行列式的计算法

张谋成

*

广 东 人 民 出 版 社 出 版
广 东 省 新 华 书 店 发 行
肇 庆 新 华 印 刷 厂 印 刷
787×1092毫米 32开本　7.625印张　120,000字
1982年10月第1版　1982年10月第1次印刷
印数 1—13,310 册
书号7111·1106　　定价0.65元

序　言

行列式是研究某些数的“有规律”乘积的代数和的性质及其计算法。它起源于解线性方程组，以后，逐步地应用到数学的其它领域。中学数学也介绍行列式，但是只限于介绍它的基本知识，没有深入地展开，特别是计算法介绍得很少。因此，许多读者要求有一本介绍行列式的计算法的书。本书就是在这种情况下写成的。我们希望它能够帮助中学数学教师进一步理解行列式的概念、性质，掌握多种的计算法；同时，也希望能帮助中学生更好地巩固、扩大、加深所学的行列式知识，提高计算能力。

全书分两章，第一章介绍行列式的定义和性质，主要是为下一章作准备；第二章介绍行列式的各种计算法，为了使内容更为紧凑，在讨论行列式的性质以后，立刻介绍这些计算法；最后再简单地介绍克莱姆规则。

在书中，通过例子由浅入深地介绍各种计算法，使读者容易领会这些计算法的精神。行列式没有一般的计算法，必须根据某个行列式的具体特点采用相应的方法。这里介绍几种常见的、也是行之有效的计算法。同时，在介绍这些方法的过程中，也介绍一些计算技巧。

由于本书主要是讨论行列式的计算法，所以行列式的应用方面篇幅不多，只是在有关章节适当地介绍它在解析几何

中的一些应用。实际上，在数学的其它领域，例如矩阵论、微积分等方面，行列式都有其应用，它超出本书的范围，不在这里讨论。

为了帮助中学数学教师更好地理解和掌握所讨论的内容，书中每节都编有思考题和习题，书后附有答案，有“*”的习题表示书后有提示。

在编写本书的过程中，华南师范学院数学系代数教研室的老师们详细地审阅了手稿，提出了许多富有建设性的意见，在此谨致谢意。

张谋成

1981.5.1于广州

目　　录

第一章　行列式的概念和性质

§1　2阶、3阶行列式

行列式起源于解含有两个或三个未知量的线性方程组①。

设有含两个未知量两个方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中x_1，x_2称为未知量；a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为未知量的系数；b_1，b_2称为常数项。这些数都是复数②。

现在研究如何解方程组（1）。

以数a_{22}乘方程组（1）的第一方程，数$(-a_{12})$乘方程组（1）的第二方程，然后相加

$$\begin{array}{r} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22} \\ +)\ -a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2 = -a_{12}b_2 \\ \hline (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 + (a_{12}a_{22} - a_{12}a_{22})x_2 = b_1a_{22} - a_{12}b_2. \end{array}$$

于是

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2. \tag{2}$$

① 由于本书都是讨论线性方程组，为简单起见，今后提到方程组都是指线性方程组。

② 今后提到的数都是指复数。有理数、实数等都是复数的特殊情况。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

当$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\neq 0$时，得到

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

同样地，以数$(-a_{21})$乘方程组(1)的第一方程，数a_{11}乘方程组(1)的第二方程，然后相加，同样有

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \tag{3}$$

当$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\neq 0$时，得到

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

也就是说，当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，由方程组(1)可得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{4}$$

(4)中x_1，x_2的表达式的分母都是同一个代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，我们把它称为一个2阶行列式，并且用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示它．故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{5}$$

数a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为这个2阶行列式的元素．

用记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，便于记忆．但是，如何由记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{6}$$

求出这个代数和呢？

不难发现，在行列式（6）中，左上角元素 a_{11} 与右下角元素 a_{22} 的乘积减去右上角元素 a_{12} 与左下角元素 a_{21} 的乘积〔如（6）箭头所示〕，恰好等于代数和$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$。因此，我们把它作为计算2阶行列式的规则．

例 1 计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$．

解： 按规则，$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}=3\times7-5\times(-1)=21+5=26$．

我们再回来研究（4）中x_1，x_2的表达式的分子．比较x_1的表达式的分子$b_1a_{22}-a_{12}b_2$与分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，不难看出，如果代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中的 a_{11} 与 a_{21} 分别换为 b_1 与b_2，便得到前一代数和；同样地，对x_2的表达式的分子与分母也有类似的情况。于是，代数和$b_1a_{22}-a_{12}b_2$与$a_{11}b_2-b_1a_{21}$也是两个2阶行列式．按上面记号，有

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

若用D，D_1，D_2 分别表示这三个2阶行列式，则（4）式可简写为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{7}$$

当$D\neq0$时，把x_1，x_2的表达式代入方程组（1）后，易知它们满足（1），即它们是方程组（1）的一组解．可以证明，当$D\neq0$时，（7）也是方程组（1）的唯一解．因此，可用（7）

来解方程组(1).

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases}$$

解： 因系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$，于是，方程组有唯一解. 由(7)知

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-19}{-7} = \frac{19}{7};$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-11}{-7} = \frac{11}{7}.$$

方程组(1)用2阶行列式求解，看不出有什么特别方便的地方，但是，对于含三个未知量三个方程的方程组，用行列式求解，就方便得多.

现在研究这类方程组.

设有含三个未知量三个方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{8}$$

其中 x_1，x_2，x_3 称为未知量；a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33}称为未知量的系数；b_1，b_2，b_3称为常数项.

为了求方程组(8)的解，通常采用下面方法：以 $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$ 乘方程组(8)的第一方程，$a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$ 乘方程组

（8）的第二方程，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$乘方程组（8）的第三方程，然后相加

$$\begin{array}{rl}
(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1+(a_{12}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{32})x_2+(a_{13}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{23}a_{32})x_3 & =b_1a_{22}a_{33}-b_1a_{23}a_{32} \\
(a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1+(a_{13}a_{22}a_{32}-a_{12}a_{22}a_{33})x_2+(a_{13}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{23}a_{33})x_3 & =a_{13}b_2a_{32}-a_{12}b_2a_{33} \\
+)\ (a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1+(a_{12}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{32})x_2+(a_{12}a_{23}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{33})x_3 & =a_{12}a_{23}b_3-a_{13}a_{22}b_3 \\
\hline
(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32} \quad +0x_2 \quad\quad +0x_3 & =b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32} \\
+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32} & +a_{12}a_{23}b_3-b_1a_{23}a_{32} \\
-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 & -a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.
\end{array}$$

即 $(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$

$$=(b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3). \qquad (9)$$

同样地，可得到

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_2$$
$$=(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}). \qquad (10)$$

和 $(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_3$

$$=(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3). \qquad (11)$$

当$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})\neq 0$ 时，由（9），（10），（11），可得

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\
x_2 = \dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{13}b_2a_{31}-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\
x_3 = \dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}.
\end{cases} \tag{12}
$$

(12)中x_1，x_2，x_3的表达式的分母是同一个代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

我们把它称为一个3阶行列式，并用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$表示它。故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{13}$$

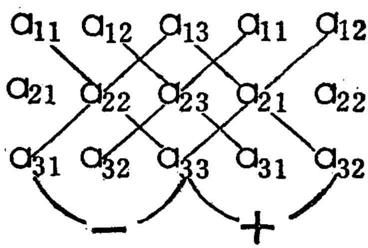
数 a_{ij}（$i=1，2，3$；$j=1，2，3$）称为 3 阶行列式(13)的元素；行列式(13)中的横排依次称为第 1 行，第 2 行和第 3 行；纵列依次称为第 1 列，第 2 列和第 3 列；i，j 分别称为元素 a_{ij} 的第一下标（或行下标）和第二下标（或列下标）．

用记号表示一个 3 阶行列式便于记忆．但是，如何由记号求出这个代数和呢？我们有下面方法：

在表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

的右边添加第 1 列，第 2 列元素〔如(14)〕



(14)

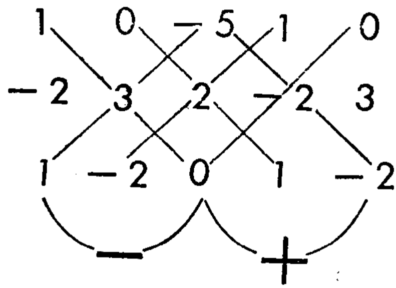
在(14)中，从左上方到右下方有三条线段，每条线段经过三个数，把这三个数相乘，乘积冠以正号；从右上方到左下方也有三条线段，每条线段也经过三个数，把这三个数相乘，乘积冠以负号〔如(14)〕．这样，六条线段便有六项，把这六项（包括冠上的符号）加起来，恰好是3阶行列式的代数和．我们把它作为计算 3 阶行列式的规则．

例 3　计算行列式

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

解：先列出表



按上面规则

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\times3\times0+0\times2\times1+(-5)\times(-2)$$

$$\times(-2)-(-5)\times3\times1-1\times2\times(-2)$$

$$-0\times(-2)\times0=-1.$$

再来看(12)中解 x_1 的表达式的分子．容易发现，它恰好是把3阶行列式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 中的元素 a_{11}，a_{21}，a_{31} 分别换为 b_1，b_2，b_3 得到的一个代数和．因此，它也是一个3阶行列式．这样，只要在记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中，把 a_{11}，a_{21}，a_{31} 分别换为 b_1，b_2，b_3 便得到表示这个行列式的记号，记它为 D_1，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

同样地，(12)中 x_2，x_3 的表达式的分母也是两个 3 阶行列式，分别记为

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \qquad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

把由(13)组成的 3 阶行列式记为 D，且称D为方程组的系数行列式. 于是，在 $D\neq 0$ 时，(12)可表为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases} \tag{15}$$

经过麻烦，但完全是机械的验算，可以断定，在 $D\neq 0$ 时，(15)是方程组(8)的一组解. 可以证明，在 $D\neq 0$ 时，它还是方程组(8)的唯一解.

由此可知，方程组(1)〔或(8)〕在 $D\neq 0$ 时的唯一解可以由它们的系数和常数项通过行列式表示为(7)〔或(15)〕的形式，这种用行列式解(二元，三元)线性方程组的方法通常称为克莱姆规则.

例 4 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=1 \\ x_1+3x_2-2x_3=4. \end{cases}$$

解： 因方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28\neq 0.$$

所以，可用克莱姆规则求它的解．先计算

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & 3 & -2\end{vmatrix}=13;$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix}=47;$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=21.$$

按(15)，方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{13}{28} \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{47}{28}=1\dfrac{19}{28} \\ x_3=\dfrac{D_3}{D}=\dfrac{21}{28}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

从上面可以看出，有了2阶、3阶行列式以后，方程组(1)〔或(8)〕在$D\neq0$时的唯一解可以很简单地用行列式表示出来，得到所谓克莱姆规则．因此，自然地会想到，对于含n个未知量n个方程的方程组是否也能用相应的行列式来表示它的解呢？首先，遇到的问题是如何定义相应的行列式．从上面知道，3阶行列式是由解方程组(8)得到的一个代数和来定义的．而在解方程组时，我们用消元法来解三个未知量三个方程的方程组，已感到不好理解．例如，为什么要用数$(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$，$(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})$，$(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$分别乘方程组(8)的三个方程，然后相加呢？对于含

n 个未知量 n 个方程的方程组，如果用上面作过的方法求解实际上是行不通的。因此，也就很难得到所需要的代数和并用它来定义相应的行列式。所以，我们不用上面的方法，而是先分析 2 阶、3 阶行列式的基本特征，利用这些特征来定义 n 阶行列式。然后，再证明所得的 n 阶行列式可用来解相应的线性方程组。

先研究一下 3 阶行列式的基本特征。粗略地说，3 阶行列式是一个含有 6 项 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$，$a_{11}a_{23}a_{32}$，$a_{12}a_{21}a_{33}$，$a_{13}a_{22}a_{31}$ 的代数和，每一项是行列式的不同行不同列的三个元素的乘积，它的符号与这一项的三个元素的下标排列次序有关，如果把第一下标（行下标）按自然顺序 1，2，3 排列，则这一项的符号与第二下标（列下标）的排列次序有关。对于 2 阶行列式也有类似的情况。为了弄清楚每一项的符号与它们的下标排列次序的关系，我们在下一节里先研究 n 个自然数的排列问题。

思 考 题

1. 对方程组（8）用消元法求解时，为什么要用数 $(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$，$(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})$，$(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})$ 分别乘方程组（8）的三个方程？
2. 为什么说，方程组（8）只有当它的行列式 $D\neq 0$ 时才有解（15）？在推导（15）时，什么地方用了这个条件？
3. 当方程组（8）的行列式 $D=0$ 时，它是否一定无解，试举例说明之。

习　题

1. 计算下列 2 阶行列式：

$$a)\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 4 \end{vmatrix};\qquad b)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix};$$

$$c)\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix};\qquad d)\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}.$$

2. 用克莱姆规则解下列方程组：

$$a)\begin{cases} 3x+8y=1 \\ 7x+11y=3 \end{cases};$$

$$b)\begin{cases} 5x-9y=11 \\ 8x+17y=-2 \end{cases}.$$

3. 计算下列 3 阶行列式：

$$a)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix};\qquad b)\begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -4 & -12 \end{vmatrix}.$$

4. 用克莱姆规则解下列方程组：

$$a)\begin{cases} 2x+y+3z=-9 \\ 8x+3y+5z=-13 \\ 2x+5y-z=-5 \end{cases};$$

$$b)\begin{cases} bx-ay=-2ab \\ -2cy+3bz=bc \\ cx+az=0 \end{cases}.$$

5. 证明下面等式：

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

§2 排　列

§1末尾已经指出，2阶、3阶行列式的每一项的符号与这一项的元素的下标排列次序有关，为了弄清楚这种关系，以便定义n阶行列式，现在引入排列概念。

设有由n个元素组成的一个集合M，我们可以用前n个数码1，2，…，n来记这些元素的下标；而且，因为我们对M的元素的具体性质不感兴趣，所以还可以认为集合M是由数码1，2，…，n组成。

n个数码的排列次序除了自然的排列次序$12\cdots n$外，还可以有其它的排列次序。例如，三个数码1，2，3，除了按123次序排列外，还有321；231；132等。一般地，有下面定义：

定义1　n个数码1，2，…，n组成的一个有序数组称为一个n阶排列。

例1　三个数码1，2，3有6种不同的3阶排列：

$$123;\ 231;\ 312; \tag{1_1}$$

$$132;\ 213;\ 321. \tag{1_2}$$

四个数码1，2，3，4有24种不同的4阶排列：

$$\begin{matrix} 1234; & 1342; & 1423; \\ 2314; & 2431; & 2143; \\ 3124; & 3412; & 3241; \\ 4321; & 4132; & 4213; \end{matrix} \tag{2_1}$$

$$\begin{matrix} 1243; & 1324; & 1432; \\ 2341; & 2413; & 2134; \end{matrix} \tag{2_2}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com