
自然科学知識丛书

中国几何故事

許 蕪 舫 著

中国青年出版社

1965年·北京

內 容 提 要

我国人民在很古的时候就掌握了許多几何知識,像勾股定理、相似形比例、圓周率求法、各种面积和体积的計算,以及有关三角学的創造等,都是中国古代在几何学上的伟大成就。本書把这些材料擇要加以介紹,使青年讀者知道祖国过去的这許多杰出成就。

中 国 几 何 故 事

許 純 飭 著

*

中 国 青 年 出 版 社 出 版

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

787×1092 1/32 3 3/8 印张 53千字

1952年2月北京第1版 1965年3月北京第3版

1965年3月北京第7次印刷

印数32,001—52,000 定价(料二)0.30元

作 者 的 話

我們伟大祖国的人民，远在三千多年前已經掌握了相当丰富的数学知識。他們在辛勤劳动中，克服了无数困难，作出了巨大貢獻，在世界数学史上占到光輝的一頁。中国数学从上古到明代一直是独立发展的，它非但絕少受到外来的影响，而且有許多創造还传播到国外，成为世界数学的先进。

为了要使青年們对祖国在数学上的輝煌成就有較多的認識，作者特地編写了这一套書——《中国算术故事》、《中国代数故事》、《中国几何故事》。希望讀者通过它，能够激发起爱祖国的情緒，并且繼承着祖先的优良传统，在原有基础上去刻苦鑽研，努力創造，为国家的社会主义建設事业作出更大的貢獻。

本書是关于几何的一册，根据1952年的初版本（原名为《中算家的几何学研究》），經過修訂，并增补新材料而編成的。內容主要是介紹：（1）勾股定理和它的应用；（2）刘徽和祖冲之在圓周率方面的成就；（3）祖暅的球体积精确算法和秦九韶的斜三角形求面积法；（4）李冶的切圓問題；（5）王孝通的体积还原計算；（6）刘徽的三角測量术和郭守敬在三角学上的貢獻。

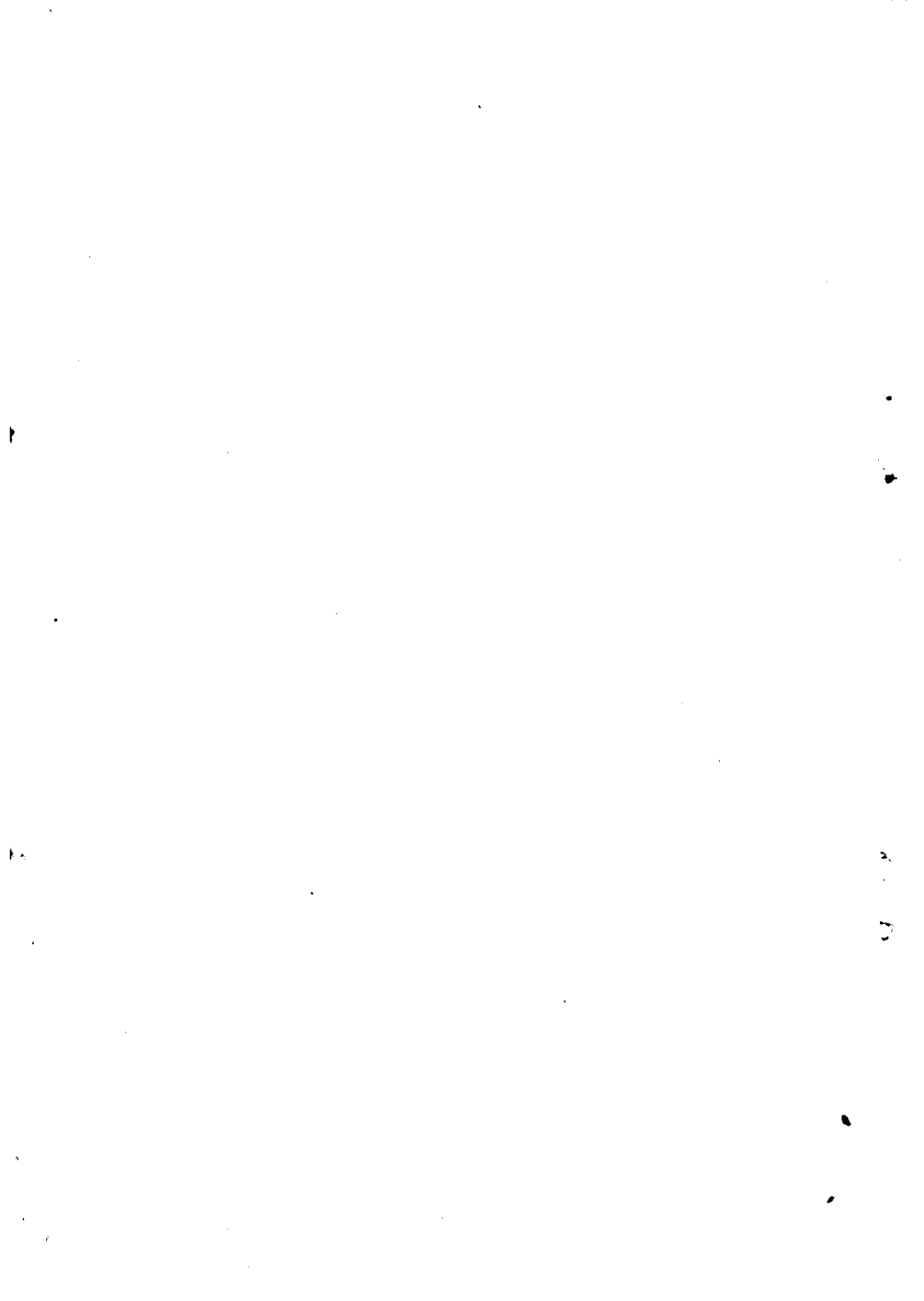
由于本書是供給中学程度的青年們閱讀的,所以內容力求淺显和通俗,避免高深的理論說明。另外,为了不讓青年讀者感到繁瑣乏味,关于考据方面都从簡略,各种参考文献也不一一列举。又本書在修訂时,蒙中国科学院中国自然科学史研究室錢宝琮同志提供了很多寶貴意見和重要資料,謹向他表示衷心的感謝。

許莚舫

1963年四月

目 次

几何知識的萌芽	5
从勾三股四弦五說起	12
中国的三角測量——重差术	29
洞淵的勾股測圓术	45
圓周率的沿革	58
求积法的新貢獻	69
体积还原和截积术	85
平面和球面三角学上的創造	100



几何知識的萌芽

中国古代对于图形的認識，起源是很早的。大約在公元前二千余年，就是历史学上所称的新石器时代晚期，大部分人已經抛弃了游牧生活，在肥沃的平原上定居下来，从事农业生产。由于人們对自然的斗争已經由被动轉向主动，对于事物的数量关系和空間形状的認識，也就有了很大的提高。就在这个时候，人們开始从生产劳动中認識了簡單的几何图形，有了几何知識的萌芽。

近几十年来，特別是在解放以后，我国的考古学家和基本建設工作人員等，从地下发掘到了許多殷代以前（就是新石器时代晚期）的陶器，上面画着各式各样的几何图案。例如1953年在安徽灵璧和浙江嘉兴发现的新石器时代遗址上，掘到了不少碎陶片，上面就有方格、米字、回字、椒眼和席紋等几何图案。比較迟一些的，又有在河南安阳的殷墟中发掘出来的車軸，上面刻着五边形、六边形以至九边形的图案裝飾，陝



图 1.

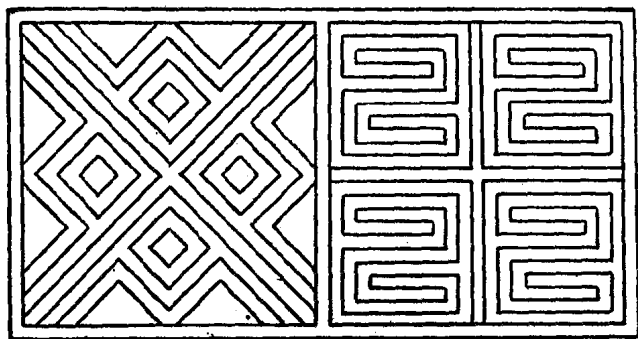


图 2.

西宝鸡出土的陶器上有三角形、正方形、矩形和圆等(如图 1);殷、周两代的青铜器上,一般也都有美观的花纹;殷代甲骨文里的田字,还写成了许多小方块。更迟一些的,象西安出土的汉砖,上面有方形、迴纹形等几何图案(如图 2),种类很多。

我们从这许多地下发掘出来的资料,可以看到中国古代劳动人民对于图形有敏锐的观察力,表现出他们高度的智慧。再考察这些几何图案的形式,发现它们常常表示出相合性、相似性和对称性,具有很好的匠心和意境,其中有不少还可以供今天的工艺美术家们借鉴。

二

根据地下发掘所获得的资料,我们知道上古的劳动人民一定早就有了画图的工具。又从新石器时代的石斧和石鏃上所凿圆孔的整齐精确来看,当时似乎也已有了画圆形的器具。

我国上古画圆形和方形所用的是“规”和“矩”两种工具。

規就是現今所称的圓規或兩腳規；矩是用兩根直尺接在一起，使它們夾成直角，和現今木工所用的曲尺（拐尺）或水平尺類似。關於這兩種工具的來源、形狀和用途等，我們看了下舉的各種資料，就可以知道它的大概。

在殷代的甲骨文中，就已經有了規和矩兩個字。這兩個字都是象形文字，規字是，很象一個人的手裡拿了圓規在畫圓；矩字是，象兩支曲尺一上一下取相反方向放在一起。

漢代人民據傳說認為規、矩是伏羲所創造，因而常常在石上雕刻着“伏羲氏手執矩，女媧氏手執規”的圖象。在山東嘉祥縣漢代武梁祠的石室裡，有幾塊石刻都是這一類的造象（如圖3）；高昌附近古墓裡掘到的柩上，描有唐代的星圖，其中也畫了這種圖形。近年在山東沂縣發現的漢墓裡的石柱上，長沙出土的楚鏡上，以及在吐魯番發現的絹畫上，也都看到了類似的圖畫。伏羲雖然是一個象征性的人物，而且在圖象上畫成蛇身人面，帶有神話色彩，但由此我們可以約略地見



圖 3.

到古代的規和矩的形状,并且也能够想象得到这两种工具在中国一定是在很早的时期就出現的。

規、矩在中国古書里的記載,更是多得記不胜記。除了一些書里記着規、矩是倕(古代的巧匠)所創制以外,如《孟子》中說:“离娄之明,公輸子之巧,不以規矩,不能成方圓。”《墨子》中有:“輪匠执其規矩,以度天下之方圓。”《荀子》中有:“圓者中規,方者中矩。”这些都說明了規是画圓的工具,矩是画方的工具。又《孟子》的“圣人既竭目力焉,繼之以規、矩、准繩”,說明了規和矩可以測目力所不及的东西,例如丈量田地等。《史記》所說的夏禹“陆行乘車,水行乘船,……左准繩,右規矩,載四时以开九州,通九道”,說明了規和矩可以用来勘測水道。这里和規、矩同时提到的准繩,就字面来看,准是測定水平方向的工具,繩是下悬重錘的繩子,用来測定豎直綫方向的。但是,我們設想当时还不可能有利用水泡来測定水平的“水准器”,所以准繩不應該是准和繩两种工具,它只是一条下悬重錘的繩子,可以和矩結合起来使用,在建筑工程上用以檢驗石基的是否水平(如图4,繩的一端固定在矩的直立分支 CE 的端点 C ,当繩下悬重錘 D 后的静止方向和这一分支一致时,可以确定和另一分支接触着的石基边缘 AB 成水平),現今的建筑工人还是要用到这个方法,这个矩就叫水平尺。《周髀算經》(約公元前一世紀时的書)有“平矩以正繩”一句話,可能就是指用矩和繩

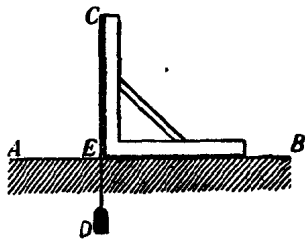


图4.

来测定水平方向說的。另外,《周髀算經》里还有“合矩以为方,环矩以为圓”两句話。第一句的意思是說,用两个矩配合起来,可以做成各种大小的方形;第二句的意思是說,使一个矩的两个分支外緣通过一条固定綫段的兩端,把这个矩环繞着旋轉一周,那末直角頂点所經過的路綫是一个圓(就是以固定綫段为斜边的直角三角形,它的直角頂点的軌迹是圓)。这里又提供了矩的另一种用途。

三

我国大概从周代开始,由于生产斗争的实际需要,人們对图形的認識已在很大程度上有了提高。在春秋时代,齐国出了一本有关工艺的書,名叫《考工記》,著作者的姓名已不可考。这本书里把几种特殊的角定了专门的名稱,例如 90° 的角叫“矩”, 45° 的角叫“宣”, 135° 的角叫“磬折”, 67.5° 的角叫“欂”等。由此可知,那时除了直角以外,对銳角和鈍角也都有了認識了。这本书里叙述到农具、建筑工具和水利用具,都已经能够利用角度来作說明。

中国古代测定时刻,常用一种“日晷”。日晷的底盘上刻着度数,利用斜挂的綫在日光照射下的影子,在底盘上讀出度数而确定时刻。以前在貴州紫云县发掘到一个玉盘日晷,上面刻了很細密的分度綫(如图5),它是把圓周分成100个等分的,其中画出了从1到69的分度綫,計有68个相当精确的等分。从圓周上所刻的数字来考察,大概这是汉代以前的东西。由此知道,中国对圓的分度的認識,起源也是很早的。

在公元前五世紀时，魯国的墨翟又把直觀的几何知識提高到理論方面。現传的《墨子》一書，大概是墨翟的門弟子所写的，其中記載了他在学术上的各种見解。我們从《墨子·經說上》，知道墨翟曾經給圓

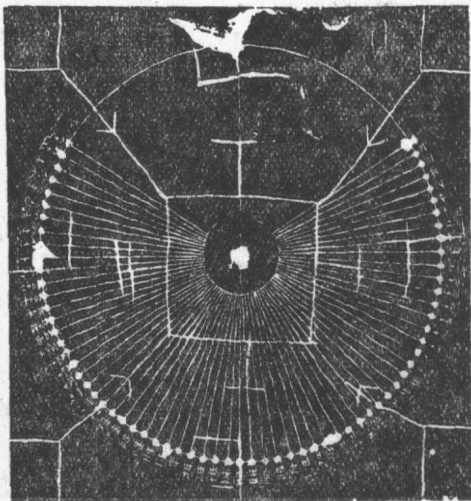


图 5.

和方下了定义。書中提到圓是从一个中心到界上各点的距离都是同样长的；方是四面都是直角的。墨翟还提出了“球的体积和直径的比是常数”的說法。又墨翟对于力学和光学上有許多重要发现，这些发现显然是和数学都有联系的。

此后，大約在公元前一世紀，有一部討論天文測量的書流传于世，就是前面提到过的《周髀算經》。到公元一世紀后期，还有一部叫《九章算术》的書，經過整理、删补而最后完成。因为在这两部書里記載了求各种平面形的面积和立体的体积的方法，以及在地面的和天文的各种測量术，所以我們知道当时人民已經掌握了更加丰富的几何知識。到三国时，刘徽注《九章算术》(公元 263 年)，又能对图形作出理論分析，証明面积

和体积算法的原理(見《中国算术故事》“实用算术的发达”),并且能够应用极限观念来研究求积問題,那是已經把几何知識发展到更高的阶段了。

从《九章算术》等書里所举的問題,我們知道,求面积的方法是从計算田地大小的需要产生的,求体积的方法是从計算倉庫容量和工程土方的需要产生的,各种測量术是从农业、水利方面需要研究历法和知道地形高低等产生的。这些都說明了由社会生产的发展,引起了数学的发展。但数学的发展无疑也能推动着社会生产的发展。例如由天文历法的計算,使人們掌握了寒暑交替的正确規律,由地形測量和土方計算,使水利工程得到适当的施工設計,从而农业生产就随着发展起来。因此,我們可以說,数学发展是和社会生产发展相互作用着的。虽然我国古代劳动人民对几何方面有了很多創造,但毕竟只是在封建社会的生产关系下,由生产实践积累起来的一些零星的、片断的知識。在封建社会里,生产資料被封建統治階級所占有,劳动人民受到残酷的剝削,这种生产关系束縛了生产力的进一步发展,从而社会生产的发展也就受到了限制。这也就限制了我国古代几何学的进一步发展。

从勾三股四弦五說起

一

凡是学过初等平面几何学的人,都知道一条有关直角三角形三边关系的著名定理。这条定理的内容是:“直角三角形的两条直角边平方的和,等于斜边的平方。”过去一般人只知道这定理是由希腊毕达哥拉斯首先发现的(公元前540年),因而把它称做“毕达哥拉斯定理”(或简称“毕氏定理”)。其实我国远在周代就有商高的“勾三股四弦五”的特例,稍后就有陈子所举的普遍定理,論起时期来,也是相当早的。因此,我們現在应该正式給这条定理定名,把它称做“勾股定理”。

商高是周代人。在我国現传最古的一部数学書《周髀算經》里,記載着商高和周公(公元前一千一百余年)的問答,其中有一段提到了商高所說的勾三股四弦五的重要关系。古时称直角三角形的两条直角边是勾(較短的一条)和股(較长的一条),斜边是弦。勾三股四弦五的意义,就是說,如果直角三角形的两条直角边的长分別是三和四,那末斜边的长一定是五(如图6)。或者反过来说,如



图 6.

果三角形三边的长成为 $3:4:5$ 的連比,那末这个三角形一定是直角三角形(古称勾股形)。这一个性質是表示直角三角形三边間相互关系的一个特例。

勾三股四弦五可能是我国古代劳动人民在生产劳动中的創造,而是从商高口中道出,再經后人把它記錄在書籍里面的。設想我們的祖先是利用这个关系来准确地做成直角,并用它做标准去进行測量的。比如古代人民在正午时用一根直立标竿的最短的影子确定了南北方向以后,要想决定东西方向,可以取一根十二尺长的繩,依照三尺、四尺、五尺的三段折成一个三角形,把三尺的一边放到已經确定的南北方向,那末四尺的一边所取的方向就是所求的东西方向。

《周髀算經》在商高和周公的問答之后,又載了陈子和荣方問答的話。陈子告訴荣方測量太阳的高和远的方法。他假定地面是平面,先用相似形的比例定理求得太阳直下方地面上一点离測者 60000 里做勾(如图 7),太阳离地的高 80000 里做股(以上两个数的求法見下篇),然后“勾、股各自乘,并而开方除之”(就是把勾、股两个数各平方,然后相加,再开平方),得 100000 里,就是从測者到太阳的距离。从这里,无异是告訴我們勾、股二数平方的和等于弦的平方,这正是一条普遍的勾股定理。

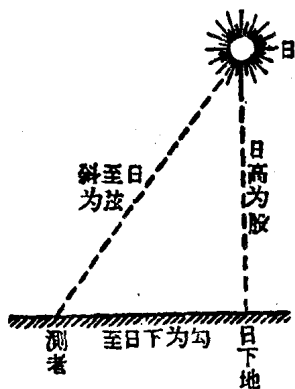


图 7.

在上例中所設的数——60000, 80000, 100000, 仍是三、四、五的倍数, 似乎普遍性还不够; 但是在陈子的其他几个例子中就完全推到一般了。现在另举一个例子, 其中所求的是太阳在周城(就是周成王所建的都城洛邑, 在现今河南洛阳)正东或正西时的直下地和周城的距离。

陈子仍旧假定地面是平面, 再把太阳的视运动路线在地面上的射影看作是一个圆 ABC (如图 8)。他在周城(D)的平地直立八尺高的标竿, 用来测太阳的影子。因为这个标竿是放在周城测量

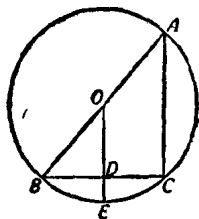


图 8.

的, 所以叫做“周髀”。当夏至那一天的正午时(太阳在正南方), 在太阳光下测得周髀的影子长 1 尺 6 寸, 而同时在南方或北方相距 1000 里的地方, 用同法测得的影长就要相差 1 寸(这个数当然是不够精确的)。因为在太阳直下方地面上一点(E)如果也直立一根标竿, 它一定是没有影子的(就是影长 0 寸), 于是陈子由两竿南北相隔 1000 里时影长差 1 寸, 算出周城既和日下地影差 16 寸, 其间相距一定是 16000 里(这显然是解比例式 $1:16=1000:x$ 而得到的)。又人伏在地上望北极星, 看见星和竿顶相合时, 量得人眼离竿足 1 丈零 3 寸。照日影来推算(因为如果北极星的光和太阳光差不多强, 能使竿后生影的话, 那末影长显然就是 1 丈零 3 寸), 知道地面上位于北极星直下的一点(O)距离周城应该是 103000 里(解比例式 $1:103=1000:x$ 而得)。设北极星在地面上的射影是圆 ABC 的中心 O , 太阳在周城正东时的直下地是 C , 在正西