科学版

大学工科数学学习指导系列

计算方法
学习指导

陈延梅 吴勃英 金承日 编

- 精心辅导课程学习
- 训练数学思想与技能
- 展示数学方法与技巧

科学出版社
www.sciencep.com

大学工科数学学习指导系列

计算方法学习指导

陈延梅　吴勃英　金承日　编

高广宏　审

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书包括误差理论、插值与逼近、数值积分、非线性方程的数值解法、常微分方程初值问题数值解法、线性方程组的直接解法、线性方程组的迭代解法共七章.每章分为四部分:第一部分是内容要点,对"计算方法"的基本理论进行了系统的归纳;第二部分是题型分析与解题方法,对各类典型问题及其求解技巧做了详细分析,并给出了详尽的求解过程;第三部分是具有代表性的综合复习题;第四部分给出了部分复习题的参考答案.

本书可作为理工科本科生"计算方法"课程的学习指导书,也可供工科硕士生及工程技术人员学习"数值分析"参考.

图书在版编目(CIP)数据

计算方法学习指导/陈延梅,吴勃英,金承日编.—北京:科学出版社,2003
(大学工科数学学习指导系列)
ISBN 7-03-011199-0

Ⅰ.计… Ⅱ.①陈… ②吴… ③金… Ⅲ.计算方法-高等学校-解题
Ⅳ.O241-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 013253 号

责任编辑:钟 谊/责任校对:曹锐军
责任印制:刘秀平/封面设计:黄华斌 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003年6月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2003年6月第一次印刷 印张:13 1/2
印数:1—5 000 字数:262 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈双青〉)

前　言

本书根据全国高等院校理工科本科生"计算方法"课程教学大纲系统地归纳了"计算方法"的基本理论,对解题技巧与方法进行了详细的阐述.

"计算方法"这门课程内容丰富,理论完整,具有广泛的实际意义.该课程处理问题的方法不同于其他数学课程,学生很难从原有的连续型数学框架步入数值方法.为了帮助学习"计算方法"的读者更好地掌握这门课程的基本理论,灵活运用它的思想方法,做到触类旁通,提高分析、解决问题的能力,我们结合多年的教学经验,编写了这部学习指导书.

本书每章内容都由四部分组成.第一部分归纳了"计算方法"的基本内容.第二部分选编了大量的典型例题,并对每道题进行了详细的分析与解答,力图介绍分析问题的方法与解题技巧,提高读者分析问题和解决问题的能力,使读者更有效地掌握"计算方法"的基本原理.第三部分配备了一定数量的复习题,供读者自测使用和参考.第四部分给出了复习题的参考答案.

由于编者水平有限,难免出现某些疏漏,甚至错误,恳请广大读者批评指正.

编　者

2002年12月于哈尔滨工业大学

目 录

第一章 误差理论

在研究算法的同时,必须注重误差分析,使建立起来的算法科学有效.

一、内容要点

1. 误差

(1)误差的来源

(2)绝对误差、相对误差和有效数字

① 绝对误差

假设某一量的准确值为 x,其近似值为 x^*,则称 $\varepsilon(x)=x-x^*$ 为近似数 x^* 的绝对误差.

② 绝对误差限

如果 $|\varepsilon(x)|=|x-x^*|\leqslant\eta$,则称 η 为近似值 x^* 的绝对误差限.

③ 相对误差

称 $\varepsilon_r(x)=\dfrac{\varepsilon(x)}{x}=\dfrac{x-x^*}{x}$ 为近似值 x^* 的相对误差.

在实际问题中常取 $\varepsilon_r^*(x)=\dfrac{\varepsilon(x)}{x^*}=\dfrac{x-x^*}{x^*}$ 为近似值 x^* 的相对误差.

④ 相对误差限

如果 $|\varepsilon_r(x)|\leqslant\delta$,则称 δ 为近似值 x^* 的相对误差限.

⑤ 有效数字

设准确值 x 的近似值 x^* 可表示为

$$x^* = \pm(a_1+a_2\times10^{-1}+a_3\times10^{-2}+\cdots+a_n\times10^{-n+1})\times10^m$$

其中 m 是整数,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 0 到 9 之间的一个数字,且 $a_1\neq0$,如果 $|x-x^*|\leqslant\dfrac{1}{2}\times10^{m-n+1}$,则称近似值 x^* 具有 n 位有效数字.

⑥ 有效数字与相对误差的联系

定理 1 若近似数 $x^*=\pm(a_1+a_2\times10^{-1}+a_3\times10^{-2}+\cdots+a_n\times10^{-n+1})\times10^m$ 具有 n 位有效数字,则其相对误差满足

$$|\varepsilon_r^*(x)|\leqslant\frac{1}{2a_1}\times10^{-n+1}$$

定理 2 若近似数 $x^*=\pm(a_1+a_2\times10^{-1}+a_3\times10^{-2}+\cdots+a_n\times10^{-n+1})\times10^m$ 的相对误差满足

$$|\varepsilon_r^*(x)| \leqslant \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$$

则 x^* 具有 n 位有效数字.

2. 数值计算中应注意的一些问题

(1) 要使用数值稳定的算法.

(2) 要避免两个相近的数相减.

(3) 要避免除数的绝对值远小于被除数的绝对值.

(4) 要防止大数“吃掉”小数的现象.

(5) 注意简化运算步骤,减少运算次数.

二、题型分析与解题方法

例 1　问 3.142,3.141,$\frac{22}{7}$分别作为 π 的近似值各具有几位有效数字?

分析　利用有效数字的概念可直接得出.

解　$\pi = 3.141\ 592\ 65\cdots$

记 $x_1 = 3.142$, $x_2 = 3.141$, $x_3 = \frac{22}{7}$.

由 $\pi - x_1 = 3.141\ 59\cdots - 3.142 = -0.000\ 40\cdots$知

$$\frac{1}{2} \times 10^{-4} < |\pi - x_1| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

因而 x_1 具有 4 位有效数字.

由 $\pi - x_2 = 3.141\ 59\cdots - 3.141 = 0.000\ 59\cdots$知

$$\frac{1}{2} \times 10^{-3} < |\pi - x_2| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

因而 x_2 具有 3 位有效数字.

由 $\pi - \frac{22}{7} = 3.141\ 59\cdots - 3.142\ 85\cdots = -0.001\ 26\cdots$知

$$\frac{1}{2} \times 10^{-3} < \left|\pi - \frac{22}{7}\right| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

因而 x_3 具有 3 位有效数字.

例 2　已知近似数 x^* 有两位有效数字,试求其相对误差限.

分析　本题显然应利用有效数字与相对误差的关系.

解　利用有效数字与相对误差的关系.这里 $n=2$,a_1 是 1 到 9 之间的数字.

$$|\varepsilon_r^*(x)| = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1} \leqslant \frac{1}{2 \times 1} \times 10^{-2+1} = 5\%$$

例 3　已知近似数的相对误差限为 0.3%,问 x^* 至少有几位有效数字?

分析　本题利用有效数字与相对误差的关系.

解 a_1 是 1 到 9 间的数字.

$$\varepsilon_r^*(x)=0.3\%=\frac{3}{1000}<\frac{1}{2\times10^2}=\frac{1}{2\times(9+1)}\times10^{-1}\leqslant\frac{1}{2(a_1+1)}\times10^{-1}$$

设 x^* 具有 n 位有效数字,令 $-n+1=-1$,则 $n=2$,从而 x^* 至少具有 2 位有效数字.

例 4 计算 $\sin1.2$,问要取几位有效数字才能保证相对误差限不大于 0.01%.

分析 本题应利用有效数字与相对误差的关系.

解 设取 n 位有效数字. 由 $\sin1.2=0.93\cdots$,故 $a_1=9$.

$$\varepsilon_r^*(x)=\frac{|x-x^*|}{|x^*|}\leqslant\frac{1}{2a_1}\times10^{-n+1}\leqslant0.01\%=10^{-4}$$

解不等式 $\frac{1}{2a_1}\times10^{-n+1}\leqslant10^{-4}$ 知取 $n=4$ 即可满足要求.

例 5 计算 $\frac{1}{759}-\frac{1}{760}$,视已知数为精确值,用 4 位浮点数计算.

解 $\frac{1}{759}-\frac{1}{760}=0.131\,8\times10^{-2}-0.131\,6\times10^{-2}=0.2\times10^{-5}$

结果只有一位有效数字,有效数字大量损失,造成相对误差的扩大,若通分后再计算:

$$\frac{1}{759}-\frac{1}{760}=\frac{1}{759\times760}=\frac{1}{0.576\,8\times10^6}=0.173\,4\times10^{-5}$$

就得到 4 位有效数字的结果.

此例说明,在数值计算中,要特别注意两相近数作减法运算时,有效数字常会严重损失,遇到这种情况,一般采取两种办法:第一,应多保留几位有效数字;第二,将算式恒等变形,然后再进行计算. 例如,当 x 接近于 0,计算 $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 时,应先把算式变形为

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos^2x}{\sin x(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

再计算. 又例如,当 x 充分大时,应作变换

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$$

例 6 计算 $a=(\sqrt{2}-1)^6$,取 $\sqrt{2}\approx1.4$,采用下列算式计算:

(1) $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$;

(2) $99-70\sqrt{2}$;

(3) $(3-2\sqrt{2})^3$;

(4) $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$.

问哪一个得到的结果最好?

解　显然

$$a = (\sqrt{2}-1)^6 = \frac{(\sqrt{2}-1)^6(\sqrt{2}+1)^6}{(\sqrt{2}+1)^6} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$$

$$(\sqrt{2}-1)^6 = [(\sqrt{2}-1)^2]^3 = (3-2\sqrt{2})^3 = 99-70\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{2}-1)^6 = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6} = \frac{1}{[(\sqrt{2}+1)^2]^3} = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$$

所以(1)≡(2)≡(3)≡(4),这4个算式是恒等的,但当取$\sqrt{2}\approx 1.4$计算时,因为(2),(3)都涉及到两个相近数相减,使有效数字损失,而(1)在分母算式上的乘幂数比算式(4)大,所以算式(4)最好,事实上,当取$\sqrt{2}\approx 1.4$时,有$|\Delta x|<0.015$,再由$f(x)$的误差$|f(x+\Delta x)-f(x)|\approx|f'(1.4)||\Delta x|$也可直接估计出每个算式的误差,显然,算式(4)误差最小.

具体计算可得:

(1) $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}\approx 5.2\times 10^{-3}$;

(2) $99-70\sqrt{2}\approx 1.0$;

(3) $(3-2\sqrt{2})^3\approx 8.0\times 10^{-3}$;

(4) $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}\approx 5.1\times 10^{-3}$.

比较可得用第(4)个算式所得的结果更接近于a.

例 7　求二次方程$x^2-(10^9+1)x+10^9=0$的根.

解　由于$x^2-(10^9+1)x+10^9=(x-10^9)(x-1)$,所以方程的两个根分别为

$$x_1 = 10^9, \qquad x_2 = 1$$

但如果应用一般二次方程$ax^2+bx+c=0$的求根公式:

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

由于当遇到$b^2\gg 4|ac|$的情形时,有$|b|\approx\sqrt{b^2-4ac}$,则用上述公式求出的两个根中,总有一个因用了两个相近的近似数相减而严重不可靠.如本例若在能将规格化的数表示到小数点后8位的计算机上进行计算,则$-b=10^9+1=0.1\times 10^{10}+0.000\,000\,0001\times 10^{10}$,由于第二项最后两位数“01”在机器上表示不出来,故它在上式的计算中不起作用,即在计算机运算时,$-b=10^9$.

通过类似的分析可得

$$\sqrt{b^2-4ac} \approx |b| = 10^9$$

所以,求得的两个根分别为

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \approx \frac{10^9+10^9}{2} = 10^9$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \approx \frac{10^9-10^9}{2} = 0$$

显然,根 x_2 是严重失真的.

为了求得可靠的结果,可以利用根与系数的关系式:$x_1x_2=\frac{c}{a}$,在计算机上采用如下公式:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{c}{ax_1} \end{cases}$$

其中,$\operatorname{sgn}(b)$是 b 的符号函数,当 $b\geqslant 0$ 时 $\operatorname{sgn}(b)=1$;当 $b<0$ 时,$\operatorname{sgn}(b)=-1$.显然,上述求根公式避免了相近数相减的可能性.

例 8 当 N 充分大时,如何计算

$$I=\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

分析 函数$\frac{1}{1+x^2}$的原函数已知,我们自然考虑用 Newton-Leibniz 公式求这个定积分的值.由于 N 很大,这样会遇到两个相近的数相减,因此,应采用一些变换公式来避免这种情况.

解 若用定积分的 Newton-Leibniz 公式计算此题,有 $\int_N^{N+1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan(N+1)-\arctan N$,则当 N 充分大时,因为$\arctan(N+1)$和 $\arctan N$ 非常接近,两者相减会使有效数字严重损失,从而影响计算结果的精度,这在数值计算中是要尽量避免的,但是通过变换计算公式,例如:令 $\tan\theta_1=N+1$,$\tan\theta_2=N$,则由 $\tan(\theta_1-\theta_2)=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{N+1-N}{1+(N+1)N}=\frac{1}{1+(N+1)N}$,得

$$\theta_1-\theta_2=\arctan(N+1)-\arctan N=\arctan\frac{1}{1+(N+1)N}$$

就可以避免两相近数相减引起的有效数字损失,从而得到较精确的结果.所以,当 N 充分大时,用$\int_N^{N+1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan\frac{1}{1+N+N^2}$计算积分的值较好.

例 9 计算积分 $I_n=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

分析　数值计算中应采用数值稳定的算法，因此在建立算法时，应首先考虑它的稳定性.

解　利用分部积分法，有

$$\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}\mathrm{e}^{x-1} = x^n\mathrm{e}^{x-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{x-1} n x^{n-1}\mathrm{d}x = 1 - n\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x$$

得递推公式：

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{1}$$

$$I_0 = \int_0^1 x^0 \mathrm{e}^{x-1}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

利用公式(1)计算 I_n，由于初值 I_0 有误差，不妨设求 I_0 的近似值 I_0^* 时有大小为 ε 的误差，即

$$I_0^* = I_0 + \varepsilon$$

则由递推公式(1)得

$$\begin{aligned}
I_1^* &= 1 - I_0^* = 1 - I_0 - \varepsilon = I_1 - \varepsilon \\
I_2^* &= 1 - 2I_1^* = 1 - 2I_1 + 2\varepsilon = I_2 + 2!\varepsilon \\
I_3^* &= 1 - 3I_2^* = 1 - 3I_2 - 3\times 2!\varepsilon = I_3 - 3!\varepsilon \\
I_4^* &= 1 - 4I_3^* = 1 - 4I_3 + 4\times 3!\varepsilon = I_4 + 4!\varepsilon \\
&\vdots \\
I_n^* &= I_n + (-1)^n n!\varepsilon
\end{aligned}$$

显然初始数据的误差 ε 是按 $n!$ 的倍数增长的，误差传播得很快，例如当 $n=10$ 时，$10!\approx 3.629\times 10^6$，$|I_{10}^* - I_{10}| = 10!\,\varepsilon$，这表明 I_{10} 时已把初始误差 ε 扩大了很多倍，从而 I_{10}^* 的误差已把 I_{10} 的真值淹没掉了，计算结果完全失真.

但如果递推公式(1)改成

$$I_{n-1} = \frac{1}{n}(I - I_n) \quad (n = k, k-1, \cdots, 3, 2)$$

于是，在从后往前计算时，I_n 的误差减少为原来的$\frac{1}{n}$，所以，若取 n 足够大，误差逐步减小，显然，计算的结果是可靠的. 所以，在构造或选择一种算法时，必须考虑到它的数值稳定性问题，数值不稳定的算法是不能使用的.

例 10　为了使计算

$$y = 10 + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{6}{(x-1)^3}$$

的乘除法运算次数尽量地少，应将表达式改写为怎样的形式？

解　设 $t = \frac{1}{x-1}$，$y = 10 + (3 + (4 - 6t)t)t$.

在数值计算中，应注意简化运算步骤，减少运算次数，使计算量尽可能小.

三、综合复习题

1. 若 $x^* = 3587.64$ 是 x 的具有六位有效数字的近似值，求 x 的绝对误差限.

2. 为使$\sqrt{70}$的近似值的相对误差小于 0.1，问查开方表时，要取几位有效数字?

3. 利用四位数学用表求 $x = 1 - \cos 2°$的近似值，采用下面等式计算：

(1) $1 - \cos 2°$

(2) $2\sin^2 1°$

问哪一个结果较好?

4. 求方程 $x^2 - 56x + 1 = 0$ 的两个根，使它至少具有四位有效数字(已知$\sqrt{783} \approx 27.982$).

5. 数列$\{x\}_{n=0}^{\infty}$满足递推公式

$$x_n = 10x_{n-1} - 1 \quad (n = 1,2,\cdots)$$

若取 $x_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$(三位有效数字)，问按上述递推公式，从 x_0 计算到 x_{10}时误差有多大? 这个计算过程稳定吗?

6. 如果近似值 $x^* = \pm(a_1 + a_2 \times 10^{-1} + a_3 \times 10^{-2} + \cdots + a_n \times 10^{-n+1}) \times 10^m$ 的相对误差限小于$\dfrac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$，证明：这个数具有 n 位有效数字.

四、复习题答案

1. 0.005

2. 取 3 位有效数字

3. (1)有一位有效数字，(2)有二位有效数字，显然(2)式较好.

4. 用解二次代数方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个求根公式，有

$$x_1 = \frac{-b - \operatorname{sgn}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{56 + \sqrt{56^2 - 4}}{2}$$

$$= 28 + \sqrt{783} \approx 55.983$$

$$x_2 = \frac{c}{ax_1} = \frac{1}{28 + \sqrt{783}} \approx \frac{1}{55.983} \approx 0.017\,863$$

5. $10^{10}\varepsilon < 10^{10} \times \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 10^8$.

显然，误差积累很大，按递推公式 $x_n = 10x_{n-1} - 1$，求 x_{10}时，会把初始误差 ε 扩大 10^{10}倍，使计算精度受到严重影响，因此，这个计算过程不稳定.

第二章　插值与逼近

为了计算函数值或分析函数的性态，必须首先由实验或观测数据找出函数关系的一个近似表达式．插值与逼近就是用简单函数为各种离散数据建立连续的数学模型，使其既能达到精度要求，又使计算量尽可能小．插值与逼近理论是数值计算的最基本内容．

一、内容要点

(一)插值方法

1．代数插值的概念

设函数 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，且已知它在$[a,b]$上 $n+1$ 个互异点$\{x_i\}_{i=0}^n$上的函数值为$\{y_i\}_{i=0}^n$，求一个次数$\leqslant n$ 的多项式$P_n(x)$，满足条件

$$P_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{2.1}$$

称这类问题为 n 次代数插值问题，称 $P_n(x)$为函数 $f(x)$的 n 次代数插值多项式，称点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点，称(2.1)为插值条件．

定理 2.1　满足条件(2.1)的 n 次代数插值多项式$P_n(x)$是存在且惟一的．

Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$和 Newton 插值多项式 $N_n(x)$是 n 次代数插值问题的解$P_n(x)$的两种表示形式．

2．Lagrange 插值多项式

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$$

其中 $l_i(x)=\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq i}}^n \dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$ 称为以$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点的n 次 Lagrange 插值基函数．

定理 2.2　设 $L_n(x)$是过点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 次 Lagrange 插值多项式，若 $f(x)$在$[a,b]$上存在 $n+1$ 阶导数，则对任意给定的 $x\in[a,b]$，总存在一点 $\xi\in(a,b)$(依赖于 x)，使

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

3. Newton 插值多项式

(1) 差商的概念

称 $f[x_i,x_j]=\dfrac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$为函数$f(x)$在点 x_i,x_j 处的一阶差商.

称 $f[x_i,x_j,x_k]=\dfrac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}$为函数$f(x)$在点 x_i,x_j,x_k 处的二阶差商.

一般地,称 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\dfrac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_k]}{x_0-x_k}$为函数$f(x)$在点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 处的k 阶差商.

规定 $f[x_i]=f(x_i)$为 $f(x)$在点 x_i 处的零阶差商.

(2) 差商的性质

1° n 次多项式$P(x)$的 k 阶差商 $P[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x]$,当 $k\leqslant n$ 时是一个 $n-k$次多项式;而当 $k>n$ 时恒等于 0.

2° 差商可表示为函数值的线性组合:

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{w'_{n+1}(x_i)}f(x_i)$$

其中 $w_{n+1}(x)=\prod\limits_{j=0}^{n}(x-x_j)$.

3° 差商关于所含节点是对称的.

4° 设 $f(x)$在$[a,b]$上有 n 阶导数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

(3) 差商表

(4) Newton 插值多项式

$$\begin{aligned}N_n(x)=&f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots\\&+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\end{aligned}$$

其余项为

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

(5) 差分与等距节点插值公式

1° 差分记号

设与等距节点 $x_i=x_0+ih\,(i=0,1,2,\cdots,n)$相应的函数值为 $f_i=f(x_i)$,称 $\Delta f_i=f_{i+1}-f_i$ 为$f(x)$在点 x_i 处的一阶向前差分.

称 $\Delta^2 f_i=\Delta(\Delta f_i)=\Delta f_{i+1}-\Delta f_i$ 为函数在点 x_i 处的二阶向前差分.

一般地,称 $\Delta^m f_i=\Delta(\Delta^{m-1}f_i)=\Delta^{m-1}f_{i+1}-\Delta^{m-1}f_i\,(m=2,3,\cdots)$为函数 $f(x)$在点 x_i 处的 m 阶向前差分.

规定 $\Delta^0 f_i = f_i$ 为 $f(x)$在点 x_i 处的零阶差分.

称$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$为 $f(x)$在点 x_i 处的一阶向后差分.

称$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}$为 $f(x)$在点 x_i 处的二阶向后差分.

称$\nabla^m f_i = \nabla(\nabla^{m-1} f_i) = \nabla^{m-1} f_i - \nabla^{m-1} f_{i-1}(m = 2,3,\cdots)$为 $f(x)$在点 x_i 处的 m 阶向后差分.

2° 等距节点的插值公式

Newton 向前插值公式

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th)$$
$$= f_0 + \frac{t}{1!}\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

其余项为

$$R_n(x) = R_n(x_0 + th) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}t(t-1)\cdots(t-n)\cdot f^{(n+1)}(\xi)$$

Newton 向后插值公式

$$N_n(x) = N_n(x_n + th)$$
$$= f_n + \frac{t}{1!}\nabla f_n + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_n + \cdots + \frac{t(t+1)\cdots(t+n-1)}{n!}\nabla^n f_n$$

余项为

$$R_n(x) = R_n(x_n + th) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}t(t+1)\cdots(t+n)f^{(n+1)}(\xi)$$

4. 分段线性插值

设在区间$[a, b]$上给定 $n+1$ 个插值节点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

和相应的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$,求作一个插值函数 $\varphi(x)$,具有性质

1° $\varphi(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$.

2° $\varphi(x)$在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$上是线性函数.

5. Hermite 插值

设已知函数 $f(x)$在插值区间$[a, b]$上 $n+1$ 个互异的节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上的函数值$y_i = f(x_i)$及一阶导数值 $m_i = f'(x_i)$ $(i = 0,1,\cdots,n)$,构造一个插值函数 $H_{2n+1}(x)$,使满足条件

1° $H_{2n+1}(x)$是次数$\leqslant 2n+1$ 的多项式.

2° $H(x_i) = y_i,\ H'(x_i) = m_i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$ (2.2)

称这类插值问题为 Hermite 插值问题.

定理 2.3 满足条件(2.2)的 Hermite 插值问题的解 H_{2n+1}是存在且惟一的,其表达式为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}[1-2l_i'(x_i)(x-x_i)]l_i^2(x)y_i+\sum_{i=0}^{n}(x-x_i)l_i^2(x)m_i$$

定理 2.4 若 $f(x)$在$[a, b]$上有 $2n+2$ 阶导数，则对任意 $x\in[a,b]$，总存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$$

6. 分段三次 Hermite 插值

设在区间$[a, b]$上给定 $n+1$ 个插值节点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

和相应的函数值 $y_i=f(x_i)$及导数值 $m_i=f'(x_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$，构造一个插值函数 $H(x)$，满足条件

1° $H(x_i)=y_i, H'(x_i)=m_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

2° 在每个子区间$[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$上是三次多项式.

7. 三次样条插值

(1) 三次样条插值函数的概念

设在区间$[a, b]$上取 $n+1$ 个节点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

给定这些点上的函数值 $y_i=f(x_i)$.

若函数 $S(x)$满足条件：

1° $S(x_i)=y_i$ $(i=0,1,2,\cdots,n.)$

2° 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$上是一个三次多项式.

3° $S(x)\in C^2[a,b]$.

则称 $S(x)$为三次样条插值函数.

(2) 常见的边界条件

1° $S'(a), S'(b)$取给定值.

2° $S''(a), S''(b)$取给定值.

3° $S^{(p)}(a+0)=S^{(p)}(b-0)$ $(p=0,1,2)$

(二)函数的平方逼近

1. 预备知识

(1)内积

设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，定义

$$(f,g)=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上带权 $\rho(x)$的内积.