高等院校适用教材

线性代数

典型问题精解

杨延龄 沙峯 编

中国经济出版社
www.economyph.com

高等院校适用教材

线性代数
典型问题精解

杨延龄　沙　峯　编

中国经济出版社

全书包括六章与五个附录。每章由三部分组成。第一部分是内容提要。将该章中定义，定理与公式予以系统总结与阐发。第二部分是例题。这是该章的主要部分。按照问题的所求与解题方法，将常见的典型问题予以详细分类。对于每一类，精选若干例题，给出详尽解答。第三部分是习题。与例题配合，编选了许多习题。供读者检验自己对于概念的理解，以及对于方法的掌握。习题后附有答案与提示。在附录中，对涉及全书的概念与方法予以总结，以利读者全面掌握线性代数这门课程。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数典型问题精解/杨延龄，沙峯编.—北京：中国经济出版社，2003.12

ISBN 7-5017-6094-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①杨…②沙… Ⅲ.线性代数—解题 Ⅳ.0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 086334 号

出版发行：中国经济出版社（100037·北京市西城区百万庄北街 3 号）

网　　址：WWW.economyph.com

责任编辑：左秀英、张新安

责任印制：张江虹

封面设计：白长江

经　　销：各地新华书店

承　　印：三河市欣欣印刷有限公司

开　　本：787mm×1092mm　1/16　印　张：11.75　字　数：270 千字

版　　次：2004 年 1 月第 1 版　　印　次：2004 年 1 月第 1 次印刷

印　　数：2500 册

书　　号：IBSN 7-5017-6094-2/ G・1177　　定　价：20.00 元

前　言

本书按照“线性代数”教学基本要求编写，同时参照硕士研究生入学考试大纲。可以作为正在学习该课程的本科学生以及准备报考研究生的人员的参考书。

全书包括六章与五个附录。每章由三部分组成。第一个部分是内容提要。包括该章中的定义，定理与公式的系统总结，以及对较难理解的概念的解释与阐述。可以作为读者的复习提纲。而且，它并不是教科书的简单摘要。仔细阅读，读者将会发现一些由于篇幅所限，使得一般教科书中不可能详细阐发的内容。

第二部分是例题。这也是该章的主要部分。在这里，对于典型问题予以详细分类。先按照问题的所求分成几个大类。对于每个大类，再按照已知分成几个小类。每类精选若干例题，予以详尽解答。这些例题包括部分研究生入学试题，基本上涵盖了所有常见的典型问题。掌握了这些问题的解法，也就基本上理解了这门学科的主要思想，内容与方法。部分例题后面有评述，指出命题的意义，解题的技巧与注意事项等等。有些例题带有星号，这些问题较难。在第一次阅读时可以跳过，等到对基本内容掌握较好时，再返回学习。内容简介是按照定义，定理的顺序编写的。可以说是纵向编排。例题是按照问题的类型编写的。可以说是横向编排。目的是使读者对这门课程有一个更完整，系统的了解与掌握。

第三部分是习题。与例题相配合，选择了相当数量的习题。供读者检验自己对概念的理解，以及对方法的掌握。有些习题具有一定难度。如果一时不能解决，也不要放弃。经过反复思考，最终找到解决方法，此时收获最大。而且这也正是学习的乐趣所在。因此，虽然习题后附有答案与提示，也不要急于查看。

引用前面例题或习题时，如果在同一个小标题下，则只写“例 2”。如果在同一章，写“四.3 例 2”。如果不在同一章，则写“第二章例题四.3 例 2”。

五个附录是一些贯穿全书的概念与方法的总结。目的是使读者对线性代数这个课程的内容可以有一个更完整，全面的理解与掌握。因为篇幅限制，写得比较简略。需要仔细阅读，反复体会，才能有所理解。

本书由北京工商大学数学教研室杨延龄与沙峯编写。因水平有限，谬误难免。请读者批评指正。

在编写过程中得到了学校有关部门与中国经济出版社的大力支持。在此表示感谢。

作　者

目　　录

第一章　行列式

第二章　矩　阵

第三章　向　量

第四章 线性方程组

第五章 特征值与特征向量

第六章 二次型

附 录

第一章　行列式

第一部分　内容提要

一、行列式定义

1. 全排列

将$1,2,\cdots,n$排成一行，称为这n个数的一个**全排列**. 简称**排列**. 记作$p_1p_2\cdots p_n$. 共有$n!$种不同的排列.

2. 逆序数

规定从小到大的顺序为标准顺序.

如果在一个排列中，某两个数的先后顺序与标准顺序相反，则称有 1 个逆序. 这个排列的逆序的总数称为排列的**逆序数**.

排列$1,2,\cdots,n$的逆序数最小，等于 0. 这个排列称为**标准排列**. 而$n,n-1,\cdots,1$的逆序数最大，等于$n(n-1)/2$.

如果一个排列的逆序数是奇数（偶数），则称其为**奇（偶）排列**.

考虑$1,2,\cdots,n$的一个排列$p_1p_2\cdots p_n$，任取一个数p_i，如果有t_i个比p_i大的数排在p_i的前面，则称t_i是p_i的逆序数. 所有数的逆序数的和就是排列的逆序数.

3. 奇排列与偶排列

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种产生新排列的过程称为**对换**. 将两个相邻元素对换，称为**相邻对换**.

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

推论　将奇（偶）排列对调成标准排列的对换次数为奇（偶）数.

4. 行列式定义

定义　多项式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n **阶行列式**. 其中t是排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数，而求和遍及$1,2,\cdots,n$的所有排列.

左边：行列式的元素，行，列，主对角线. 元素的行标与列标.

右边：项的行标排列与列标排列.

在形式上，n阶行列式是一个数表. 实质是一个特殊的多项式. 这个多项式由$n!$项组成，

每项是 n 个元素的乘积. 这 n 个元素属于不同的行, 不同的列. 或者说每行取一个元素, 而且要属于不同的列. 现在所有项的行标是标准排列, 则其列标恰是 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列.

而且, 如果列标是奇排列, 则前面是负号. 如果列标是偶排列, 则前面是正号.

方法 一般, 只用定义计算二, 三阶行列式.

5. 行标与列标

前面将行列式中每项的行标按照标准顺序, 由列标的逆序数决定符号. 同样可以将列标按照标准顺序, 此时由行标的逆序数决定符号.

定理 2 行列式 $D=\sum(-1)^s a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$. 其中 s 是行标组成的排列 $p_1 p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

二、行列式的性质

1. 行列式的转置

定义 1 将行列式 D 的行列互换, 而不改变行与列的顺序（第一行变成第一列, 等等）, 所得到的行列式称为原行列式的**转置**, 记作 D'.

性质 1 行列式的转置与原行列式相等. 即 $D'=D$.

方法 在行列式中, 行与列的地位是相同的. 因此, 对行列式的行成立的命题, 同样对列也成立.

2. 交换行

性质 2 交换行列式的两行（列）, 行列式改变符号.

方法 行列式的各行的地位并不完全相同. 要注意符号问题.

推论 如果行列式 D 中有两行相同, 则 $D=0$.

3. 数乘（提取公因式）

性质 3 用数 k 乘以行列式的某一行的所有元素, 等于用它乘以行列式. 例如

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 4 如果行列式 D 的某两行的对应元素成比例, 则 $D=0$.

4. 加法（乘法对加法的分配律）

性质 5 如果行列式的某一行的所有元素都是两个数的和, 则它等于两个行列式的和. 即

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注意 行列式的加法与数乘都是对一行进行, 而不是对整个行列式.

5. 消元

性质 6 将行列式的某一行元素加上另一行对应元素的 k 倍, 所得行列式与原行列式相等.

方法 用性质将行列式变成上三角行列式, 再用定义. 这种方法称为消元法. 这是计算行列式的主要方法.

三、行列式的展开

1. 余子式与代数余子式

定义 1 考虑 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

将行列式的元素 a_{ij} 所在的行与列删除（其余元素保持原来的相对位置），得到的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**, 记作 M_{ij}. 而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为其**代数余子式**.

方法 左上角元素 a_{11} 的代数余子式 A_{11} 取正号, 其余正负相间. 特别, 主对角线上元素 a_{ii} 的代数余子式 A_{ii} 全取正号.

2. 行列式展开

定理 3 对于 n 阶行列式 D, 有

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$

$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$

方法 一般, 用行列式的展开计算有很多元素等于 0 的行列式.

推论 行列式的任意一行的元素与另一行的元素的代数余子式的乘积之和等于零.

综合定理与推论, 有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

第二部分　行列式例题

一、行列式定义

1. 逆序数

例 1　求下列排列的逆序数, 并判断其奇偶性.

（1） 134728965　　（2） 254896731　　（3） $246\cdots(2n)135\cdots(2n-1)$

解　（1） 用定义计算, 逆序数等于 10, 是偶排列.

（2） 用定义计算, 逆序数等于 19, 是奇排列.

（3） 用定义计算, 逆序数等于$\frac{1}{2}n(n+1)$. 当$n=4k-1,4k$时, 是偶排列. 当$n=4k+1,4k+2$时, 是奇排列.

例 2　求i,j, 使得$1245i6j97$是奇排列.

解　作为排列, i,j为 3,8. 如果$i=3$, $j=8$, 则逆序数等于 4, 是偶排列.

如果$i=8$, $j=3$, 则逆序数等于 7, 是奇排列.

例 3　已知n级排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数为r, 求排列$i_ni_{n-1}\cdots i_1$的逆序数.

解　两个数i,j在排列$i_1i_2\cdots i_n$中是逆序的充分必要条件是: 它在$i_ni_{n-1}\cdots i_1$中不是逆序. 这样的数对共有$\frac{1}{2}n(n-1)$. 因此, 如果排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数为r, 则$i_ni_{n-1}\cdots i_1$的逆序数是$\frac{1}{2}n(n-1)-r$.

2. 行列式中的项

例 1　考察下列乘积是否包含在相应阶数的行列式中, 应取什么符号.

（1） $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$,

（2） $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$,

（3） $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$.

解　（1） 第一与第二个下标都是$1,2,\cdots,7$的排列. 因此, 这个乘积包含在七阶行列式中. 将第一个下标按照从小到大的顺序排列, 则第二个下标为排列$6,7,3,4,5,1,2$. 它的逆序数为 16. 于是前面应该是正号.

（2） 在第一个下标中有两个 2. 因此, 这个乘积不包含在行列式中.

（3） 包含在n阶行列式中. 逆序数为$n-1$. 当n是偶数时, 前面是负号. 当n是奇数时, 前面是正号.

评述　一个乘积包含在行列式中的充分必要条件是: 它的第一个下标与第二个下标各构成一个全排列.

例 2　写出四阶行列式$D=|a_{ij}|$中所有的带负号且包含a_{23}的项.

解　根据定义, 包含a_{23}的项共有 6 个. 它们是

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},\quad a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$$
$$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44},\quad -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$$
$$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42},\quad a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

例 3 选择 j,k，使得乘积 $a_{47}a_{63}a_{1j}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ 包含在七阶行列式中，且带有正号.

解 第二个下标缺少 2 和 6.

如果取 $j=2,k=6$，则逆序数为 7，于是前面是负号.

如果取 $j=6,k=2$，则逆序数为 14，于是前面是正号.

只有这两种方法选择 j,k，所求是后者. 即 $j=6,k=2$.

例 4 在下面的行列式中，求 x^4 与 x^3 的系数.

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

解 在第一列上有三个 x. 如果取第一个元素，则产生一个 x^4 项，没有 x^3 项. 如果取下面的元素，都不产生 x^4 项，但产生 x^3 项. 于是 x^4 的系数是 10. x^3 项的系数是 $-2-3=-5$.

3. 用定义计算低阶行列式

例 1 当 x 为何值时，行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix}=0$.

解 展开式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix}=3x+25-8-30+10-2x=x-3=0$$

于是，$x=3$.

评述 二阶行列式只有两项. 三阶行列式虽然有 6 项，但是容易得到. 因此，经常用定义计算它们. 四阶行列式有 24 项，用定义计算已经几乎不可能了.

例 2 设函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x^2-2 \\ 2 & x^2+1 & 1 \end{vmatrix}$，求方程 $f(x)=0$ 的根.

解 展开式.

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x^2-2 \\ 2 & x^2+1 & 1 \end{vmatrix}=-x^4+5x^2-4=0$$

于是，$x=\pm1$，或 $x=\pm2$.

4. 用定义计算多零行列式

例 1 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$，（$n\geq3$）.

解 用定义计算，只有一个非零项，得 $(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}n!$.

评述 用定义只能计算非常特殊的高阶行列式. 即使是包含许多零的行列式，更常用的工具

也是行列式性质, 特别是按一行或一列展开.

例 2 计算行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 这是一个五阶行列式, 它的一般项形如$\pm a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}a_{5i_5}$, 其中$i_1,i_2,i_3,i_4,i_5$是1,2,3,4,5 的一个排列. 观察一般项中后面的三个因子的下标, i_3,i_4,i_5中至少有一个必须取 3,4 或 5. 因此, 每一项中至少有一个因子等于 0, 从而该项等于 0. 于是行列式等于 0.

二、行列式的数乘与加法

例 1 已知$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}=M$, 求$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ d+e & e+f & f+d \\ g+h & h+k & k+g \end{vmatrix}$.

解 加法.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ d+e & e+f & f+d \\ g+h & h+k & k+g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c & c+a \\ d & e+f & f+d \\ g & h+k & k+g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b+c & c+a \\ e & e+f & f+d \\ h & h+k & k+g \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b+c & c \\ d & e+f & f \\ g & h+k & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & c+a \\ e & f & f+d \\ h & k & k+g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & k & g \end{vmatrix} = 2M$$

其中最后一步, 两次交换列.

例 2 设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 又数$b \neq 0$, 分别用$b^{i-j}$乘以行列式中的$a_{ij}$产生一个新的行列式, 求证: 新行列式与原行列式相等.

解 新行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b^{-1}a_{12} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ ba_{21} & a_{22} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

从第一列提取b^{n-1}, 第二列提取b^{n-2}等. 然后再从第一行提取b^{1-n}, 第二行提取b^{2-n}等, 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b^{-1}a_{12} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ ba_{21} & a_{22} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=b^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\begin{vmatrix} b^{1-n}a_{11} & b^{1-n}a_{12} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ b^{2-n}ba_{21} & b^{2-n}a_{22} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

评述 行列式的加法是对一行或一列进行的. 如果有r行是和, 需要用r次公式, 才能将它们一一分开. 同样, 行列式的数乘（提取公因式）也是对一行或一列进行. 如果r行有公因式, 则最终提出该因式的r次方. 要特别注意这一点.

例 3 设行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=M$，求$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$.

解 交换行.

将所求的行列式的最后行依次与它上面的行交换. 共交换$n-1$次, 可得已知行列式. 于是, 所求行列式等于$(-1)^{n-1}M$.

评述 交换行列式的两行, 或两列时, 必须在前面加一个负号. 这也是在计算中容易出错的地方.

例 4 设三阶行列式$|A|=|a,b,c|=4$，其中a,b,c是3×1数表. 求行列式$|B|=|c+2b,3b,a|$.

解 加法, 数乘与交换列.

$$|c+2b,3b,a|=|c,3b,a|+|2b,3b,a|=3|c,b,a|=-3|a,b,c|=-12$$

例 5 设函数$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x-1 & 2x-1 \\ 1 & x-2 & 3x-2 \\ 1 & x-3 & 4x-3 \end{vmatrix}$，求证: 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

证 用行列式性质.

函数$f(x)$是多项式, 因此在区间$[0,1]$连续, 在$(0,1)$可导. 计算函数值$f(0)$与$f(1)$，因为行列式中有两列相同, 所以

$$f(0)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}=0,\quad f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

根据罗尔定理, 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

评述 行列式是具有特殊结构的多项式. 如果将其中的字母看作变量, 则成为多项式函数. 自然可以研究它的微积分问题.

三、行列式的消元

1. 直接路线

例 1 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

解 将第一行乘以适当的数加到下面各行.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -10 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{vmatrix} = 900$$

评述 消元是计算行列式的最重要的方法. 因为变化多端, 也是最难掌握的方法. 一个最直接的路线是: 将上面一行乘以适当的数, 加到下面各行, 最后将行列式变成上三角行列式.

行列式与矩阵的初等变换是线性代数中最常见的计算, 应通过练习, 熟练掌握, 务必又快又准.

例 2 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix}$.

解 将第一列乘以-1, 加到后面各列, 进行消元.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ a^2 & ab & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ a^2 & a(b-a) & (b-a)(b+a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 2 \\ a^2 & a & b+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 1 & 0 \\ a^2 & a & b-a \end{vmatrix} = (b-a)^3$$

例 3 计算行列式$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & & \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$.

解 如果$n=1$, 行列式等于a_1-b_1.

当$n>1$时, 将第一行乘以-1, 加到下面各行.

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & & \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1 \\ \cdots & \cdots & & \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \end{vmatrix}$$

当$n=2$时, 用定义, 得行列式等于$(a_2-a_1)(b_2-b_1)$.

当$n>2$时, 有两行成比例, 行列式等于 0.

评述 这是一个n阶行列式. 不过对于不同的n, 结果的形式不同. 一个容易出现的错误是:

只考虑 n 取值很大的一般情况，而忽略了取小值的特殊情况. 实际上，特殊性往往发生在 $n=1$ 与 $n=2$ 时.

2. 利用特殊结构

例 1 计算行列式$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 2 \\ z & x & y & 2 \\ 2y+z & 2z+x & 2x+y & 6 \end{vmatrix}$.

解 第二行乘以 -2，第三行乘以 -1，加到第四行，得

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 2 \\ z & x & y & 2 \\ 2y+z & 2z+x & 2x+y & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 2 \\ z & x & y & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

评述 很多时候并不采取前面的直接路线，而是仔细观察行列式的结构，根据其特殊性，决定消元方法，以简化计算. 如这里的各例，以及后面介绍的两种特殊路线.

例 2 计算行列式$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

解 先第二列减第一列，第四列减第三列.

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x & -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+y & -y \\ 1 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$$

提取 $(-x)(-y)$ 之后，再将第一列与第三列同时减去第二列与第四列，得

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+y & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = xy\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^2y^2$$

例 3 计算 $2n$ 阶行列式 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}$.

解 将第 $2n$ 列加到第一列，第 $2n-1$ 列加到第二列，…，第 $n+1$ 列加到第 n 列. 提出 n 个 $a+b$ 之后，再将第一列乘以 $-b$ 加到第 $2n$ 列，…，第 n 列乘以 $-b$ 加到第 $n+1$ 列，得

$$\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix} = (a+b)^n \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & b \\ & 1 & & & & & b & \\ & & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & 1 & b & & & \\ & & & 1 & a & & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & & \\ & 1 & & & & & a & \\ 1 & & & & & & & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^n \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & a-b & & & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & & \\ & 1 & & & & & a-b & \\ 1 & & & & & & & a-b \end{vmatrix} = (a+b)^n (a-b)^n$$

3. 下行减上行

例 1 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

解 第一行不变, 从下面开始, 将上面一行乘以 -1, 加到下面一行.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

评述 一般路线是将第一行乘以不同的数, 加到下面各行. 因为第一行不变, 无须考虑顺序. 这里是一种特殊路线: 上行乘以 -1, 加到下行. 此时要考虑顺序. 对于本例, 必须从下往上进行. 否则, 中间的行先变了, 这个过程就无法再进行下去.

例 2 设常数 a,b,c 两两不相等, 求证: 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$ 的充分必要条件是: $a+b+c=0$.

解 将第二行乘以 $-a^2$, 加到第三行, 再将第一行乘以 $-a$ 加到第二行.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b^2-a^2) & c(c^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)c(c^2-a^2) - (c-a)b(b^2-a^2) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

因为常数 a,b,c 两两不相等, 所以行列式等于 0 的充分必要条件是: $a+b+c=0$.

例 3 计算行列式$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

解 从左边开始，将前面一列加到后面一列.

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (n+1) a_1 a_2 \cdots a_n$$

评述 本例与例 1 不同：需要已经改变的中间列，因此从最左边开始.

4. 范得蒙行列式

例 1 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix}$.

解 先用数乘行列式，再用范得蒙行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} = 24\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$= 24(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3) = 288$$

例 2 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 2a^2-1 & 2b^2-1 & 2c^2-1 & 2d^2-1 \\ 4a^3-3a & 4b^3-3b & 4c^3-3c & 4d^3-3d \end{vmatrix}$.

解 将第一行加到第三行， 再将第二行的 3 倍加到第四行.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 2a^2-1 & 2b^2-1 & 2c^2-1 & 2d^2-1 \\ 4a^3-3a & 4b^3-3b & 4c^3-3c & 4d^3-3d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 2a^2 & 2b^2 & 2c^2 & 2d^2 \\ 4a^3 & 4b^3 & 4c^3 & 4d^3 \end{vmatrix}$$

$$= 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = 8(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$$