样条函数：基本理论

（三）

Larry L. Schumaker　著

赵根榕　等　译

西北大学数学系计算数学教研室

一九八二年一月

第 六 章

样条的逼近威力

本章考察函数的光滑性与它能如何好地被多项式样条逼近之间的关系。包括正定理、下界、逆定理与饱和结果。此外，我们还通过它们用多项式样条的逼近所来表征一些古典的光滑函数空间。

6.1. 引言 假设 F 是定义于区间 $[a, b]$ 上的光滑函数类，而 S 是定义于同一区间上的多项式函数空间。本章中，我们感兴趣的是：找寻 f 的光滑性与它能如何好地被 S 中的样条逼近之间的关系。为提供 $f \in F$ 能如何好地被逼近的度量，我们定义

$$d(f, S)_X = \inf_{s \in S} \|f - s\|_X , \qquad (6.1)$$

其中 X 是包含 F 与 S 的某一赋范线性空间。在实用上，我们感兴趣的主要是空间 $X = C[a, b]$ 或 $X = L_p[a, b]$，其中 $1 \le p < \infty$。

本章最重要的部分是第 6.4 节。在该节中，我们得到了 $d(f, S)$ 的大小的上界。我们的结果与第三章中关于多项式逼近所建立的结果类似。在该章中，我们建立了次形的界：

$$d(f, P_m)_X \le C\omega_f\left(\frac{1}{m}\right) ,$$

其中 C 是与 m 及 f 无关的常数，而 $\omega_f(t)$ 是描述 f 的光滑性的某个函数。我们当时特别感兴趣的是当 $m \to \infty$ 时这个界的性态。

然而，对于样条逼近，我们对 m 的大值并不感兴趣。为获得用样条的精确逼近，我们宁愿保持 m 固定于很低的值，而增加结点的个数。因

而，我们关于样条逼近的正定理有形式

$$d(f,S)_X \le C_1\,\omega_f(\bar{\Delta}),\ \text{所有的}\ f\in F, \qquad (6.2)$$

其中$\bar{\Delta}$是连带于样条空间S的分划$\Delta=\{x_i\}_0^{k+1}$的网眼大小，定义为

$$\bar{\Delta}=\max_{0\le i\le k}(x_{i+1}-x_i). \qquad (6.3)$$

我们关于样条逼近的主要正定理包含在第6.4节，我们专心于给出具有单结点的样条空间$S_m(\Delta)$的界，事实上，因为

$$S_m(\Delta)\subseteq S(P_m;M;\Delta),\ \text{所有的}\ M,$$

故得

$$d[f,S(P_m;M;\Delta)]\le d[f,S_m(\Delta)],$$

而且我们的边界自动对于所有的样条空间

$S(P_m;M;\Delta)$都成立。

作为$d(f,S)_X$的上界的伙伴，我们还将给出此形的对应的下界：

$$d[f,PP_m(\Delta)]_X\ge C_2\,W_f(\bar{\Delta}),\ \text{某个}\ f\in F, \qquad (6.4)$$

其中$PP_m(\Delta)$是连带于分划Δ的m阶分段多项式空间，因为

$$S(P_m;M;\Delta)\subseteq PP_m(\Delta),\ \text{所有的}\ M,$$

故$PP_m(\Delta)$的下界自动产生所有样条空间$S(P_m;M;\Delta)$的下界。

在能建立(6.2)与(6.4)的情形中，将证明我们的界有正确的阶，进而，比较C_1与C_2的大小，能获得关于这些常数是如何好的信息，在这种情形，我们还有可能作出结论：所有$PP_m(\Delta)$与$S_m(\Delta)$之间的样条空间都有相同的逼近威力，而与重数向量M如何

自然希望，样条多项式能达到的逼近的阶随着被逼近函数类的光滑性而增大，精确到极限，这是成立的。然而，我们将在第6·8到6·9节中证明：如$F \cap P_m \neq \phi$，则类F的可能的极大收敛阶是$\bar{\Delta}^m$，而不管假设F有多大的光滑性。这是个饱和结果。这种结果将由各样的逆定理推出。在逆定理中，通过函数被分段多项式，即样条如何好地逼近，而估计它的光滑度。

在第2·10节中，曾观察到：多项式空间列P_1，P_2，……是多个古典光滑函数空间的（就n宽度的意义而言）渐近最优逼近空间列。在这一章中，我们将证明：对于适当的越来越细的分划列来说，样条空间$S_m(\Delta_1)$，$S_m(\Delta_2)$，……，也是渐近最优逼近空间。

6·2．分段常数　为说明函数的光滑性及其用样条的可逼近性的阶之间的关系，在这一节与下一节，我们考察两个特例。在这一节中，考察用分段常数的逼近；在第6·3节，考察用分段线性样条的逼近。对应于Δ，定义网眼大小以

$$\bar{\Delta} = \max_{0 \le i \le k} (x_{i+1} - x_i)\,. \qquad (6\cdot5)$$

这时，我们就能建立下述正定理。它给出几种典型光滑函数空间的逼近阶的界。

定理6·1．　对于任何的Δ

$$d[f,S_1(\Delta)]_\infty \le \frac{1}{2}\omega(f;\bar{\Delta})_\infty\,,$$

$$\text{对所有} f \in B[a,b]; \qquad (6\cdot6)$$

$$d[f,S_1(\Delta)]_q \le \frac{1}{2}\bar{\Delta}^{1-1/p+1/q}\|Df\|_p,$$

$$\text{所有} f \in L_p^1[a,b]，\ 1 \le p \le q \le \infty; \qquad (6\cdot7)$$

$$d(f, S_1(\Delta))_\infty \le \frac{1}{2}\bar{\Delta}\|Df\|_\infty,$$

$$\text{所有 } f \in C^1[a,b] \text{。} \qquad (6.8)$$

<u>证明</u>。关于这些不同的空间的定义，见第2.1节。现在假设 $f \in B[a,b]$。命

$$s(x) = \frac{(m_i + M_i)}{2}, \qquad x \in I_i,$$

$$i = 0, 1, \dots\dots, k, \qquad (6.9)$$

其中

$$m_i = \inf_{x \in I_i} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in I_i} f(x),$$

这里 $I_0, \dots\dots, I_k$ 是由分划 Δ 所定义的 $[a, b]$ 的子区间。显然 $s \in S_1(\Delta)$。更进一步地，对于所有 $x \in I_i$，

$$|s(x) - f(x)| \le \frac{(M_i - m_i)}{2} \le \frac{1}{2}\omega(f; \bar{\Delta}).$$

这证明了(6.6)(我们从Whitney定理也能直接得到这一一见定理3.16)。

现在假定 $f \in L^1_\infty[a,b]$，则存在 $\xi_i \in I_i$ 使得

$$s(x) = f(\xi_i) = \frac{(m_i + M_i)}{2},$$

$$\text{对所有 } x \in I_i \text{。}$$

因此，对于 $x \in I_i$，

$$|f(x) - s(x)| \le |f(x) - f(\xi_i)| \le$$

$$\le \int_{x_i}^{x_{i+1}} |Df(t)|\,dt \le \bar{\Delta}\|Df\|_\infty \qquad (6.10)$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

由于对于所有 $i=0,1,\cdots\cdots,k$ 此成立，所以对于 $p=q=\infty$ 我们证明了（6.7）。因为 $C[a,b]\subseteq L_{\infty}^{1}[a,b]$，故估计式（6.8）成立。

为了对于一般的 $1\le p\le q\le\infty$ 证明（6.7），我们对（6.10）应用 Holder 的不等式而得到

$$\underset{x\in I_i}{|f(x)-s(x)|}\le\bar{\Delta}^{1-1/p}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}|Df(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

这蕴涵

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-s(x)|^q dx\le$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}\le\bar{\Delta}^{q-q/p+1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}|Df(t)|^p dt\right)^{q/p}$$

并且关于 $i=0,1,\cdots\cdots,k$ 上求和就得到

$$||f-s||_q\le$$

$$\le\bar{\Delta}^{1-1/p+1/q}\left[\sum_{i=0}^{k}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}|Df(t)|^p dt\right)^{q/p}\right]^{1/p}$$

最后，对最后一个和应用 Jensen 不等式（见注释 6.2），我们得到它的界为

$$\left[\sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|Df(t)|^p dt\right]^{1/p}=||Df||_p .$$

从而我们就证明了（6·7）． □

我们还能给出 L_p 函数的分段逼近的误差界．由于对于任意阶的样条在 §6·4 我们还要给出 L_p 结果，所以我们在这儿不去提它们了．

为了说明相应于定理 6·1 中所给出的上界能够得到怎样的下界，我们来建立 $C[a,b]$ 和 $C^1[a,b]$ 中的函数的下界．Sobolev 空间的函数下界可以类似地确定．

<u>定理 6·2．</u> 给定任意的 Δ，存在函数 $F_1\in C[a,b]$ 使得

$$d[F_1, S_1(\Delta)]_\infty \le \frac{1}{2}\omega(F_1;\bar{\Delta})_\infty . \tag{6·11}$$

更进一步地，对于所有 $\varepsilon>0$，存在函数 $F_\varepsilon\in C^1[a,b]$ 使得

$$d[F_\varepsilon, S_1(\Delta)]_\infty \ge \frac{(1-\varepsilon)\bar{\Delta}}{2}\|DF_\varepsilon\|_\infty . \tag{6·12}$$

<u>证明．</u>命 $[x_i, x_{i+1}]$ 是 $[a,b]$ 对应于 Δ 的子区间且 $x_{i+1}-x_i=\bar{\Delta}$．我们定义

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\le x_i\\ (x-x_i)/(x_{i+1}-x_i), & x_i\le x\le x_{i+1}\\ 1, & x_{i+1}\le x\end{cases}$$

则因 $\omega(F_1,\bar{\Delta})_\infty=1$ 而 $d[F_1, S_1(\Delta)]_\infty=1/2$，故我们证明了（6·11）．

给定 $\varepsilon>0$，我们定义 $\varphi(x)$ 当 $x\notin[x_i,x_{i+1}]$ 时为零，当 $x\in[x_i+\varepsilon\bar{\Delta}, x_{i+1}-\varepsilon\bar{\Delta}]$ 时为 1，而在二者之间是线性的．则函数 $F_\varepsilon(x)=\int_{x_i}^{x}\varphi(t)dt$ 当 $x\le x_i$ 时是零，$x\ge x_{i+1}$ 时

六三

是（$1-\varepsilon$）/2，在二者之间是单调的函数，由此可得 $d[F_\varepsilon, S_1(\Delta)]_\infty = \bar{\Delta}(1-\varepsilon)/2$，另一方面，$\|DF_\varepsilon\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$，故（6.12）成立。 上界（6.6）和（6.8）

在定理 6.2 中的下界说明 $C[a,b]$ 和 $C^1[a,b]$ 中的函数中是最佳可能的，包括常数在内。

现在我们转到估计函数的光滑性的逆问题，通过分段常数能够怎样好地逼近这个函数来估计。作为这方面的第一步，我们建立下面定理，其中我们采用

$$\underline{\Delta} = \min_{0 \le i \le k} (x_{i+1} - x_i) . \qquad (6.13)$$

<u>定理 6.3</u>，对于任意的 $f \in C[a,b]$，

$$\omega(f;\bar{\Delta})_\infty \le 4\left\lceil \frac{\bar{\Delta}}{\underline{\Delta}} \right\rceil d[f; S_1(\Delta)]_\infty \qquad (6.14)$$

这里 $\lceil \bar{\Delta}/\underline{\Delta} \rceil = \min\{j: \bar{\Delta}/\underline{\Delta} \le j\}$。

<u>证明</u>，假定 $y - x \le \underline{\Delta}$，则区间（$x, y$）至多只能包含一个结点。如果它不包含任何结点，则

$$|f(y)-f(x)| \le |f(y)-s(y)| + |s(x)-f(x)| \le 2d[f; S_1(\Delta)].$$

另一方面，如果（x, y）包含结点 x_i，则

$$|f(y)-f(x)| \le |f(y)-f(x_i)| + |f(x_i)-f(x)| \le 4d[f; S_1(\Delta)].$$

在这两种情况，我们都断定有 $\omega(f;\underline{\Delta}) \le 4d[f; S_1(\Delta)]$。现在，将这个与下面事实结合

$$\omega(f;\bar{\Delta}) \le \omega\left(f; \frac{\bar{\Delta}\cdot\underline{\Delta}}{\underline{\Delta}}\right) \le \left\lceil \frac{\bar{\Delta}}{\underline{\Delta}} \right\rceil \omega(f;\underline{\Delta}) ,$$

我们就得到（6·14）。 □

定理6·3本身实际上关于函数f的光滑性谈得并不很多。要获得关于f的光滑性的情报，我们至少对于t的收敛于0的某一序列（不象定理6·3那样，只在单个点上）需要知道$\omega(f;t)$的性态。要获得这种情报，我们必须对于分划序列Δ_ν都知道$d[f,S(\Delta_\nu)]$的大小。由于（6·4）中的界依赖比$\overline{\Delta}_\nu/\underline{\Delta}_\nu$，显然不是每个分划列都这样，而且我们需要对网比加上一些控制。我们导至下面的定义：

定义6·4·拟均匀分划 命Δ_1，Δ_2，……是$[a,b]$上的分划序列。如果$\sigma>0$是一个常数且使得

$$\frac{\overline{\Delta}_\nu}{\underline{\Delta}_\nu}\le\sigma \quad \text{对所有}\ \nu, \qquad (6·15)$$

则我们称Δ_ν是一个σ—拟均匀分划序列。

除了在前网比，对于小的t为了得到关于$\omega(f;t)$的情报，我们必须假定$\overline{\Delta}_\nu\to0$。另一方面，我们不希望$\overline{\Delta}_\nu/\overline{\Delta}_{\nu+1}$太大。所以我们下面定义：

定义6·5·分划序列的稳定性 我们说分划序列Δ_ν稳定地趋向于零，只须存在常数$1\le\alpha<\beta$和$1<\beta<\infty$使得对所有的ν，

$$\alpha\overline{\Delta}_{\nu+1}\le\overline{\Delta}_\nu\le\beta\overline{\Delta}_{\nu+1} \quad 。\qquad (6·16)$$

在叙述关于分段常数逼近的某一个逆定理以前，我们给出两个重要分划序列例子，它们稳定地趋近于0。

例子6·6·均匀分划 对于$\nu=1,2,\dots\dots$，命

$$\Delta_\nu=\{a+i\overline{\Delta}_\nu\}_{i=0}^{\nu} ，$$

$$\overline{\Delta}_\nu=\underline{\Delta}_\nu=\frac{(b-a)}{\nu} 。$$

讨论。对于每一个ν，Δ_ν分$[a,b]$为ν个等距的子区间。均匀分划是1一拟均匀的。这个分划序列稳定地趋向于零，且常数$\alpha=1$，$\beta=2$。 □

例子6.7。均匀分划套　对于$\nu=1,2,\cdots\cdots$，命

$$\Delta_\nu=\{a+i\bar{\Delta}_\nu\}_{i=0}^{\nu},\qquad \bar{\Delta}_\nu=\frac{(b-a)}{2^\nu}。$$

讨论。由于$\Delta_\nu\subseteq\Delta_{\nu+1}$，我们称这个为分划序列套。它稳定地趋向于零，且常数$\alpha=\beta=2$。 □

下面定理是关于用分划序列Δ_ν上的$S_1(\Delta_\nu)$逼近的一个逆定理。

定理6.8。假定Δ_ν是$[a,b]$上的一列σ一拟均匀分划，且网格大小稳定地趋向于零。并且假定$f\in C[a,b]$使得

$$d[f,S_1(\Delta_\nu)]_\infty\leq\phi(\bar{\Delta}_\nu),\quad 对所有\nu=1,2,\cdots\cdots \tag{6.17}$$

其中ϕ是$(0,\bar{\Delta}_1)$上的单调递增函数。则

$$\omega(f;t)\leq 4[\beta][\sigma]\phi(t)$$
$$对所有0\leq t\leq\bar{\Delta}_1。\tag{6.18}$$

其中β是稳定性定义6.5中的常数，且$[\beta]=min\{j:\beta\leq j\}$。

证明。命ν使得$\bar{\Delta}_{\nu+1}\leq t<\bar{\Delta}_\nu$。由于$\omega$和$\phi$的单调性，(6.17)与定理6.3结合蕴涵

$$\omega(f;t)\leq W(f;\bar{\Delta}_\nu)\leq\omega(f;\beta\bar{\Delta}_{\nu+1})\leq$$
$$[\beta]\omega(f;\bar{\Delta}_{\nu+1})$$
$$\leq 4[\beta][\sigma]d[f,S_1(\Delta_{\nu+1})]\leq$$
$$4[\beta][\sigma]\phi(\bar{\Delta}_{\nu+1})$$

$$\le 4[\beta][\sigma]\phi(t) \quad . \qquad \Box$$

定理(6·8)的下面的简单推理表明，无论函数如何光滑，用分段常数逼近的好的程度总有限制。这种结果称为饱和定理。

定理6·9. 命 Δ_ν 是如定理(6·8)中的分划序列。假定 $f\in C[a,b]$ 使得，对所有 ν，

$$d[f, S_1(\Delta_\nu)]_\infty \le C\overline{\Delta}_\nu\psi(\overline{\Delta}_\nu), \qquad (6·19)$$

其中 C 是常数，函数 $\psi(t)$ 使 $t\psi(t)$ 为单调的，且当 $t\to 0$ 时 $\psi(t)\to 0$，则 f 一定是常数，即 $f\in P_1$。

证明. 定理6·8和(6·19)一起蕴涵着当 $t\to 0$ 时，$\omega(f;t)/t\to 0$。利用光滑模的性质[参考(2·122)]，这蕴涵 f 是常数。

定理6·9断言用定义于稳定趋向于零的拟均匀分划序列 Δ_ν 上的分段常数可能达到的最大收敛阶是一。这个收敛阶当 $f\in L^1_\infty[a,b]$ 时就能达到(象定理6·1中所证明的那样)。仅对于常数(它被精确逼近)才达到更高阶收敛。然而这并不排除下述可能性：对于给定函数 f，如利用适当的(非拟均匀)网格序列，则得高阶逼近是可能的。关于结点是自由参数的情况的结果，参见第七章。

定理6·10. 命 Δ_ν 是如定理(6·8)中的分划序列。则函数 $f\in C[a,b]$ 属于 L_{ip}^{α} 当且仅当对于所有 ν

$$d[f, S_1(\Delta_\nu)]_\infty \le C(\overline{\Delta}_\nu)^\alpha \qquad (6·20)$$

对某个常数 C。

证明. 如果 $f\in L_{ip}^{\alpha}$，则 $\omega(f;t)\le Ct^\alpha$，且(6·20)由定理6·1推出。另一方面，定理6·8表明如果 f 满足(6·20)，则 $\omega(f;t)=O(t^\alpha)$，于是 $f\in L_{ip}^{\alpha}$。

如果对网格序列没有稍进一步的假设，定理6·8中到6·10中

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

$f\in C[a,b]$这个假设不能被取掉。考虑下面的例子：

<u>例子6.11</u>. 用分段常数逼近 $f(x)=(x-(a+b)/2)_+^0$。

<u>讨论</u>. 显然，对于所有的 $0<t<b-a$，$w(f;t)=1$。另一方面，如果Δ是包含点 $(a+b)/2$ 的分划，则 $d[f;S_1(\Delta)]=0$。于是(6.14)不能成立。类似地，如果 Δ_ν 是分划序列，其每一个都包含 $(a+b)/2$（例如，它显然是具有分划数的情况），则定理6.10不能成立。的确，(6.20)对任何α平凡地成立，然而由于f不连续，所以它一定不属于任何Lipschitz类。 □

对于 $f\in B[a,b]$ 和适当的 Δ_ν，能建立定理6.8到6.10的类比。首先我们证明定理6.3的较强的变型。

<u>定理6.12</u>. 对于任何的 $f\in B[a,b]$，

$$w(f;\bar{\Delta})\le\left[\frac{\bar{\Delta}}{\underline{\Delta}}\right]\left(4d[f;S_1(\Delta)]_\infty+\max_{1\le j\le k}\text{跳跃}[f]_{x_j}\right), \qquad (6.21)$$

其中

$$\text{跳跃}[f]_{x_j}=f(x_j+)-f(x_j-),\quad j=1,2,\dots\dots,k$$

<u>证明</u>. 证明非常象定理6.3的证明。令 $y-x\le\underline{\Delta}$，则 (x,y) 最多包含一个结点。如果在 (x,y) 中没有结点，则与前一样，$|f(y)-f(x)|\le 2d[f,S_1(\Delta)]$。如果 x_i 是 (x,y) 中的结点，则

$$|f(y)-f(x)|\le|f(y)-f(x_i+)|+|f(x_i+)-f(x_i-)|+|f(x_i-)-f(x)|.$$

这蕴涵 $w(f;\underline{\Delta})\le 4d[f,S_1(\Delta)]+\max\limits_{1\le j\le k}\text{跳跃}[f]_{x_j}$。

此时利用估计 $w(f;\bar{\Delta})\le[\bar{\Delta}/\underline{\Delta}]w(f;\underline{\Delta})$，(6.21)成立。 □

现在我们能证明定理 6・8 的一个改进的变型（关于分划具有较强的假设）。

<u>定理 6・13</u>・命 $\Delta_\nu=\{x_i^\nu\}_\nu^{k_\nu+1}$ 是稳定趋向于零的 σ 拟均匀分划序列，且假定对于所有 $1\le i\le k_\nu$ 存在 $n_{i,\nu}>\nu$ 使得 $x_i^\nu\in\Delta_{n_{i,\nu}}$。则如果 $f\in B[a,b]$ 使得

$$d[f,S_1(\Delta)]_\infty\le\phi(\bar{\Delta}_\nu)\quad\text{。}\tag{6・22}$$

其中 ϕ 在 $(0,\bar{\Delta}_1)$ 上单调递增，由此可得

$$\omega(f;t)\le 6[\sigma][\beta]\phi(t)\text{，}$$

$$\text{对所有 } 0<t<\bar{\Delta}_1\quad\text{。}\tag{6・23}$$

<u>证明</u>・命 ν 使得 $\bar{\Delta}_{\nu+1}\le t<\bar{\Delta}_\nu$ 。对于每一个 i 我们知道 $x_i^{\nu+1}\in\Delta_{n_{i,\nu+1}}$，于是

$$|f(x_i^{\nu+1}+)-f(x_i^{\nu+1}-)|\le$$

$$\le 2d[f,S_1(\Delta_{n_{i,\nu+1}})]\le 2\phi(t)\text{。}$$

由此得到

$$\omega(f;\bar{\Delta}_{\nu+1})\le 6[\sigma]\phi(t)\text{。}$$

象在定理 6・8 中的证明中那样论证，我们就得到（6・23）。 □

<u>推理 6・14</u>・命 Δ_ν 是如定理 6・13 中的 $[a,b]$ 上的分划序列，则函数 $f\in B[a,b]$ 属于 $L_{\epsilon p}^{\alpha}$ 当且仅当（6・20）成立。

<u>证明</u>・证明完全象定理 6・10 那样进行，用定理 6・13 代替定理 6・8。

我们观察到定理 6・13 和它的推理二者都能用于均匀分划序列的情况，如在例 6・6（因为容易看出，给定 Δ_ν 中的 x_i^ν，存在后面的分划不包含 x_i^ν）。另一方面，对于在例 6・7 中所给定的分划套序列不

能应用这个结果。

在这一节我们把注意力集中于对于∞连续模的逆结果和饱和结果上。对于p连续模能够通过$d[f, S_2(\Delta_\nu)]_p$建立类似结果。见6.9节。

6.3 分段线性函数. 在这一节我们进一步说明函数的光滑性与其用样条的逼近阶之间的关系。这里我们只涉及线性样条($m=2$的情况)与一致范数。我们的第一个定理包含几个光滑函数空间的上界。

定理6.15. 命Δ是$[a, b]$的网距为$\bar{\Delta}$的分划。则

$$d[f, S_2(\Delta)]_\infty \le \omega(f; \bar{\Delta}), \quad 对于所有 f \in C[a, b] \tag{6.24}$$

$$d[f, S_2(\Delta)]_\infty \le \omega_2(f; \bar{\Delta}/2), \quad 对于所有 f \in C[a, b]; \tag{6.25}$$

$$d[f, S_2(\Delta)]_\infty \le \frac{\bar{\Delta}}{2}\omega(Df; \bar{\Delta}), \quad 对于所有 f \in L_\infty^1[a, b]; \tag{6.26}$$

$$d[f, S_2(\Delta)]_\infty \le \bar{\Delta}\|Df\|_\infty, \quad 对于所有 f \in L_\infty^1[a, b] \tag{6.27}$$

$$d[f, S_2(\Delta)]_\infty \le \frac{\bar{\Delta}^2}{8}\|D^2 f\|_\infty, \quad 对于所有 f \in L_\infty^2[a, b]. \tag{6.28}$$

证明. 给定$f \in C[a, b]$, 命

$$S(x)=\begin{cases} f_i+\dfrac{(f_{i+1}-f_i)(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)}, & x_i\le x\le x_{i+1}, \\ i=0,1,\cdots\cdots,k, & \end{cases} \qquad (6.29)$$

其中，一般地，我们记 $f_i=f(x_i)$，$i=0,1,\cdots\cdots,k+1$。这是一个在点 $a=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_k<x_{k+1}=b$ 内插 f 的分段线性多项式，即

$$S(x_i)=f(x_i), \quad i=0,1,\cdots\cdots,k+1.$$

现在，对于任意的 $0\le i\le k$ 和 $x_i\le x\le x_{i+1}$，由 f 的连续性在 $I_i=[x_i,x_{i+1}]$ 中必存在 ξ_x 使得 $S(x)=f(\xi_x)$，但这时对 $x\in I_i$

$$|f(x)-S(x)|=|f(x)-f(\xi_x)|\le\omega(f;\bar{\Delta}).$$

我们就证明了（6.24）。

现在假定

$$M=||f-S||_\infty=\max_{a\le x\le b}\delta(x),$$

$$\delta(x)=|f(x)-S(x)|.$$

由于 δ 是连续的，所以存在 η（我们假定它位于区间 $I_i=[x_i,x_{i+1}]$ 中）使得 $M=\delta(\eta)$，则如果 $x_i\le\eta\le(x_i+x_{i+1})/2$，就有

$$|f(\eta-h)-2f(\eta)+f(\eta+h)|=$$

$$=|\delta(\eta-h)-2\delta(\eta)+\delta(\eta+h)|\ge M,$$

其中 $h=\eta-x_i$，这就证 $M\le\omega_2(f;h)\le\omega_2(f;\bar{\Delta}/2)$，如果 η 在 I_i 的后一半，那么关于 $h=x_{i+1}-\eta$ 的类似的论证得出相同的估计，从而我们就证明了（6.25），（参考定理3.17）。

现在假定 $f\in L^1_\infty[a,b]$，则对于任何 $0\le i\le k$ 及 $x_i\le x\le$

$\le (x_i+x_{i+1})/2$。

$$|f(x)-S(x)| \le \int_{x_i}^{x} |Df(t)-DS(t)|\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\bar{\Delta} \sup_{x_i \le t \le x_{i+1}} |Df(t)-DS(t)|。$$

而 $DS(t)$ 在 I_i 中是个常数，且由于 S 和 f 在 x_i 和 x_{i+1} 点的值一致，从而 $\inf_{t\in I_i} Df(t) \le DS(t) \le \sup_{t\in I_i} Df(t)$，因此

$$\sup_{t\in I_i} |Df(t)-DS(t)| \le \omega(Df;\bar{\Delta})。$$

将这代入上面，我们得到 $|f(x)-S(x)| \le \frac{1}{2}\bar{\Delta}\omega(Df;\bar{\Delta})$。

如果 x 在区间 I_i 的后一半，则用

$$|f(x)-S(x)| \le \int_{x}^{x_{i+1}} |Df(t)-DS(t)|\,dt$$

并如上进行。由于 i 是任意的，我们就证明了（6·26）。估计式（6·27）立即得出。

最后，假定 $f\in L^2_\infty[a,b]$，则通过（3·5）中所给出的多项式内插的显式余项公式，我们有

$$f(x)-S(x)=(x-x_i)(x-x_{i+1})[x_i,x_{i+1},x]f。$$

由（2·93），$[x_i,x_{i+1},x]f \le \frac{1}{2}\|D^2 f\|_\infty$。另一方面，显然对于 $x_i \le x \le x_{i+1}$，$|(x-x_i)(x-x_{i+1})| \le \bar{\Delta}^2/4$，而且得出（6·28）。 □

现在我们给出伴随定理6·15中上界的一些下界。我们将不计杯最佳可能的常数。

定理 6·16 给定任意 Δ，则存在一个函数 $F_1 \in L^1_\infty[a,b]$ 使得

$$d[F_1, PP_2(\Delta)]_\infty \geq \frac{1}{2}\omega(F_1; \bar{\Delta}), \qquad (6\cdot30)$$

$$d[F_1, PP_2(\Delta)]_\infty \geq \frac{1}{4}\omega_2(F_1; \bar{\Delta}), \qquad (6\cdot31)$$

$$d[F_1, PP_2(\Delta)]_\infty \geq \frac{\bar{\Delta}}{8}\omega(DF_1; \bar{\Delta}), \qquad (6\cdot32)$$

及

$$d[F_1, PP_2(\Delta)]_\infty \geq \bar{\Delta}/4 \cdot \|DF_1\|_\infty. \qquad (6\cdot33)$$

进而，存在函数 $F_2 \in L^2_\infty[a,b]$ 使得

$$d[F_2, PP_2(\Delta)]_\infty \geq \frac{1}{32}\bar{\Delta}^2 \|D^2 F_2\|_\infty. \qquad (6\cdot34)$$

证明 给定 Δ，命 $I_i=[x_i, x_{i+1}]$ 是长度为 $\bar{\Delta}$ 的子区间，命

$$F_1(x)=\begin{cases} 2(x-x_i)/(x_{i+1}-x_i), & x_i \leq x \leq \bar{x}_i=(x_i+x_{i+1})/2 \\ 2(x_{i+1}-x)/(x_{i+1}-x_i), & \bar{x}_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

我们注意到 $d[F_1, PP_2(\Delta)]=1/2$，$\omega_2(F_1; \bar{\Delta})=2$，$\omega(DF_1; \bar{\Delta})=4/\bar{\Delta}$，且 $\|DF_1\|_\infty=2/\bar{\Delta}$。从而不等式（6·30）到（6·33）成立。这个函数是具有结点 $x_i, \bar{x}_i, x_{i+1}$ 的规范化 B 样条。

现在我们定义 F_2，命 $F_2(x)=B_2^*([2x-(x_i+x_{i+1})]/(x_{i+1}-x_i))$，其中 B_2^* 是 3 阶完全 B 样条——见例 4·35。则由于 $F_2((x_i+x_{i+1})/2)=1$，而有 $d[F_2, PP_2(\Delta)]=1/2$。另一方面，$\|D^2 F_2\|_\infty=(2/\bar{\Delta})^2\|D^2 B_2^*\|_\infty$ 而 $\|D^2 B_2^*\|_\infty=4$。将这些

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com