概率论浅说

錢大同　周云龙
陈紹仲　徐叔賢　編

科学出版社

概率論淺說

錢大同 周云龙
陈紹仲 徐叔賢 編

科学出版社

1964

內 容 簡 介

这本通俗小册子以初等数学工具介紹了概率論方面的初步知識，它先由直观概念出发，然后引进数学理論，使具有初中以上程度的讀者可能掌握本书內容.

本书包括：預备知識；概率；随机变数；大数定律；正态分布. 书末还附有函数 $\Phi(a)$ 的数値表.

概 率 論 浅 說

錢大同 周云龙 陈紹仲 徐叔賢 编

*

科学出版社出版（北京朝阳門大街 117 号）
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1959年11月第一版 书号：1941 字数：38,000
1964年1月第三次印刷 开本：787×1092 1/32
（京）15,001—25,400 印张：1 7/8

定价：0.20 元

序　言

为了貫徹党所提出的在科学研究工作中理論联系实际的方針，我們到生产实际部門中去应用数学知識帮助他們解决一些問題．在工作中我們发現工人同志們迫切地需要科学知識，他們希望我們編写一些有关概率論及数理統計的通俗书籍．工人同志們的这种要求給了我們很大的鼓舞，我們在党的領导与关怀下发揮了敢想敢干的共产主义精神，編写了这本小册子“概率論浅說”．

概率論这一学科有着很久的历史，早在 17 世紀中叶就被数学家所注意，但是概率論眞正的价值是在自然科学发展到了一定高度的水平、生产上采用了机械化而进入大量生产的时候才被人們認識到．最近数十年間概率論在自然科学和生产中的地位更有显著提高．在物质构造的分子理論获得了普遍承認，在生产上普遍采用高速化和自动化以后，概率論在物理化学及生产控制中广泛的应用就成为不可避免的事情，这是因为概率論所研究的現象是集体現象．什么是集体現象呢？集体現象就是由大量的个体所組成的一个整体所表現出来的某种性質，而这些性質不仅是个体的性質的量的总和．例如，某一批产品的废品率为5%，这一个性質就是集体性質，它是針对某一批产品而言，而不是对这一批产品中的个体而言，因为这一批产品中的任何一个个体要么是废品要么就是合格品，而不可能說这一个个别产品 5% 为不合格．概率論就是以数学所特有的方式来研究集体性規律．这些規律在物理学及其它自然科学部門、軍事及技术学科、經济学中都起着重大的作

用．近年来联系着大規模生产企业的广泛发展，概率論的結果不但可以用来检驗产品的質量，而且可以应用于生产过程本身的控制上．

这本小册子所用到的数学工具是初等数学，凡是具有初中以上程度者都可能看懂它．它的內容由于数学工具的限制，只包含了概率論方面的初步知識．我們編写时采用了由直观概念出发然后引进数学理論．希望这本小册子能够引起讀者对这一学科的兴趣而且对他們有所帮助．

目　　录

第一章 預备知識

§ 1. 排列組合

假如甲地到乙地有三条道路可通，乙地到丙地有四条道路可通，現在从甲地經乙地到丙地共有多少种走法？大家知道有 $3 \times 4 = 12$ 种走法．因为从甲地无論走那条路到乙地后从乙地到丙地都有四种走法，現从甲地到乙地有三种走法，所以共有 $3 \times 4 = 12$ 种走法．同理我們可以知道，若做第一件事有 n 种方法，做第二件事有 m 种方法，則做完第一件再做第二件事的方法共有 $n \cdot m$ 种．

如果还有第三件事而做第三件事有 l 种做法，那末順次做完三件事共 $n \cdot m \cdot l$ 种做法，

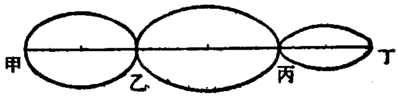

图 1

因为我們可以把順次做第一、第二这二件事当做一件事（有 $n \cdot m$ 种做法），第三件事当作另一件事（有 l 种做法），順次做完这二件事等于順次做完原来三件事，所以有 $n \cdot m \cdot l$ 种方法．例如在上面的問題中，若从丙地到丁地有三条道路可通；那末从甲地經乙地、丙地到丁地有 $3 \times 4 \times 3 = 36$ 种走法，因为从甲地經乙地到丙地的 12 种走法中无論用那种方法走到丙地后，丙地到丁地都有三种走法，所以甲地經乙丙二地到丁地有 $12 \times 3 = 36$ 种走法．大家不难可以推想到下面性質：

若做第一件事 A_1 有 n_1 种方法，做第二件事 A_2 有 n_2 种方法，$\cdots$，做第 k 件事 A_k 有 n_k 种方法．則順次做完 k 件事

$A_1A_2\cdots A_k$，共有 $n_1n_2\cdots n_k$ 种方法.

这个計算規律很重要，它不但可以直接解决不少具体問題，同时也是推导排列組合公式的重要根据.

如果我們在写二位数时每位上的数只能在 1，2，3 中取，并且在取第二位上的数时不能与第一位上的重复，它們全部是 12，21，13，31，23，32 六种（11，22，14，51 都不要，因为有的已重复有的不是从規定的数中取出）．这也就是說在 1，2，3 中每次取二个作不重复排列的方法共有六种．我們如不把它們一个个写出来也能算出它們的总数．因为在三个数字中取一个放在第一位的方法有 3 种（取 1 或 2，或取 3），由于第一位上已取的数不能再在第二位上重复取，所以只能在剩下的二个数字中取一个放在第二位，所以第一位数字的写法有 3 种，第二位数字写法有 2 种，那末根据前面的計算規律，依要求所写出二位数的方法共有 $3\times2=6$ 种．同样可以知道从 a，b，c 三个文字取二个作不重复排列也共有六种方法．現在要問，从 n 个不同文字中取 k 个作不重复排列共有多少方法？在 n 个文字中取一个放在第一位上有 n 种取法，在余下 $n-1$ 个文字中取一个放在第二位共有 $n-1$ 种方法，$\cdots$，在第 k 位上因为前 $k-1$ 位已取去 $k-1$ 个，在 $n-(k-1)$ 个中取一个放在第 k 位上的方法是 $n-k+1$ 种，所以第一位上取法有 n，第二位上取法有 $n-1$，$\cdots$，第 k 位上取法有 $n-k+1$，因此，根据前面計算規律知道，在 n 个不同文字中，不許重复顺次排 k 个共有方法 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ 种，我們記作

$$P_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)^{1)}\quad(k\leqslant n).$$

由于字母在同一排中不許重复出现，所以在 n 个不同文

---

1) P_n^k 是个符号，代表 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$．所以 $P_5^2=5\cdot4$．

字中最多只能取 n 个来排列，因此要求 $k \leqslant n$. 如果 $k > n$，很自然地规定 $P_n^k = 0$. 特别在 $k = n$ 时

$$P_n^n = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!^{1)}.$$

如果用数字 1，2，3 作两位数而允許重复排列則有 11，22，33，12，21，13，31，32，23 共九个排列；用数字 1，2，3 作四位数而允許重复排列，如 1111，1112，1113，1231 等(1114，1151 等不算，因4，5 不是从規定 1，2，3 中取出)，則共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 个之多. 因为，在三个数字中取一个放在第一位有 3 种方法；由于可重复，在取第二位数时仍有 3 种取法；第三、第四位上每位都有 3 种取法，因此用三个数字作四位数而允許重复排列，則共有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 种方法. 用 a，b，c 三个文字，作四位数而允許重复排列，如 $aaaa$，$aaab$，$\cdots$，同样有 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 种方法. 現在从 n 个不同文字中取 k 个作重复排列，因为每一位都有 n 种取法，現有 k 位，所以共有排法 $n \cdot n \cdots n = n^k$. 因此，在 n 个文字中取 k 个作重复排列共有方法 n^k 种.

今有 5 个不同的球和 5 个筐，每筐里放且只放一个球，問把这 5 个球放入这五个筐中共有多少方法？若每筐內放的球数不限制(不放或放 1 个，$\cdots$，5 个都可以)有多少方法？

如每筐能放且只放一个，第一个球放入筐內有 5 种放法(因为有 5 个筐)；第二个球放入筐內有 4 种放法(因現在只剩 4 个筐)；第三球放入筐內有 3 种放法；第四个球有 2 种放法；第五个球有一种放法，因此共有放法 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

如每筐放的球数不限制，每一个球都可放入 5 个筐的任一个中，所以有 5 种放法，現有 5 个球，所以有放法 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$.

1) $n!$ 称为 n 的阶乘，例如 $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$，$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$，規定 $0! = 1$.

我們改用排列的方法也能求得答案.

現有 1, 2, 3 三个数, 取二个組成一組, 共有組合 (12), (13), (23) 三种, 每种組合用来排列时則可产生 2 个不重复的排列(例如組合 (12) 可有 12,21 两个不重复的排列), 因为每組是二个数字, 二个数字不重复的排列数有 $2! = 2$ 种方法. 另一方面, $3 \times 2 = 6$ 恰是从三个不同数字中的二个作不重复排列的总数. 这个重要的事实可用文字写成如下:

有三个数, 取二个組成一組的組合总数乘以組合內作不重复排列的总数($2!$)等于三个数中取二个作不重复排列的总数.

这一事实在一般情形也对. 例如, 有 n 个不同文字, 取 k 个組成一組的組合总数乘以全組 k 个文字作不重复排列总数 $k!$ 等于 n 个不同文字中取 k 个作不重复排列的总数.

如果我們以 C_n^k 或 $\binom{n}{k}$ 代表用 n 个不同文字, 取 k 个組成一組的組合总数, 于是上面的事实可用公式表达如下:

$$C_n^k \times k! = P_n^k,$$

即

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

归納上述: 用 n 个不同文字, 取 k 个組成一組的組合总数 C_n^k 为:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

如果 $k > n$, 这是不可能的, 因为沒有方法从 n 个文字中取出一組比 n 多的組合, 所以这时自然要規定 $C_n^k = 0$.

有时候我們称 C_n^k 为二項系数，因为它与二項展开式有密切联系：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^2a^2 + C_2^1ab + C_2^0b^2$$

$$(\text{因为 } C_2^2 = C_2^0 = 1,\ C_2^1 = 2),$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 =$$

$$= C_3^3a^3 + C_3^2a^2b + C_3^1ab^2 + C_3^0b^3$$

$$(\text{因为 } C_3^3 = C_3^0 = 1,\ C_3^2 = C_3^1 = 3).$$

一般的有

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 +$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots3\cdot2}{(n-1)!}ab^{n-1} + b^n =$$

$$= a^n + \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!2!}a^{n-2}b^2 +$$

$$+\cdots+\frac{n!}{1!(n-1)!}ab^{n-1} + b^n =$$

$$= C_n^na^n + C_n^{n-1}a^{n-1}b + C_n^{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots +$$

$$+ C_n^1ab^{n-1} + C_n^0b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k}a^{n-k}b^k \text{ 1)}$$

$$\left(\text{因为 } C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\right).$$

§2. 函数与极限

在日常生活中只要稍加注意，就能发現有不少数量的变化是依賴于另一变量，而另一变量所取的值又有一定范围.

---

1) Σ 是和的簡写，如 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 簡写成 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，即 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 例如 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

例如汽車以每分鐘500米的速度从車站开出，汽車离車站的距离 S 是以开車时間的长短来决定的，如果它开車已有7分鐘，那末距离 $S = 3500$ 米．所以只要知道开車时間多久就能决定出汽車与車站間距离多远，且时間向前走不往后退，所以 $t > 0$.

又如，一輛卡車能載重二吨，那末一个汽車运輸队的运輸能力 m 吨，是根据汽車队有多少輛汽車才能决定，如有 n 輛汽車，則 $m = 2n$ 吨，n 是取正整数値，因为計算汽車的方法是一輛二輛，根本沒有0.5輛，-1 輛的算法．

又如方桌子面积 S 是被桌子边长 l 决定，也即 $S = l^2$，而 $l > 0$，因为方桌子边长量出来的数終是大于0的．

把这种数量依存关系用数学的抽象語言来說就是：数 y 是随着 x 变动而变动，而 x 規定它在某一范围內变．在数学上这种例子很多，例如：

$$y = 4x^5 + 3x^3 + 1, \qquad -\infty < x < \infty;$$

$$y = \sqrt{x}, \qquad 0 < x < \infty;$$

$$y = \frac{n!}{x!(n-x)!}, \qquad x \text{ 取正整数};$$

$$y = a^x, \qquad a \neq 1, \ -\infty < x < \infty.$$

象上面那种数量 y 是依 x 在某一范围內取值而被决定，我們就称 y 是 x 的函数，写成 $y = f(x)$，有时候我們不将 y 写出来，写成

$$f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 1, \qquad -\infty < x < \infty;$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad 0 < x < \infty$$

等等，所討論的同一問題中如遇到好几个函数，我們就用 $h(x)$，$g(x)$ 或者添个下标如 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 等等来表示，不同的标号代表不同的函数，如果上面这二函数在我們同一問題中出現，我們都用 $f(x)$ 来表示便产生混淆不清的弊病，我們可

以写成 $f(x)=4x^5+3x^3+1$，$g(x)=\sqrt{x}$；或者 $f_1(x)=$ $=4x^5+3x^3+1$，$f_2(x)=\sqrt{x}$。

在我們日常生活中又常能遇到越变越小的变量. 例如，拿一根火柴今天对折成二半，丢掉一半，留下一半；明天将留下的再对折成二半，丢一半留一半；每天都这样把留下的对折成二半，丢一半留一半. 我們假定总有办法把剩下的分成二半，永远这样下去，如果一根火柴长 2 吋，那末今天留下 1 吋；明天留下 $\frac{1}{2}$ 吋；后天留下 $\frac{1}{4}$ 吋…，留下火柴的长度是一天变一样，变化的規律可排成一串数序(或称序列)：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots, \tag{1}$$

后面的三点表示还有无限多个数（每个数都等于前一数的一半). 因为我們可以永远这样做，我們可以看出这个变量越变越小，要多小就能多小. 譬如說一百万分之一吋算是个很小的量了吧！可是我們总有一天对折到使留下那段火柴的长度比这个量还小，并且自那天后所留下的火柴的长度永远小于一百万分之一吋. 所以越下去长度越变越小，我們就說这个长度将趋向于 0. 从数字变化上看，也就是序列(1)趋向于 0.

我們可以在日常生活中找到不少变量，它的变化規律可排成一序列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, \tag{2}$$

但序列中的每項 a_i 值不一定是一項比一項小，可大可小，可正可負，我們不能随便說按序列(2)变化的变量（簡单地說序列(2))是趋向“0”，在什么情况之下才可称为序列(2)趋向于零呢？只要 a_n 的絕对值 $|a_n|$[1]随着 n 增大而变小，并且要多小就

1) 一个正数的絕对值是指这个正数本身. 一个負数的絕对值是指和这个負数相反的正数. 例如 $|+5|=5$，$|-5|=5$. 零的絕对值写做 $|0|$，$|0|=0$.

多小，也就是說我們任給一个很小的数 d，只要 n 相当大后，譬如說 n 大于某正整数 N，就可以使 $|a_n| < d$，在这时我們就称序列(2)趋向于零，用符号

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad 或 \quad a_n \to 0 \ (n\to\infty)$$

来表示.

序列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,$$

趋向于零，所以我們写

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \quad 或 \quad \frac{1}{2^n} \to 0 \ (n\to\infty).$$

序列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots,$$

也趋于零，因为无論正数 d 多么小，总可找到一个正整数 N，使 $N > \frac{1}{d}$，也即 $\frac{1}{N} < d$，所以当 $n > N$ 时

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < d \qquad (n > N),$$

所以

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

最后我們可以容易地証明，若一序列趋向于"0"，則此序列乘一个常数后仍趋于"0"，說詳細些就是若

$$a_n \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

乘常数 c 后得序列

$$ca_1,\ ca_2,\ ca_3,\ ca_4,\ \cdots,$$

則

$$ca_n \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

現有二个序列

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \cdots,$$

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ \cdots.$$

如果 $0 \leqslant c_n \leqslant b_n$，$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，并且 $b_n \to 0$，則

$$c_n \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

第二章 概　　率

§1. 偶然事件和必然事件

我們先举几个例子:

例 1. 当我們擲銅板时,可以出現"正面"向上或"反面"向上.

例 2. 灯泡厂的一批产品中有合格的也有不合格的,在外表上分别不出(規定每个灯泡能点1000小时以上的为合格),現把这批产品拿到市場上去卖,那么对一个顾客来講,他可能买到合格的灯泡,也可能买到不合格的灯泡.

例 3. 射靶問題: 射击者瞄准靶心进行射击,由于瞄准的偏差及风速等种种客观原因的影响,因而子弹有可能落在以靶为心的其它圓环內(見图2);所以是否射中靶心,事先不可能予以肯定.

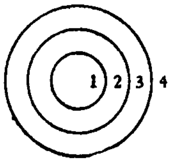

图　2

当然在我們生活、生产、建設中,还存在着大量类似的現象,但是归結起来可以这样来描述它:当我們进行一个試驗时,如果某一事件在試驗后可以发生,也可以不发生,则称此事件为概然事件(或称偶然事件).因此,例1中擲銅板出現"正面"的就是一个概然事件.例2中正好买到灯泡是坏的也是一个概然事件.例3中射靶正好射中靶心的事件也是一个概然事件.

如果一个事件在我們的試驗中不是概然事件,那末这又分另外二种情形:第一种情形——只要我們进行試驗,此一事件必然发生;第二种情形——当試驗完結时,此事件永远也不

会发生．对前者的情形，我們称此事件是此試驗的必然事件；后一种情形，則称此事件是此試驗的不可能事件．

例如，在标准大气压力下，水在0℃时結成冰，而在100℃时化成蒸气都是必然事件；另外擲一顆标有1—6点的骰子[1]出現大于6点的事件是不可能事件．讀者可以例举出更多的偶然事件、必然事件和不可能事件．

为了簡便起見，我們今后把概然事件簡称为事件，并且以字母 A, B, C, $\cdots$ 来表示它．

由于我們的討論經常牽涉到二个或者更多的事件，这些事件間的关系如果用文字来說明可能很繁长，因此我們引进一些記号来說明事件間的关系．

事件“$A+B$”是表示“事件 A 和事件 B 中至少发生其中一件”的事件．

事件“AB”表示“事件 A 和事件 B 同时发生”的事件．如果“事件 A 事件 B 同时发生”的事件为不可能事件时，我們便称事件 A 和事件 B 互斥．互斥的概念很重要，希望讀者弄清它的意义．

例 4. 在一付扑克牌中任意取出10张牌，命 A_i 表示“这10张牌中正好抽到 i 张K”的事件，i 可以取值0，1，2，3，4．于是事件“A_1+A_2”表示“这10张牌中抽到一张或者二张K的”事件．

事件“A_3A_4”表示“这10张牌中有三张K，而同时又有四张K”的事件；显然这是一个不可能事件．因此 A_3, A_4 互斥．

例 5. 在擲一顆骰子的試驗里，它的可能結果是1，2，3，4，5，6六种．

---

1) 以后談到“骰子”，就表示是标有1—6点的骰子．