

自学成才 函授 夜大用书

高等数学

(习题詳解)

南京工学院出版社

自学成才 函授 夜大用书

高等数学

(习题详解)

吴学澄 焦传桂 许玉筠
张明淳 费月华 黄炳生 袁慰平

编



南京工学院出版社

内 容 提 要

本书是为配合自学、函授、夜大、职大学生学习南京工学院出版社出版的《高等数学》一书而编写的。内容包括该书(上、下册)全部习题、复习题和自我检查题的详细解答。考虑到自学者在学习过程中一般缺乏直接的指导,故本书在解题演算上比较详尽,既注意方法上的指导,又注意解题技巧。

本书可供高等教育自学考试和函授、夜大、职大作教学参考书,亦可供工科大专院校师生参考。

高 等 数 学

(习题详解)

吴学澄 焦传桂 许玉筠 编
张明淳 费月华 黄炳生 袁慰平

*

南京工学院出版社 出版
江苏省新华书店发行
南京工学院印刷厂 印刷

*

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 19 字数: 470千字

1986年2月第一版 1986年2月第一次印刷

印数: 1—20,000册

统一书号: 13409·003 定价: 3.40元

前 言

〈高等数学习题详解〉一书是为配合自学青年学习南京工学院出版社出版的〈高等数学〉一书而编写的，内容包括该书的全部习题、复习题和自我检查题。考虑到自学青年在学习中一般缺乏直接的指导，而教材又限于篇幅对解题演算的方法特别是技巧讨论得比较少，所以本书解题演算比较详尽，讲究解题的方法与技巧。可供自学青年学习做题时校核及参考，从而能在解题方法和技巧上得到提高。亦可供一般函授、夜大、职大、干部班等学员参考使用。

本书各章编写者分别是

第一、二章 焦传桂 第三章及第八章付氏级数部分 许玉筠

第四、九章 吴学澄 第五、十二章 张明淳

第六、十一章 费月华 第七章及第八章其余部分 黄炳生

第十章 袁慰平

由于编写者学识水平有限，加以时间仓促，错误疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以便今后改正。

编 者 1985.10.

目 录

第一章 函 数

习题一.....	1
习题二.....	3
习题三.....	4
习题四.....	6
习题五.....	8
习题六.....	10
自我检查题.....	12

第二章 极 限

习题一.....	13
习题二.....	14
习题三.....	14
习题四.....	15
习题五.....	17
习题六.....	18
习题七.....	19
习题八.....	21
习题九.....	21
习题十.....	23
自我检查题.....	24

第三章 导数与微分

习题一.....	26
习题二.....	31
习题三.....	32
习题四.....	37
习题五.....	39
习题六.....	45
习题七.....	46
习题八.....	52

习题九	54
习题十	57
自我检查题	59

第四章 中值定理和导数应用

习题一	61
习题二	63
习题三	68
习题四	74
习题五	78
习题六	83
习题七	86
复习题	87
自我检查题	91

第五章 不定积分

习题一	94
习题二	94
习题三	98
习题四	102
习题五	104
习题六	107
习题七	109
习题八	113
复习题	114
自我检查题	117

第六章 定积分及其应用

习题一	119
习题二	120
习题三	122
习题四	125
习题五	129
习题六	131
习题七	132
习题八	133
习题九	138
复习题	140

自我检查题.....	145
------------	-----

第七章 常微分方程

习题一.....	147
习题二.....	148
习题三.....	150
习题四.....	151
习题五.....	153
习题六.....	156
习题七.....	157
习题八.....	158
习题九.....	160
习题十.....	161
习题十一.....	163
习题十二.....	164
习题十三.....	165
自我检查题.....	167

第八章 级 数

习题一.....	170
习题二.....	171
习题三.....	174
习题四.....	176
习题五.....	177
习题六.....	180
习题七.....	183
习题八.....	186
习题九.....	193
自我检查题.....	200

第九章 向量代数与空间解析几何

习题一.....	204
习题二.....	206
习题三.....	207
习题四.....	209
习题五.....	212
习题六.....	213
习题七.....	217

习题八.....	221
习题九.....	227
复习题.....	229
自我检查题.....	232

第十章 多元函数及其微分法

习题一.....	235
习题二.....	236
习题三.....	237
习题四.....	243
习题五.....	246
习题六.....	249
习题七.....	252
习题八.....	255
复习题.....	262
自我检查题.....	268

第十一章 重 积 分

习题一.....	273
习题二.....	276
习题三.....	277
习题四.....	279
习题五.....	281
复习题.....	282
自我检查题.....	285

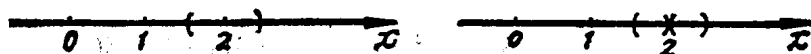
第十二章 曲线积分与曲面积分

习题一.....	287
习题二.....	288
习题三.....	289
习题四.....	290
习题五.....	292
习题六.....	294
复习题.....	296
自我检查题.....	297

第一章 函 数

习 题 一

1. 在图上画出 $N(2, \frac{1}{2})$, $N(\hat{2}, \frac{1}{2})$ 图形。



第 1 题图

第 2 题图

2. 设 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, 求 $f(0)$, $f(-3)$, $f(\sqrt{2})$ 。

解 $f(0) = \frac{1+x}{1-x} \Big|_{x=0} = 1$

$$f(-3) = \frac{1+x}{1-x} \Big|_{x=-3} = \frac{1+(-3)}{1-(-3)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$f(\sqrt{2}) = \frac{1+x}{1-x} \Big|_{x=\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -(3+2\sqrt{2})$$

3. 已知 $f(\theta) = \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$, 求 $f(0)$, $f(\pi)$, $f(\frac{\pi}{2})$ 。

解 $f(0) = \sin^2 0 + \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2}$

$$f(\pi) = \sin^2 \pi + \frac{1}{2} \cos(\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \sin^2 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1$$

4. 已知 $f(x) = \lg(x+3)$, 求 $f(-2)$, $f(7)$, $f(a^2)$ 。

解 $f(-2) = \lg(x+3) \Big|_{x=-2} = \lg(-2+3) = \lg 1 = 0$

$$f(7) = \lg(3+7) = 1$$

$$f(a^2) = \lg(a^2+3)$$

5. 已知 $f(x) = 2^{x-2}$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ 。

解 $f(0) = 2^{x-2} \Big|_{x=0} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$$f(1) = 2^{1-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 2^{2-2} = 1$$

6. 设 $f(x) = x^2 - 9x + 14$, 试证 $f(b+1) = b^2 - 7b + 6$

证 $f(b+1) = (b+1)^2 - 9(b+1) + 14 = b^2 - 7b + 6$

7. 设 $f(x) = x^2 + 4x - 1$, 试证 $f(x+h) - f(x) = (2x+4)h + h^2$

证 $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 + 4(x+h) - 1 - (x^2 + 4x - 1)$
 $= x^2 + 2hx + h^2 + 4x + 4h - 1 - x^2 - 4x + 1$
 $= 2hx + 4h + h^2 = (2x+4)h + h^2$

8. 设 $f(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$, 试证 $f(x-2) = x^3 - 16x^2 + 83x - 140$

证 $f(x-2) = (x-2)^3 - 10(x-2)^2 + 31(x-2) - 30$
 $= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 10x^2 + 40x - 40 + 31x - 60 - 30$
 $= x^3 - 16x^2 + 83x - 140$

9. 已知 $\Phi(x) = \lg \frac{1-x}{1+x}$, 试证 $\Phi(y) + \Phi(x) = \Phi\left(\frac{y+x}{1+xy}\right)$

证 $\Phi(x) + \Phi(y) = \lg \frac{1-x}{1+x} + \lg \frac{1-y}{1+y} = \lg \frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)} = \lg \frac{1-(x+y)+xy}{1+(x+y)+xy}$

$$\Phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = \lg \frac{1-\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)} = \lg \frac{1-(x+y)+xy}{1+(x+y)+xy}$$

$\therefore \Phi(x) + \Phi(y) = \Phi\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$

10. 已知 $f(x) = \lg x$, 证明 $f(x) + f(x+1) = f[x(x+1)]$

证 $f(x) + f(x+1) = \lg x + \lg(x+1) = \lg x(x+1) = f[x(x+1)]$

11. 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$

解 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

$\therefore f(x) = x^2 - 2$

12. 求下列函数的定义域

(1) $y = \sqrt{x-4}$

解 $x-4 \geq 0$ $\therefore x \geq 4$

(2) $y = \frac{x+1}{x^2-2x}$

解 $x^2-2x \neq 0$ $\therefore x \neq 0$ 及 $x \neq 2$

(3) $f(x) = \sqrt{5-x^2}$

解 $5-x^2 \geq 0$ $\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

(4) $f(x) = \lg(3-2x)$

解 $3-2x>0 \quad \therefore x<\frac{3}{2}$

(5) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+\lg(x-1)$

解 $\begin{cases} x^2-4\geq 0 \\ x-1>0 \end{cases} \quad \therefore x\geq 2$

(6) $f(x)=\sqrt[4]{\lg\frac{5x-x^2}{3}}$

解 $\lg\frac{5x-x^2}{3}\geq 0 \quad \frac{5x-x^2}{3}\geq 1 \quad 5x-x^2\geq 3 \quad \therefore \frac{5-\sqrt{13}}{2}\leq x\leq \frac{5+\sqrt{13}}{2}$

(7) $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$

解 $\left|\frac{x-2}{3}\right|\leq 1 \quad \therefore -1\leq x\leq 5$

习 题 二

1. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{当 } x\leq 1 \\ 1 & \text{当 } x>1 \end{cases}$ 求 $f(0)$, $f(-2)$, $f(2)$ 。

解 $f(0)=x^2|_{x=0}=0$

$f(-2)=x^2|_{x=-2}=4$

$f(2)=1$

2. 作下列函数的图形

1. $y=-2x+1$

2. $y=-x^2+3$

3. $y=2^{-x}-2$

4. $y=\lg(x+1)$

5. $y=\lg\frac{1}{x}$

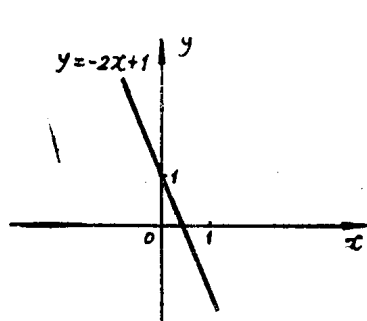
6. $y=(x+2)^2$

7. $y=\frac{-(x-1)^2}{2}+2$

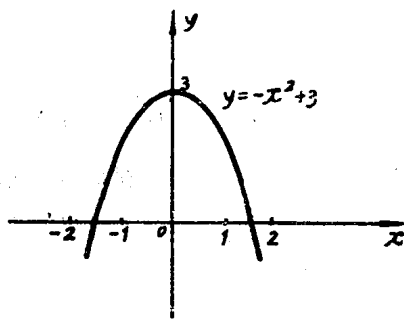
8. $y=-\sqrt{\frac{25}{4}-x^2}+\frac{3}{2}$

9. $y=1-\sqrt{2x-x^2}$

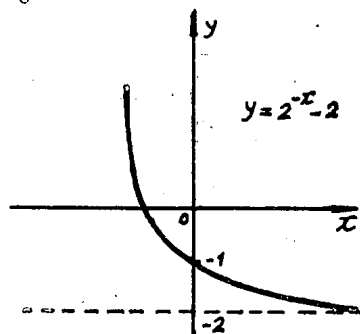
10. $f(x)=\begin{cases} 2x & x\leq 0 \\ -x+1 & x>0 \end{cases}$



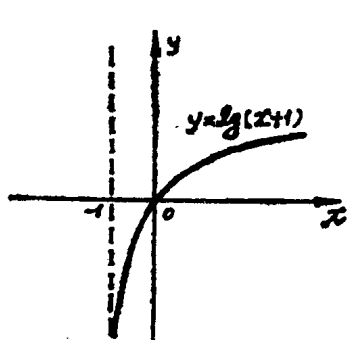
第1题图



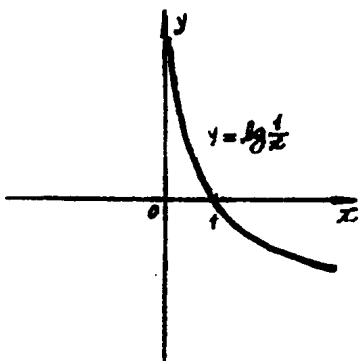
第2题图



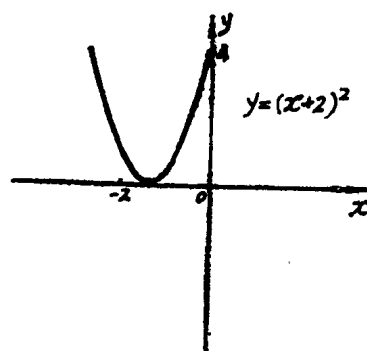
第3题图



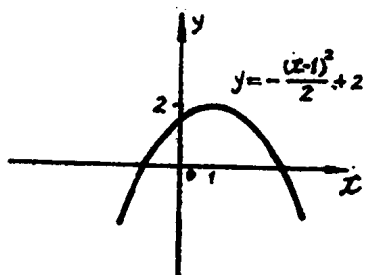
第4题图



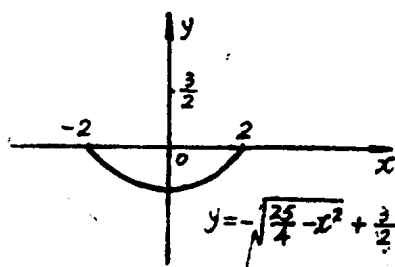
第5题图



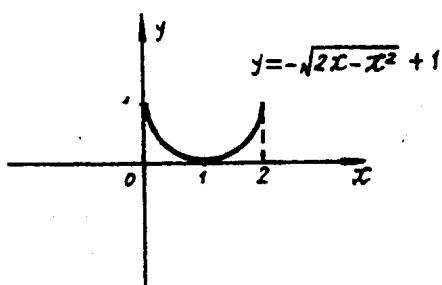
第6题图



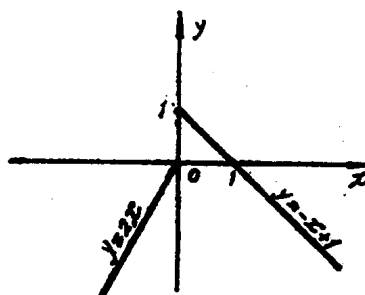
第7题图



第8题图



第9题图



第10题图

习 题 三

1. 计算下列各题:

(1) 已知 $y = \sin u$, $u = 3x - 2$ 试将 y 写成 x 的函数

(2) 已知 $y = u^3$, $u = 1 + 5 \operatorname{tg} v$, $v = 3t - 1$, 试将 y 写成 t 的函数

解 (1) $y = \sin u = \sin(3x - 2)$

(2) $y = [1 + 5 \operatorname{tg}(3t - 1)]^3$

2. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

4

$$(1) \quad y = \sqrt[5]{(x+1)^2 + 3}$$

$$(2) \quad y = 3^{(x+1)^2}$$

$$(3) \quad y = \sin^2(2x-1)$$

$$(4) \quad y = \sqrt{\lg[\cos 2x + 5]}$$

解 (1) $y = u^{\frac{1}{5}}, u = (x+1)^2 + 3$

(2) $y = 3^v, v = u^2, u = (x+1)$

(3) $y = v^2, v = \sin u, u = 2x-1$

(4) $y = u^{\frac{1}{2}}, u = \lg v, v = 5 + \cos w, w = 2x$

3. 已知 $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = 2^x$, 求 $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$, $f[f(x)]$, $\varphi[\varphi(x)]$

解 $f[\varphi(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$

$$\varphi[f(x)] = 2^{x^2}$$

$$f[f(x)] = (x^2)^2 = x^4$$

$$\varphi[\varphi(x)] = 2^{2^x}$$

4. 设 $f(x) = x^2 \lg(x+1)$, 求 $f(x-1)$, $f(x+9)$

解 $f(x-1) = (x-1)^2 \lg(x-1+1) = (x-1)^2 \lg x$

$$f(x+9) = (x+9)^2 \lg(x+9+1) = (x+9)^2 \lg(x+10)$$

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 1 \\ 2^x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ 求 $f(0), f(1), f(2)$

解 $f(0) = -x+3|_{x=0} = 3$

$$f(1) = 2^x-1|_{x=1} = 2-1=1$$

$$f(2) = 2^x-1|_{x=2} = 4-1=3$$

6. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \leq 0 \\ -2x+5 & x > 0 \end{cases}$ 试作函数的图象

7. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{当 } |x| > 1 \end{cases}$

$$\psi(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{当 } |x| \leq 1 \\ 2 & \text{当 } |x| > 1 \end{cases}$$

求 (1) $\varphi[\varphi(x)]$,

(2) $\varphi[\psi(x)]$,

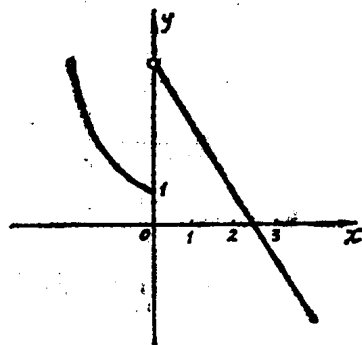
(3) $\psi[\varphi(x)]$,

(4) $\psi[\psi(x)]$.

解 (1) 当 $|x| \leq 1$ 时 $\varphi[\varphi(x)] = \frac{\varphi(x)=1}{\varphi(1)=1}$

$\therefore \varphi[\varphi(x)] = 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$

当 $|x| > 1$ 时 $\varphi[\varphi(x)] = \frac{\varphi(x)=0}{\varphi(0)=1}$



第6题图

- (2) 当 $|x| < 1$ 时 $\varphi[\psi(x)] = \varphi(2-x^2) = 0$
 当 $|x| > 1$ 时 $\varphi[\psi(x)] = \varphi(2) = 0 \quad \therefore \varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \neq \pm 1 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } x = \pm 1 \text{ 时} \end{cases}$
 当 $|x| = 1$ 时 $\varphi[\psi(x)] = \varphi[\psi(\pm 1)] = \varphi(1) = 1$
 (3) 当 $|x| \leq 1$ 时 $\psi[\varphi(x)] = \psi(1) = 2 - 1^2 = 1$
 当 $|x| > 1$ 时 $\psi[\varphi(x)] = \psi(0) = 2 \quad \therefore \psi[\varphi(x)] = \begin{cases} 1 & \text{当 } |x| \leq 1 \text{ 时} \\ 2 & \text{当 } |x| > 1 \text{ 时} \end{cases}$
 (4) 当 $|x| < 1$ 时 $\psi[\psi(x)] = \psi(2-x^2) = 2$
 当 $|x| > 1$ 时 $\psi[\psi(x)] = \psi(2) = 2 \quad \therefore \psi[\psi(x)] = \begin{cases} 2 & \text{当 } |x| \neq \pm 1 \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } |x| = \pm 1 \text{ 时} \end{cases}$
 当 $|x| = 1$ 时 $\psi[\psi(x)] = \psi(1) = 2 - 1^2 = 1$

习 题 四

1. 作出函数 (1) $y = 4x + 2$ (2) $x = \frac{y-2}{4}$ (3) $y = \frac{x-2}{4}$ 的图形, 把它们进行比较, 找出它们的关系。

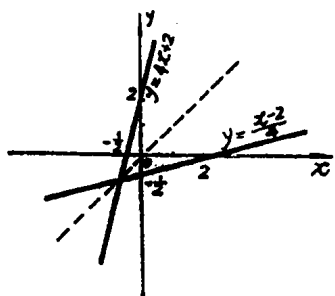
解 $x = \frac{y-2}{4}$ 与 $y = \frac{x-2}{4}$ 都是 $y = 4x + 2$ 的反函数

$y = 4x + 2$ 与 $x = \frac{y-2}{4}$ 是同一条直线

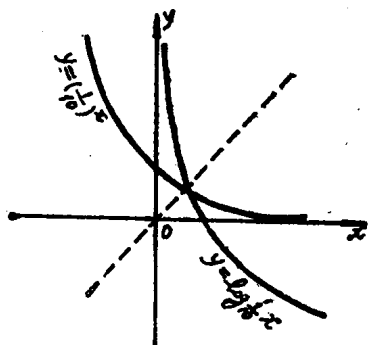
$y = \frac{x-2}{4}$ 与 $y = 4x + 2$ 关于 I Ⅲ 象限的角平分线 $y = x$ 对称

2. 函数 $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的图形为下图所示, 你能作出 $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ 的图形吗?

解 $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ 互为反函数, 其图形对称于直线 $y = x$ 据此便能画出 $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ 的图形来



第 1 题图



第 2 题图

3. 证明双曲函数恒等式 (2), (3), (4)

证 (2) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} + e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} - \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4}$$

$$= \frac{2e^{x-y} - 2e^{-x+y}}{4} = \frac{e^{x-y} - e^{-(x-y)}}{2} = \operatorname{sh}(x-y)$$

证(3) $\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} + e^{-(x+y)}}{4}$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{ch}(x+y)$$

证(4) 同上

4. 求 $y = \operatorname{arth} x$ 的反函数

解 由 $y = \operatorname{arth} x$ 知

$$x = \operatorname{th} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

用 $e^y + e^{-y}$ 乘等式两端, 得

$$e^y x + e^{-y} x = e^y - e^{-y}$$

合并同类项得

$$e^y (x-1) = -(x+1)e^{-y}$$

或
$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

同取 e 为底的对数, 得

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad -1 < x < 1$$

5. 求下列函数的反函数: (1) $y = \lg(x-2) + 5$ (2) $y = \frac{2^x}{1+2^x}$

解 (1) $y - 5 = \lg(x-2)$

$$x-2 = e^{y-5}$$

$\therefore x = 2 + e^{y-5}$ 或以 x 表自变量有

$$y = 2 + e^{x-5} \quad -\infty < x < \infty$$

(2)
$$y = \frac{2^x}{1+2^x}$$

$$2^x(1-y) = y$$

$$2^x = \frac{y}{1-y}$$

$\therefore x = \log_2 \frac{y}{1-y}$ 或以 x 表自变量

$$y = \log_2 \frac{x}{1-x} \quad 0 < x < 1$$

习 题 五

1. 函数 $f(x) = 2 + x^3$ 是奇函数, 对不对? 函数 $y = 1 + 5\cos x$ 是偶函数, 对不对?

解 $f(x) = 2 + x^3$ 不是奇函数。 $f(x) = 1 + 5\cos x$ 是偶函数。

2. 判断下列函数哪些是偶函数? 哪些是奇函数?

(1) $f(x) = x^3 + 2\sin x$; (2) $f(x) = x^2 + 2\cos x + 3$; (3) $f(x) = x^3 + 5x + 2^x$

(4) $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$; (5) $f(x) = x \operatorname{tg} x + 5$; (6) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$

解 (1) $\because f(-x) = (-x)^3 + 2\sin(-x) = -[x^3 + 2\sin x] = -f(x)$

$\therefore f(x) = x^3 + \sin x$ 是奇函数

(2) 由于 $f(-x) = (-x)^2 + 2\cos(-x) + 3 = x^2 + 2\cos x + 3 = f(x)$

$\therefore f(x)$ 是偶函数

(3) 由于 $f(-x) = (-x)^3 + 5(-x) + 2^{-x} = -x^3 - 5x + 2^{-x} \neq \pm f(x)$

$\therefore f(x)$ 不是奇函数也不是偶函数

(4) 由于 $f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) = -[x^5 - 3x + x] = -f(x)$

$\therefore f(x)$ 是奇函数

(5) 由于 $f(-x) = (-x) \operatorname{tg}(-x) + 5 = x \operatorname{tg} x + 5 = f(x)$

$\therefore f(x)$ 是偶函数

(6) 由于 $f(x) = 2^{-x} + 2^x = f(x)$

$\therefore f(x)$ 是偶函数

3. 若函数 $f(x)$ 对定义域上的值恒有 $f(x) = f(2a - x)$, 则称 $f(x)$ 对称于 $x = a$ 。证明如果函数对称于 $x = a$ 及 $x = b$ ($a \neq b$) 则函数是周期函数

证 若函数对称于 a , 满足 $f(2a - x) = f(x)$ (A)

若函数也对称于 b , 则有 $f(2b - x) = f(x)$ (B)

由(A)及(B)得

$$f(x) = f(2a - x) = f[2a - (2b - x)] = f[x + 2(a - b)]$$

这说明 $f(x)$ 是以 $2(a - b)$ 为周期的周期函数

4. 证明 反双曲正弦函数 $f(x) = \operatorname{arsh} x$ 是奇函数

证 $f(-x) = \operatorname{arsh}(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$

$$= \ln\left(\frac{-x^2 + x^2 + 1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

$\therefore \operatorname{arsh} x$ 是奇函数

5. 证明下列函数是单调增函数

(1) $y=2x-5$; (2) $y=x+\lg x$; (3) $y=2^{x-1}$ 。

证 (1) 设 $x_2 > x_1$

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = (2x_2 - 5) - (2x_1 - 5) = 2(x_2 - x_1) > 0$$

$\therefore y=2x-4$ 是单调增函数

(2) 设 $x_2 > x_1 > 0$

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = (x_2 + \lg x_2) - (x_1 + \lg x_1) = (x_2 - x_1) + \lg \frac{x_2}{x_1}$$

$$\text{由于 } x_2 > x_1 > 0, \therefore (x_2 - x_1) > 0, \frac{x_2}{x_1} > 1, \lg \frac{x_2}{x_1} > 0$$

$$\therefore (x_2 - x_1) + \lg \frac{x_2}{x_1} > 0$$

故函数为单调增函数。

(3) 假设 $x_1 < x_2$

$$\text{则 } f(x_2) - f(x_1) = 2^{x_2-1} - 2^{x_1-1} = \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{2}$$

$$\text{由于 } y=2^x \text{ 为单调增函数 } \therefore 2^{x_2} - 2^{x_1} > 0$$

这证明了函数是单调增函数

6. 判断下列函数哪些是周期函数? 它们的周期等于多少?

(1) $y=2+3\sin x$

$$\text{解 } f(x+2\pi) = 2+3\sin(x+2\pi) = 2+3\sin x = f(x)$$

$\therefore y=2+3\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数

(2) $y=(\sin x)^2$

$$\text{解 由于 } \sin^2(x+\pi) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$$

$\therefore y=\sin^2 x$ 以 π 为周期

(3) $y=\cos(2x+3)$

$$\text{解 由于 } \cos[2(x+\pi)+3] = \cos(2x+3)$$

$\therefore y=\cos(2x+3)$ 以 π 为周期

(4) $y=x\sin x$

解 不是周期函数

(5) $y=\sin(\pi x+2)$

$$\text{解 由于 } f(x+2) = \sin[\pi(x+2)+2] = \sin(\pi x+2) = f(x)$$

$\therefore y=\sin(\pi x+2)$ 以 2 为周期,

(6) $y=2+\cos \pi x$