

科學譯叢

湍流底微結構

奧布霍夫^作
雅格洛姆

中國科學院出版

科學叢書

——理論及應用力學：第1冊——

· 湍流底微結構

A. M. 奧布霍夫

A. M. 雅格洛姆

作

莊逢甘

胡海昌

譯

中國科學院出版

1953年9月

譯 者 前 言

湍流是流體力學中的一個基本問題。它與許多實用的問題有密切的關係，例如水管阻力的問題、泥沙沉澱問題等等。由於大氣的流動都是湍流，因此如何建造防風林的問題也和湍流的研究有密切的關係。有系統地研究湍流最早的是雷諾¹⁾，之後泰勒²⁾和卡門³⁾對各向同性湍流的統計理論作了比較深入的研究。但是，這些研究離解決實用問題的需要還相距很遠，因為實際上所遇到的都是剪湍流（即各向異性的湍流）。我國周培源⁴⁾教授在 1940 年首先推廣了雷諾底理論，初步解決了剪湍流的一些應用問題。在蘇聯柯爾莫果洛夫⁵⁾於 1941 年提出了局部各向同性的理論；這一理論基本上解決了所有湍流底微結構。由於蘇聯這方面科學工作者不斷的努力，柯爾莫果洛夫底理論之實用價值也就日益顯著。原文根據柯爾莫果洛夫底理論，對湍流底速度場、壓力場和加速度場底微結構作了進一步的研究。

1) Reynolds, Osbovne, Collected Papers, 第 51 頁。

2) Taylor, G. I., *Proc. Roy. Soc.*, 1935.

3) Karman, Th. von, and Howarth, L., *Proc. Roy. Soc.*, 1938.

4) 周培源, 中國物理學報, 1940, 第 1—33 頁。

5) Колмогоров, А. Н., *ДАН СССР*, 1941.

目 錄

譯者前言

緒 論	1
第一節 速度場結構函數的計算	5
第二節 壓力場結構函數的計算	14
第三節 加速度場相關函數的計算	25
參考文獻	39

湍流底微結構

緒 論

A. H. 柯爾莫果洛夫^[1,2]在 1941 年提出了一個局部各向同性湍流的理論，推斷了在很大雷諾數時，關於湍流底一系列的定律，其中最重要的是二點速度差的均方根與其相互距離的關係及湍流擴散係數與巨標度長的關係。這是 A. H. 柯爾莫果洛夫^[1,2]和 A. M. 奧布霍夫^[3]在同一年得到的結果。現在這許多定律已由很多在風洞裏^[4,5]、在大氣裏^[6,7]以及在海洋裏^{[8] 1)}的直接實驗證明。最近幾年在蘇聯科學院地球物理研究所大氣湍流實驗館做了一系列的研究，把這理論更推進一步。這一系列研究的一部份結果將在本文中加以敘述²⁾。

柯爾莫果洛夫理論底基本物理概念，可以簡短地總結如下：³⁾ 在很大雷諾數時，湍流可以當作是一個相差很大的、各種極不同標度長擾動(漩渦)的疊加。祇有最大的漩渦是直接由於均流底不穩定性所產生的。最大漩渦底標度長 L 和均流有很顯著變化所需的距離是同樣大小(例如在湍流邊界層內 L 與離牆的距離同樣大小)。⁴⁾

1) 關於這些定律在大氣物理學中的應用，可在文章 [9, 10] 中找到。

2) 除去在本文中包含的結果以外，還可以指出在 [11, 12] 中敘述的關於湍流中溫度場(或任意非活性混合物的濃度場)的理論研究。這些結果的應用可在文章 [13, 14] 中找到。

3) 較詳細的討論見參考書 [15]。

4) 注意，長度 L 就是在半經驗湍流理論中的混合長度(Путь смещения)。

最大漩渦本身的運動也是不穩定的，因而產生較小的二級漩渦，二級漩渦再產生較小的三級漩渦，這樣一直下去直到早就顯示穩定性的最小漩渦（即這種漩渦，它們底特性雷諾數較臨界雷諾數為小）。

對所有的漩渦而言，除其中最小的之外，它們底特性雷諾數都是很大的。所以在這些漩渦的運動裏面，黏性沒有顯著的影響。因此，所有不太小的漩渦底運動並無顯著的能量耗散。基本上，所有 n 級漩渦底能量都是從 $(n-1)$ 級漩渦內獲得的，但它同時又費部份能量去產生 $(n+1)$ 級漩渦。至於存在的最小漩渦底運動則是片流的與分子黏性有很大的關係，在這一羣最小漩渦內，沿漩渦串級（каскад）傳來的動能變成了熱能。

除最大的漩渦以外，全部漩渦底運動，可以當作是均勻的、各向同性的。即使在較低級的漩渦裏也已停止感到均流方位的影響（ориентирующее влияние）。還有，這一運動也可以當作準穩定的，因為這些漩渦運動底統計特性的變化，如用漩渦底特性週期作為時間量度，是進行得很慢的。這兒我們就可得到這樣的結論：所有這些漩渦（設它們底標度長較 L 即流底微結構或局部結構小得很多）底運動，必須遵守幾個一般的統計定律，而並不依靠外部的幾何形狀和均流底性質。建立這些有很廣大應用範圍的一般的定律就組成了局部相似各向同性湍流理論底內容。

在研究局部結構定律的過程中，相似理論和維理論的推理有很大的價值；這些推理可使我們得到一系列主要的結果，為了應用這些理論，我們必需首先決定流動底局部結構所依靠的

那些基本量。由於我們所考慮的這一漩渦集合底運動是均勻和各向同性的，均流的特性（例如特性長、特性速度等等）不會在基本量中出現。因此，就祇餘下了兩個基本量：在單位時間內、單位質量流體的平均能量耗散 ε （它決定沿不同標度長的漩渦串級傳下來的流動能強度）和動黏係數 ν （它是消耗過程的基本因素）¹⁾。這兩個數量在下面所敘述的理論內，均將佔有主要地位。 ε 和 ν 的單位是

$$[\varepsilon] = L^2 T^{-3}, \quad [\nu] = L^2 T^{-1}.$$

很明顯的，這兩個數量祇能有一個單位是長度的組合

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}}$$

長度 η 決定了一局部結構的特性，內標度長。應用上面所提到的湍流底物理圖象，我們可認為 η 是最小漩渦底標度長，在這羣小漩渦之內，有大量的能量耗散（因為在這一圖案內，不再包含有其他的特性長度）。A. H. 柯爾莫果洛夫第一個引進了 η 標度長；他叫它做湍流底內（或局部）標度長（相對外標度長 L 而言）。

我們發現，在進一步分析微結構的過程中分開考慮兩種極端情況是有很多便利的：一種是標度長較 η 大得很多的情況，

1) 我們假定流體是不可壓縮的，同時流體底密度為一常數，密度 ρ 並沒有被包括在基本數量中。在本文的主要部份第一節及第三節，我們純粹討論流動的運動特性，當然，這些特性是和密度無關的，但當研究第二節壓力場的時候，我們必需在 ε 和 ν 之外再加上 ρ 。關於溫度場局部結構所依賴的基本量可參看文章 [11, 12]。

另一種是標度長較 η 小得很多的情況。我們先挑選一羣漩渦集合，它們底尺度比 L 小得很多，但對最小漩渦底標度長 η 而言，却是很大。我們早已指出，這羣漩渦底運動是不依靠黏性的——這樣的結論立刻就能幫助我們從維的計算裏面得出具體的結果。在第二種極端情況中——這裏運動的標度長要比 η 小得很多——，我們可以把運動作為片流的，這對運動規律的探討也有大幫助，但是在中間一段區域，即標度長和 η 是同級大小的時候，單靠維理論所得的結果就比較不具體。例如根據維理論，任何局部結構所決定的無維的距離的函數都必須是 $\frac{r}{\eta}$ 底普用函數 (универсальная функция)，但這一函數當 $\frac{r}{\eta} \approx 1$ 時底形狀仍不能決定。

在本文中，我們做了對一些基本流體動力場（速度場、壓力場和加速度場¹⁾）底結構，當所有的距離都較 L 為小的時候（即在柯爾莫果洛大理論適用範圍以內），加以數量說明的嘗試，為了這一目的我們引進了幾個有實驗根據的輔助假定，這樣我們得到了一些已知的結果，特別是 $r \ll \eta$ 和 $r \gg \eta$ 時的漸近式。我們更進一步發現了在以前結果中的所有未定常數，都可用一個常數 S （偏斜）表示出來。 S 底值已由湯遜從實驗量得。我們更看到無維量 S （像 ϵ 與 ν ）祇在特性標度長的式子中出現。所以在單位量度選擇的準確程度以內，根據我們這些假定，所有場底結構都可用普用函數來說明，而並不依靠特殊的實驗數據（見下圖 1, 2 及 3，這些函數的意義將在本文中

1) 在現在及以下的討論，所謂加速度是指全加速度 $\frac{Dv}{Dt}$ 。

相當的地方加以說明)。

本文中，第一節關於速度場結構的研究是屬於 A. M. 奧布霍夫；第二節關於壓力場的研究是由 A. M. 奧布霍夫開頭^[16]，後由 A. M. 雅格洛姆繼續進行；第三節關於加速度場的研究是由 A. M. 雅格洛姆完成的。本文的一部份結果曾在幾篇短文中發表過^[7,6,17]。

一、速度場結構函數的計算

為了可能將局部各向同性的概念，應用來研究湍流底速度場，我們必需首先選出祇依靠局部結構的特性。我們注意到，實在速度 V 本身大部份是由均流所決定。通常在湍流理論中我們把實在速度分成兩部份：均速 $\bar{V}$ 和速的漲落 $V' = V - \bar{V}$ ，很明顯的 V' 與均流無關，但這並不解決我們提出的問題，因為 V' 底值，絕大部份是由於標度長相當於 L 的最大漩渦所產生的。A. H. 柯爾莫果洛夫首先注意到考慮足夠相近的二鄰點速度底差可以給我們一個必要的選擇（即相鄰二流體素底相對運動）。很清楚的，帶有這兩點的大漩渦底整體運動，對於這速度差是沒有影響的。所以在局部各向同性的湍流理論內，作為速度場結構底基本函數特性是

$$D_{ij}(M, M') = \overline{[v_i(\vec{M}) - v_i(M)] [v_j(\vec{M}') - v_j(M)]} \quad (i, j=1, 2, 3), \quad (1.1)$$

這裏 $v_i(M)$ 代表在 M 點速度向量 $\vec{V}(M)$ 沿 i 方向的分量，上面一橫線是表示平均值。函數 $D_{ij}(M, M')$ 叫做速度場底結

構函數。根據上面所講的，當 M 與 M' 之間的距離 r 比 L 小得很多的時候，這些函數祇與流動底局部結構有關。由於標度長較 L 小得很多的漩渦運動底均勻性與各向同性，當 $r \ll L$ 時 $D_{ij}(M, M')$ 是相對向量 $\overrightarrow{MM'}$ 底不變張量函數，因此可寫成這樣的形式：

$$D_{ij}(M, M') = A(r) \xi_i \xi_j + B(r) \delta_{ij}, \quad (1.2)$$

此處 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是向量 $\overrightarrow{MM'}$ 底分量（所以 $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} = r$ ）；當 $i = j$, $\delta_{ij} = 1$ ；當 $i \neq j$, $\delta_{ij} = 0$ 。

在這個公式內，先令 $V_i = V_i = V_n$, V_n 是速度向量在任意一垂直於向量 $\overrightarrow{MM'}$ 方向上的射影；然後令 $V_i = V_i = V_l$, V_l 是 $\overrightarrow{V}$ 沿 $\overrightarrow{MM'}$ 方向的射影。我們很容易相信 (1.2) 可以寫成這樣的形式：

$$D_{ij}(M, M') = \frac{D_{ll}(r) - D_{nn}(r)}{r^2} \xi_i \xi_j + D_{nn}(r) \delta_{ij}, \quad (1.3)$$

這裏 $D_{ll}(r)$ 與 $D_{nn}(r)$ （縱結構函數與橫結構函數）有簡單的物理意義：

$$D_{ll}(r) = [\overline{V_l(M') - V_l(M)}]^2, \quad D_{nn}(r) = [\overline{V_n(M') - V_n(M)}]^2 \quad (1.4)$$

本節¹⁾的主要目的就在決定 $D_{ll}(r)$ 與 $D_{nn}(r)$ 。

1) 在各向同性湍流理論內，我們常用相關函數（縱與橫）

$$B_{ll}(r) = \overline{V_l(M) V_l(M')}, \quad B_{nn}(r) = \overline{V_n(M) V_n(M')}.$$

各向同性的結構函數和相關函數有如下的關係：

$$D_{ll}(r) = 2[B(0) - B_{ll}(r)], \quad D_{nn}(r) = 2[B(0) - B_{nn}(r)],$$

這裏 $B(0) = B_{ll}(0) = B_{nn}(0)$ 。

在局部各向同性湍流理論內，我們可以把結構函數 $D_{ll}(r)$ 與 $D_{nn}(r)$ 當作與時間無關。這是根據在充分小標度長範圍內統計區域準穩定的假設。從相似理論出發，可得到在湍流局部各向同性理論適用區域以內（即 $r \ll L$ ）， $D_{ll}(r)$ 與 $D_{nn}(r)$ 二函數可用這樣的形式來表示：

$$D_{ll}(r) = \sqrt{\nu} \varepsilon^{-1/2} d_{ll}\left(\frac{r}{\eta}\right), \quad D_{nn}(r) = \sqrt{\nu} \varepsilon^{-1/2} d_{nn}\left(\frac{r}{\eta}\right), \quad (1.5)$$

這裏 $\eta = (\nu^3 \varepsilon^{-1})^{1/4}$ 是湍流底內標度， $d_{ll}(x)$ ， $d_{nn}(x)$ 是兩個普用函數。

很顯然的，公式 (1.5) 同樣可寫成下列形式：

$$D_{ll}(r) = u_1^2 \beta_{ll}\left(\frac{r}{\eta_1}\right), \quad D_{nn}(r) = u_1^2 \beta_{nn}\left(\frac{r}{\eta_1}\right), \quad (1.6)$$

這裏

$$\eta_1 = \kappa_1 \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\varepsilon}}, \quad u_1 = \kappa_2 \sqrt{\nu \varepsilon},$$

κ_1 與 κ_2 是兩個數字倍數，我們可斟酌選擇它們的大小；假定 κ_1 ， κ_2 和 1 同級大小， $\beta_{ll}(x)$ 與 $\beta_{nn}(x)$ 是兩個新的普用函數，它們底圖形可很簡單地從 $d_{ll}(x)$ 與 $d_{nn}(x)$ 底圖形得到，祇需把 x 與 y 軸的標度變換一下。

由於我們上面指出的物理圖象，祇要 $\gamma \gg \eta$ ， $D_{ll}(r)$ 和 $D_{nn}(r)$ 函數必須與動黏係數 ν 無關。所以它們必需有這樣的漸近式：

$$d_{ll}(x) \sim x^{1/2}, \quad d_{nn}(x) \sim x^{1/2} \quad \text{當 } x \gg 1. \quad (1.8)$$

對 $\beta_{ll}(x)$ 和 $\beta_{nn}(x)$ 而言，同樣的等式當然亦成立。於是我們有當 $\gamma \gg \eta$

$$D_{ll}(r) \approx c \varepsilon^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}}, \quad D_{nn}(r) \approx c' \varepsilon^{\frac{1}{3}} r^{\frac{1}{3}} \quad (1.9)$$

(即所謂 $\frac{2}{3}$ 定律)。在另一極端情況下當 $\gamma \ll \eta$ ，速度差 $V(M') - V(M)$ 是和 r 同級大小 (在這距離內，在流體內一點底速度是它位置坐標底連續可微函數)，所以

$$D_{ll}(r) \approx A r^2, \quad D_{nn}(r) \approx A' r^2. \quad (1.10)$$

現在我們根據流體動力學的方程式進行更加全面的理論探討。首先利用連續方程式

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.11)$$

我們很容易證明：

$$D_{nn}(r) = D_{ll}(r) + \frac{r}{2} \frac{d D_{ll}(r)}{d r} \quad (1.12)$$

和

$$[\overline{V(M')} - \overline{V(M)}][\overline{p(M')} - \overline{p(M)}] = 0, \quad (1.13)$$

這裏 $p(M)$ 是在 M 點的壓力 (參看 [2, 15]，同時可比較 [18, 19])。利用 (1.12)，(1.13) 的關係式和運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta V_i \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.14)$$

我們可以證明 $D_{II}(r)$ 函數和三級結構函數 $D_{III}(r)$

$$D_{III}(r) = [\overline{V_I(M') - V_I(M)}]^3 \quad (1.15)$$

有關，

$$D_{III}(r) - 6\nu \frac{dD_{II}(r)}{dr} = -\frac{4}{5}\varepsilon r \quad (1.16)$$

這就是熟知的柯爾莫果洛夫關係¹⁾。

當 $r \ll \eta$ ，我們可以在這個關係式內把 $D_{III}(r)$ 略去（因為這時 $D_{III}(r)$ 和 r^3 大小同級；因此，由於 (1.16) 及 (1.12)，

$$D_{II}(r) = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^5, \quad D_{III}(r) = \frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^5 \quad \text{當 } r \gg \eta. \quad (1.17)$$

這是較 (1.12) 稍為準確一點的關係。另外當 $r \gg \eta$ ，我們可把在 (1.16) 內含有動黏係數的一項略去不計，所以

$$D_{III}(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r \quad \text{當 } r \gg \eta. \quad (1.18)$$

1) 在均勻各向同性湍流中，我們很容易從 (1.14) 方程式引出關於相關函數的方程式

$$\frac{\partial B_{II}}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_{III}}{\partial r} + \frac{4}{r} B_{III} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial^2 B_{II}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial B_{II}}{\partial r} \right),$$

這裏

$$B_{III} = \overline{V_I^2(M) V_I(M')},$$

用在第六頁腳註中的公式用結構函數把相關函數代掉（再用一類似的 B_{III} 的公式），我們得到

$$-4\varepsilon = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \left(D_{III} - 6\nu \frac{dD_{II}}{dr} \right), \quad \left(\varepsilon = -\frac{3}{2} \frac{dB(0)}{dt} \right).$$

上式對 r 積分即可得到方程式 (1.16)。同樣地從各向同性湍流的熟知結果也可以得到 (1.12) 及 (1.13)。我們還可以證明在局部各向同性湍流理論適用範圍以內，方程式 (1.12) (1.13) 及 (1.16) 是成立的。

我們注意在書 [15] 中，方程式 (1.16) 裏 $D_{III}(r)$ 係數的數值有一個筆誤。

現在我們引進一無維量，即速度縱分量差底幾率分佈的偏斜 S ：

$$S = \frac{D_{III}(r)}{\{D_{II}(r)\}^{\frac{3}{2}}} \quad (1.19)$$

我們從維的考慮出發，當 $r \gg \eta$ ， S 必須是一常數值（因為它祇能依 r 和 ε 而定，但從 r 和 ε 不可能組合成一無維量）。從 (1.19)、(1.18) 及 (1.12) 可得，當 $r \gg \eta$ ，

$$D_{II}(r) = \left(-\frac{4}{5S}\right)^{\frac{2}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} r^{\frac{2}{3}}, \quad D_{nn}(r) = (r) \frac{4}{3} \left(-\frac{4}{5S}\right)^{\frac{2}{3}} \varepsilon^{\frac{2}{3}} r^{\frac{2}{3}}.$$

所以在公式 (1.9) 內的係數 c 、 c' 和偏斜 S' 有如下的簡單關係：

$$c = \left(-\frac{4}{5S}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad c' = \frac{4}{3} c.$$

於是我們得到 S 必須到處是負的， $S = -|S|$ 。(1.17)，(1.9) 和 (1.21) 都是 A. H. 柯爾莫果洛夫在 1941 年所得到的公式。

直到現在，從流體動力學方程式得到的結果，祇不過略較維理論的結果精細一些。同時，我們也祇討論了兩種極端的情況 $r \gg \eta$ 和 $r \ll \eta$ 。至於對中間一段 r 值， $D_{II}(r)$ 的計算，我們可利用的祇有一個式子 (1.16) — 當然，這是不夠的；這個式子含有兩個未知函數 $D_{II}(r)$ 和 $D_{III}(r)$ 。因此我們必須有另一個它們中間的關係式，才能把它們決定。理論方面還不能

給我們這一關係。不過，我們可嘗試從實驗數據裏面把它規定出來。

現在，對不同距離 r 的、直接量出的 S 值已經由湯遜在很大雷諾數的風洞試驗中找得，他的目的是要證明柯爾莫果洛夫的理論。這些量度指明了：不單是在 $r \gg \eta$ ，而且一般來講對所有在局部各向同性湍流理論適用範圍內 r 的值， S 可以相當準確地當作常數。對所有的 r 來講，量得的 S 值差不多是 $-0.4^{1)}$ 。這一實驗結果，就給了我們一個 $D_{II}(r)$ 和 $D_{III}(r)$ 底輔助關係，使我們唯一地決定了這些函數對所有 r 而言的值。

因此我們假定偏斜 S 是一常數。由於 (1.16) 和 (1.19)，

$$6\nu \frac{dD_{II}}{dr} + |S| [D_{II}(r)]^{3/2} = \frac{4}{5} \varepsilon r, \quad (1.22)$$

這裏 S 是一常數。這是一個 $D_{II}(r)$ 的方程式，它的係數含有 ν , ε , 與 $|S|$ 。如果我們把上式變成無維方程式，那麼它會簡化得很多。現在我們引進在標度式子內二個待定的數字倍數 κ_1 及 κ_2 ，即利用公式 (1.6) 和 (1.7)。然後我們得到 $\beta_{II}(x)$ 的方程式

$$6 \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1} \frac{d\beta_{II}}{dx} + |S| \kappa_2^3 [\beta_{II}(x)]^{3/2} = \frac{4}{5} \kappa_1 x. \quad (1.23)$$

數量 ε 和 ν 已不在上式中出現，如對 κ_1 和 κ_2 加以適當

1) 實驗所量得的 S 分散在 0.36 與 0.42 中間，這些分散是由於量度可能達到的精密性所規定。湯遜給了 S 一個最可能的值 -0.38 。但是這裏的第二位數字是不能被認為很可靠的。

的選擇，則上式中的實驗常數 S 也可以消去。這樣我們就得到了 $\beta_H(x)$ 底方程式，它的係數都是數字，我們可很方便地選擇 κ_1 與 κ_2 ，使

$$\frac{|S| \kappa_1 \kappa_2}{6} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}, \quad \frac{2}{15} \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2} = 1, \quad (1.24)$$

即令

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{4\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{|S|} \approx \frac{5.035}{|S|}, \\ \kappa_2 &= \frac{4\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{45}} \frac{1}{|S|} \approx \frac{1.838}{|S|}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

於是 $\beta_H(x)$ 的方程式為

$$\frac{d\beta_H(x)}{dx} + \left[\frac{4}{3}\beta_H(x)\right]^{3/2} = x. \quad (1.26)$$

方程式 (1.26) 和開始條件 $\beta_H(0)=0$ 唯一地決定了說明速度場結構的無維縱結構函數 $\beta_H(x)$ ¹⁾。相當的無維橫結構函數 $\beta_m(x)$ ，可由 (1.12) 式決定。利用 (1.6)，(1.12) 可用下列形式表示：

1) 用湍能譜的分佈也能說明湍流結構。

令 $E(p)$ 為波數大於 p 的湍流總能量 (注意湍流底標度長和波數成反比)。我們曾證明在均勻定常過程及場的統計理論中， $E(p)$ 函數和相關 (結構) 函數，有一對應的關係。表示這種關係的公式和傅里葉轉換相似。(見 [20, 3])。結構函數的 $3/2$ 定律相當於當 $p \ll p_1$ 時譜函數 $E(p)$ 與 $p^{-5/3}$ 成比例。(即湍能譜密度 $\frac{dE(p)}{dp} = E(p)$ 跟 $p^{-5/3}$ 成比例)；標度長 η 相當於在譜理論中的臨界波數 $p_1 = \frac{1}{\eta}$ 。在 1941 年 A. M. 奧普霍夫，首先得到了這樣形式的 $3/2$ 定律。本文中對 $D_H(r)$ 的全部敘述，相當於決定不單在 $p \ll p_1$ 時的譜函數，而且決定對所有 p 值的譜函數。在以前曾有一系列直接從理論來計算對所有 p 的譜函數的嘗試 [9, 21, 22, 5]，但是這些結果是很困難和實驗比較的。

$$\beta_{nn}(x) = \beta_{II}(x) + \frac{x}{2} \frac{d\beta_{II}(x)}{dx}. \quad (1.27)$$

圖 1 畫出了 $\beta_{nn}(x)$ 和 $\beta_{II}(x)$ 的圖形, $\beta_{II}(x)$ 是由方程式 (1.26) 加上條件 $\beta_{II}(0)=0$ 用數字積分算出¹⁾。 $\beta_{nn}(x)$ 是

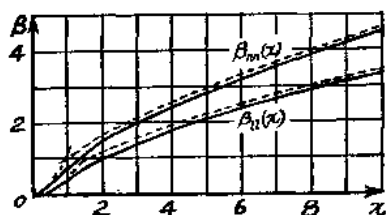


圖 1

從 $\beta_{II}(x)$ 用式子 (1.27) 計算而得。圖 1 中的虛線表示這些函數在 x 很小或很大時候的漸近值:

$$\beta_{II}(x) \approx \frac{1}{2} x^2, \quad \beta_{nn}(x) \approx x^2 \quad \text{當 } x \ll 1, \quad (1.28)$$

$$\beta_{II}(x) \approx \frac{3}{4} x^{2/3}, \quad \beta_{nn}(x) \approx x^{2/3} \quad \text{當 } x \gg 1. \quad (1.29)$$

後一個公式相當於結構函數的漸近式 (1.17) 和 (1.20)。利用這樣簡單的 $\beta_{nn}(x)$ 的漸近式, 我們可以很容易地從找到的

1) 當 x 的值很大時 ($x > 8$), 我們可很方便地利用 $\beta_{II}(x)$ 底漸近式

$$\beta_{II}(x) \sim \frac{3}{4} x^{2/3} \left(1 - \frac{1}{3} x^{-4/3} - \frac{5}{36} x^{-8/3} + \dots \right).$$