

则称这个极限为累次极限. 类似地可定义另一个累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$. 通过简单的例子可以表明：由二重极限的存在不能得出累次极限存在，而由累次极限存在且相等也不能得出二重极限的存在. 如例 9-4，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 的极限不存在但累次极限存在，即由

$$\lim_{x\to0}f(x,y)=\lim_{y\to0}f(x,y)=0$$

知，二个累次极限都为零.

对于函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y} & y\neq0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

有 $|f(x,y)|\leqslant|x|$，故由引理 1 知，当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，二重极限等于零，但当 $x\neq0$ 时，$\lim\limits_{y\to0}x\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在，因而相对应的累次极限不存在.

对于多元函数的无穷极限可类似于一元函数的定义来定义，如 $\lim\limits_{x\to x^0}f(x)=+\infty$，可定义为：如果对于任何实数 C 存在实数 $\delta>0$，使对所有 $x\in\mathring{O}_\delta(x^0)$ 恒满足 $f(x)>C$.

例 9-7 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0.$

证 因当 $x>0$，$y>0$ 时有

$$0\leqslant(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}\leqslant(x+y)^2\mathrm{e}^{-(x+y)}$$

且$\lim\limits_{t\to\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}=0$，故$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使对任何 $t>\delta$ 都有 $t^2\mathrm{e}^{-t}<\varepsilon$，从而$\forall\ x>\dfrac{\delta}{2}$，$\forall\ y>\dfrac{\delta}{2}$，恒有

$$0\leqslant(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}<\varepsilon$$

9.3 多元函数的连续性

从本节起，我们将重点研究二元函数. 因为对二元函数有关理论推广到多元函数，原则上没有什么困难.

定义 9-4 设有三个变量 x，y 和 z，如果对于 x，y 所能取的每一对值，z 按一定的规则有一个确定的值与之对应，则称 z 是 x，y 的二元函数. 记作

$$z=f(x,y)$$

并称 x，y 为自变量，z 为因变量.

自变量 x，y 所能取的每对值的全体称为函数 z 的定义域，且记为 D. 若 $(x_0,\ y_0)\in D$,则称 $z_0=f(x_0,\ y_0)$ 为二元函数 $z=f(x,\ y)$ 当 $x=x_0$，$y=y_0$ 时的函数值.

今后，我们在讨论二元函数的定义域时，通常是用坐标平面上的点 $(x,\ y)$ 的集合来表示. 常见的定义域是平面上的一个或几个区域. 为了确切地说明区域的概念，先介绍一些关于平面点集的基本知识.

以点 $M(x_0,\ y_0)$ 为中心，任意正数 δ 为半径的圆的内部的点 $(x,\ y)$ 的全体

$$\{(x,y):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$$

叫做平面上点 M 的 δ 邻域.

设 D 为一平面点集，M 为 D 的一点，若 M 的某一 δ 邻域内的点均属于 D，则称点 M 为 D 的内点. 如果集合 D 的点都是 D 的内点，则称 D 为开集. 如果点 M 的任意一个邻域中既有属于 D 的点，也有不属于 D 的点（M 可属于 D，也可以不属于 D)，则称 M 是 D 的边界点. D 的边界点的全体为 D 的边界. 如果 D 是开集，且对 D 中任意两点，都可以用完全落在 D 内的折线连接起来，那么称 D 为区域或开区域，即区域是连通的开集. 区域同它的边界一起，称为闭区域.

在不需要区分开区域和闭区域时，我们称它们为区域.

如果一个区域 D 总可以被包含在一个以原点为中心，半径适当大的圆内，则称 D 为有界区域，否则，称为无界区域.

例 9-8 函数 $z=2x-y$ 的定义域是

$$-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty$$

即整个 xOy 平面.

例 9-9 函数 $z=\arccos\frac{x}{2}+\arcsin\frac{y}{3}$ 的定义域是

$$-2\leqslant x\leqslant 2,\ -3\leqslant y\leqslant 3$$

这是一个有界闭区域（包含边界在内的长方形）.

例 9-10 函数 $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 的定义域是有界开区域

$$x^2+y^2<1$$

例 9-11 函数 $z=\ln(x+y)$ 当 $y>-x$ 时有定义. 它的定义域是位于直线 $y=-x$ 上方而不包括这直线在内的半平面，是一个无界开区域.

二元函数 $z=f(x,y)$ 有明显的几何意义. 设 D 为 $z=f(x,y)$ 的定义域，对于任意点 $P(x,y)\in D$ 在空间直角坐标系中都有一确定的点 $M(x,y,f(x,y))$ 与之对应，而点 M 的集合一般构成一个曲面.

练习

1. 已知 $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，求 $f\left(1,\frac{y}{x}\right)$.

2. 已知函数 $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时 $z=x^2$，求函数 f 与 z 的表达式.

3. 画出下列不等式组表示的图形，并指出哪些是闭区域，哪些是开区域，哪些是有界区域，哪些是无界区域.

(1) $xy\leqslant 1$　　(2) $y>x^2$，$|x|<2$

(3) $y^2\leqslant x-1$，$x+y<2$　　(4) $0<x^2+y^2\leqslant a^2(a\neq 0)$

4. 确定并绘出下列函数的定义域.

(1) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$　　(2) $z=\sqrt{x\sin y}$

(3) $z=\ln[x\ln(y-x)]$

典型计算题 1

试确定下列函数的定义域，并用几何方法表示.

1. $z=(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$　　2. $z=\ln(-x-y)$

3. $z=y\sqrt{\cos x}$　　4. $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$

5. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}$　　6. $z=\frac{(2x+3y-1)}{(x-y)}$

7. $z=\sqrt{\log_a(x^2+y^2)}$　　8. $z=(x^2+y^2)^{-1}$

9. $z=1-\sqrt{-(x-y)^2}$　　10. $z=x+\arccos y$