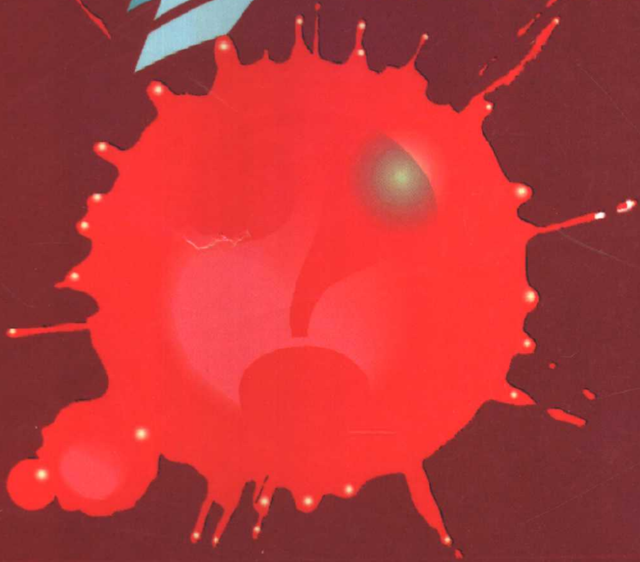
Problems on Elasticity



弹性力学中的若干问题

禹奇才 著

广东科技出版社

弹性力学中的若干问题

禹奇才　著

广 东 科 技 出 版 社
·广　州·

图书在版编目（CIP）数据

弹性力学中的若干问题／禹奇才著．—广州：广东科技出版社，2003.4
ISBN 7-5359-3226-6

Ⅰ．弹…　Ⅱ．禹…　Ⅲ．弹性力学－研究
Ⅳ．O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 003088 号

出版发行：广东科技出版社
（广州市环市东路水荫路 11 号　邮码：510075）
E－mail：gdkjzbb@21cn. com
http：//www. gdstp. com. cn
经　　销：广东新华发行集团
排　　版：广东科电有限公司
印　　刷：广东肇庆市科建印刷有限公司
（广东省肇庆市星湖大道　邮码：526060）
规　　格：787mm×1 092mm　1/32　印张 5.5　字数 110 千
版　　次：2003 年 4 月第 1 版
2003 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1～1 000 册
定　　价：15.00 元

内 容 提 要

著者长期从事弹性力学的教学与研究工作，在弹性力学的理论与应用方面取得了系统而又独具特色的研究成果。本书集中介绍了著者这方面的成果，系统分析了经典弹性理论的局限性并进行了适当的修正，拓宽了经典弹性力学因次分析法的应用范围，系统介绍了应用弹性力学中考虑剪应变的中厚板理论，具体阐述了弹性基础上考虑剪应变的中厚板小挠度问题和大挠度问题的解法。这些成果丰富了弹性力学的理论宝库，拓宽了弹性力学的应用范围，对工程力学研究有一定的启示和借鉴作用，对弹性力学学习有重要的指导作用。本书可作为工程力学研究人员、高等院校工程力学教师和有关工程技术人员的参考书，也可作为高校工科高年级本科生和研究生弹性力学课程的参考教材。

作 者 简 介

禹奇才，男，1955 年出生，教授，硕士生导师，现任广州大学教务处处长。1982 年研究生毕业，获西安交通大学工学硕士学位，1987 年至 1988 年作为公派访问学者在美国明尼苏达州立大学进修及开展合作研究。先后主持和参加省部级以上项目 6 项，在《工程力学》、《哈尔滨建筑大学学报》、《长沙铁道学院学报》、《高教探索》等核心期刊上发表论文 30 余篇，主编和参编教材 5 本。

序

近几十年来，弹性力学沿着两个不同的方向发展，一是弹性力学理论与解析方法，二是数值计算方法。后者的发展十分迅速，有限元法、有限条法、边界元法、加权残数法等相继提出，开辟了工程应用的广阔前景。但数值计算方法的发展并不否认理论与解析方法研究的重要性，理论研究的深入可以拓宽应用研究的范围，解析方法的结果可以为检验数值方法的精度提供依据。

本书作者长期从事弹性理论与结构分析的教学与科学研究，在弹性力学领域有很深的造诣，对弹性力学的理论和解析方法进行了系统深入的研究，形成了具有鲜明特色的系列成果。呈现在读者面前的《弹性力学中的若干问题》就是其系列成果的结晶。本书系统地指出了经典弹性理论的局限性，对无界单连体、多连体按应力求解的定解条件和平面单连体应力边界问题常体力情况下的简化结论进行了修正；运用特解加多个齐次边界条件解构成修正特解的方法彻底解决了受分布荷载的楔形体在某些情形下应力为无穷大的佯谬；推广了因次分析法，解决了不少经典难题；第一次研究和解决了弹性基础上中厚板的大挠度弯曲问题等，足见作者功底扎实，思想敏锐，见解精辟。其系列成果，丰富和发展了经典弹性理论。本书理论严谨、层次分明、推导严密、语言简练，具有重要的学术价值和应用价值。相信本书的出版将进一步促进弹性力学研究的深入开展。

中国工程院院士　曾庆元

中南大学教授

2003 年元旦于长沙

目　　录

第一章　经典弹性力学基本理论中几个问题的研究 ………… 1

§1-1　引例 ………… 1

§1-2　按应力求解结果的唯一性和定解条件 ………… 8

§1-3　关于平面单连体应力边界问题常体力情况下简化结论的修正 ………… 10

§1-4　经典弹性力学中佯谬的解决 ………… 11

§1-5　极坐标下按应力求解的定解条件 ………… 44

§1-6　极坐标中应力函数推导方法的研究 ………… 48

第二章　弹性力学中因次分析法的推广应用 ………… 59

§2-1　推广的因次分析法概述 ………… 59

§2-2　用推广的因次分析法求第二类楔形体的通解 ………… 60

§2-3　用推广的因次分析法求第三类楔形体的通解 ………… 67

§2-4　小结与讨论 ………… 74

第三章　三广义位移平板弯曲理论 ………… 77

§3-1　概述 ………… 77

§3-2　基本方程和边界条件 ………… 78

§3-3　圆板的基本方程 ………… 88

§3-4　小挠度问题基本方程的简化 ………… 94

§3-5　周边简支多边形板和轴对称圆板弯曲问题的解答 ………… 99

§3-6　具有固支板或自由边的矩形板弯曲问题的解答 ………… 105

第四章　轴对称夹层圆板和中厚度圆板的大挠度问题 …… 112
§4-1　基本方程和边界条件………………………………… 112
§4-2　修正迭代解法……………………………………… 118
§4-3　幂级数解法………………………………………… 127
第五章　弹性基础上考虑横向剪应变的板 ……………… 141
§5-1　弹性基础上考虑横向剪应变的四边简支矩形板 ……………………………………………… 141
§5-2　弹性基础上中厚板的贝塞尔函数解答 ……………… 146
§5-3　弹性基础上夹层圆板大挠度问题的精确解 ……… 155
§5-4　讨论 ………………………………………………… 167

第一章　经典弹性力学基本理论中几个问题的研究

本章从几个简单的问题出发，引出经典弹性理论的局限性，经过分析研究，再加以修正或补充。

§1-1　引　　例

引例 1　半无限板或半无限体在边界上受法向均布拉力 q，如图 1-1 所示。

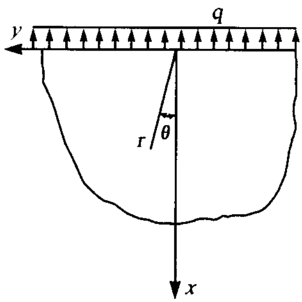


图 1-1

对于半无限体，参考文献［1］按空间问题的位移法求解，得出了其应力分量和位移分量解答。作者将其转换为平面应变问题的解答如下：

$$\sigma_x = q, \quad \sigma_y = \frac{\mu q}{1-\mu}, \quad \tau_{xy} = 0 \tag{1-1}$$

$$u = + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} qx + I, \ v = 0 \tag{1-2}$$

式中 I 为待定常数，由位移边界条件确定。

现在，在极坐标下按应力求解，按照弹性力学的逆解法或半逆解法，只要找到一组特解满足以应力函数表示的相容方程和应力边界条件即为问题的解答。

试取应力函数

$$\varphi = \frac{qr^2}{2} \tag{1}$$

它满足重调和方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \varphi = 0 \tag{1-3}$$

由

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \tag{1-4}$$

得到

$$\sigma_r = q, \quad \sigma_\theta = q, \quad \tau_{r\theta} = 0 \tag{2}$$

因为不含弹性常数，半无限大板和半无限大弹性体均相同。但此解答经坐标变换后不可能与（1-1）相同，（1-1）中出现了弹性常数 μ，故此解答不是上述问题的真实解。

下面用因次分析法求解，由因次分析法，应力函数的形式为

$$\varphi = r^2 f(\theta) \tag{3}$$

代入相容方程（1-3），得

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{d^4 f(\theta)}{d\theta^4} + 4 \frac{d^4 f(\theta)}{d\theta^2} \right] = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^4 f(\theta)}{\mathrm{d}\theta^4} + 4\frac{\mathrm{d}^2 f(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2} = 0$$

其通解为

$$f(\theta) = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C\theta + D \tag{4}$$

代入式（3），得

$$\varphi = r^2(A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C\theta + D) \tag{1-5}$$

再由式（1-4），有

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -2A\cos 2\theta - 2B\sin 2\theta + 2C\theta + D \\ \sigma_\theta &= 2A\cos 2\theta + 2B\sin 2\theta + 2C\theta + D \\ \tau_{r\theta} &= 2A\sin 2\theta - 2B\cos 2\theta - C \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

因为 x 轴为对称轴，σ_r、σ_θ 应为 θ 的偶函数，$\tau_{r\theta}$ 应为 θ 的奇函数，于是有

$$B = C = 0 \tag{6}$$

应力分量表达式简化为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -2A\cos 2\theta + 2D \\ \sigma_\theta &= 2A\cos 2\theta + 2D \\ \tau_{r\theta} &= 2A\sin 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中 A、D 由边界条件及其他条件确定。首先研究应力边界条件。若令 $A=0$，则由

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\pm\pi/2} = q, \quad (\tau_{r\theta})_{\theta=\pm\pi/2} = 0$$

可解出

$$D = q/2 \tag{8}$$

所得解答与式（2）相同，不是本问题的真实解。作者经过研究发现，它不能满足位移对称性条件，现证明如下：

将（7）代入 $(\sigma_\theta)_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = q$ 得到

$$2A + 2D = q$$

对于半无限大板（平面应力问题），由应力分量（7）式可求得极坐标中的径向位移 u_r、环向位移 u_θ 为

$$\left.\begin{aligned}u_r &= \frac{1}{E}[2D(1-\mu)-2A(1+\mu)\cos 2\theta]r+\\&\quad I\cos\theta+K\sin\theta\\u_\theta &= \frac{2(1+\mu)}{E}Ar\sin 2\theta+Hr-I\sin\theta+K\cos\theta\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

式中 I、K、H 为刚体位移常数，首先由位移关于 x 轴的对称性，$K=H=0$。将极坐标中的位移分量 u_r、u_θ 换算为直角坐标系中的位移分量 u、v，经整理如下：

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{1}{E}[2D(1-\mu)-2(1+\mu)A]x+I\\v &= \frac{1}{E}[2D(1-\mu)+2(1+\mu)A]y\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

注意到半无限体中，任一竖直轴均为对称轴，于是

$$u(x,y)=u(x),\quad v(x,y)=0\qquad(11)$$

（10）式已满足上式第 1 式，由上面第 2 式必有

$$D(1-\mu)+A(1+\mu)=0\qquad(12)$$

将上式与（8）式联立，则有

$$A=-(1-\mu)q/4,\quad D=(1+\mu)q/4\qquad(13)$$

从而解答的最终形式为

$$\varphi=\frac{r^2q}{2}\left[1-\frac{1-\mu}{2}(1+\cos 2\theta)\right]\qquad(1\text{-}6)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= q\left[1-\frac{1-\mu}{2}(1-\cos 2\theta)\right]\\\sigma_\theta &= q\left[1-\frac{1-\mu}{2}(1+\cos 2\theta)\right]\\\tau_{r\theta} &= -\frac{1-\mu}{2}\sin 2\theta\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}7)$$

将应力分量（1-7）式进行坐标变换得直角坐标中的应力分量

$$\sigma_x = q, \quad \sigma_y = \mu q, \quad \tau_{xy} = 0 \tag{1-8}$$

将上式中 μ 换成$\frac{\mu}{1-\mu}$，得到与参考文献［1］完全相同的应力分量解答即式(1-1)。

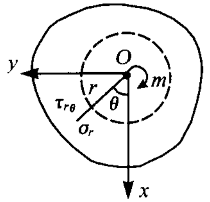


图 1-2

引例 2 如图 1-2 所示，无限大板在板中小孔处受集中力偶 m。

试取应力函数

$$\varphi = L\theta + N\sin 2\theta \tag{1-9}$$

容易验证它满足

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 \varphi = 0$$

应力分量表达式为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4N}{r^2}\sin 2\theta, \quad \sigma_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2N\cos 2\theta + L}{r^2} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

考虑半径为 r 的圆的平衡，由$\sum m_o = 0$ 有

$$\int_0^{2\pi} \tau_{r\theta} r^2 \mathrm{d}\theta + m = 0$$

积分并求解得

$$L = -\frac{m}{2\pi} \tag{2}$$

因为反对称条件已满足，$\sum F_x = 0$，$\sum F_y = 0$ 自动满足，其他边界条件亦已满足。

下面考虑变形连续的几何条件确定 N。根据平面应力问题的物理方程和几何方程可得

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{4N}{Er^2}\sin 2\theta \\
\varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{4\mu N}{Er^2}\sin 2\theta \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = \\
&\frac{4N(1+\mu)}{Er^2}\cos 2\theta + \frac{m(1+\mu)}{\pi Er^2}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3) 式中前两式经过运算得

$$\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{4N}{Er}\sin 2\theta + f_1(\theta) \\
u_\theta &= \frac{2N(1-\mu)}{Er}\cos 2\theta - \int f_1(\theta)\mathrm{d}\theta + f_2(r)
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

由此可见，待定常数 N 在位移表达式中并非相应于位移多值项，但它可由位移可解条件求出，将 (4) 式代入 (3) 式中，最后一式整理得

$$\frac{8\mu N}{Er^2}\cos 2\theta - \frac{m(1+\mu)}{\pi Er^2} + \frac{1}{r}f_1{}'(\theta) +$$

$$\frac{1}{r}\int f_1(\theta)\mathrm{d}\theta + f_2{}'(r) - \frac{1}{r}f_2(r) = 0$$

两边同时乘以 r^2，得

$$\frac{8\mu N}{E}\cos 2\theta - \frac{m(1+\mu)}{\pi E} + rf_1{}'(\theta) +$$

$$r\int f_1(\theta)\mathrm{d}\theta + r^2 f_2{}'(r) - rf_2(r) = 0 \tag{5}$$

上式对 r 求导一次并分离变数有

$$f_1{}'(\theta) + \int f_1(\theta)\mathrm{d}\theta = f_2(r) - rf_2{}'(r) - r^2 f_2{}''(r) = C$$

进行相应的微分运算后有

$$f_1''(\theta) + f_1(\theta) = 0 \tag{6}$$

$$f_2(r) - rf_2'(r) - r^2 f''(r) = 0 \tag{7}$$

（5）式对 θ 求导一次得

$$-\frac{16\mu N}{E}\sin 2\theta + r[f_1''(\theta) + f_1(\theta)] = 0$$

因（6）式成立，由上式必有

$$N = 0 \tag{8}$$

从而得该问题应力分量解答

$$\sigma_r = 0, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{m}{2\pi r^2} \tag{1-10}$$

由以上可知，多连体中应力分量满足平衡微分方程、相容方程和应力边界条件后，可能含有的待定常数项或待定函数项并非一定对应于位移的多值项，而且几何方程并非自然满足，确定这些待定常数的补充条件可以是位移单值条件，也可以是由变形连续所要求的一切几何条件。

引例 3 半平面体在边界上受集中力 P，如图 1-3 所示

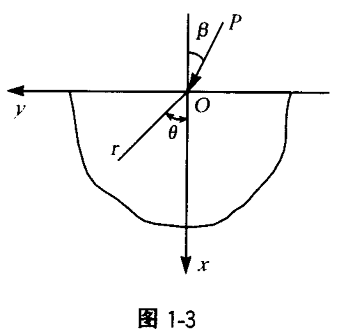


图 1-3

该问题应力分量的正确解答为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2P}{\pi r}(\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\sin\theta)\\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0\end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

现叠加上齐次边界条件解

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{2A}{r^2}\cos2\theta\\ \sigma_\theta &= \tau_{\theta r} = 0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

显然式（1-11）叠加上式（1）后仍然满足按应力求解的基本微分方程和应力边界条件以及由应力边界条件转换而来的平衡条件。而经过因次分析后，可以排除解答（1）或者说式（1）中 $A=0$。

以上各例均取自经典弹性力学教材，作者对它们进行了再研究[2,3]，其目的是为了引出经典弹性理论存在的局限性，以便对其进行修正与完善，详细的论述见§1-2 和§1-3。

§1-2　按应力求解结果的唯一性和定解条件[3]

一、经典弹性理论的唯一性定理

关于按应力求解平面问题解答的唯一性问题，不少文献如参考文献［1］论述过，综合起来有如下结论[1]：

“对于平面问题，可以证明：如果满足了平衡微分方程和相容方程，也满足了应力边界条件，那么，在单连体的情况下，应力分量就完全确定了。但是，在多连体的情况下，应力分量的表达式中可能还留有待定函数或待定常数；在由这些应力分量求出的位移分量表达式中，由于通过了积分运算，可能

出现某些多值项，表示弹性体的同一点具有不同的位移，而在连续体中，这是不可能的，命这些多值项等于零，就可以完全确定应力分量”。

二、解答唯一性的完备和定解条件的修正

上述经典弹性理论解答的唯一性定理不完备，存在如下两个问题：

（1）对于无界单连体，应力分量满足了平衡微分方程和相容方程，也满足了应力边界条件，并非完全确定。引例 1 和引例 3 就是如此。实际上，经典弹性理论的唯一性定理只对有界单连体成立。经典弹性理论唯一性定理等价于

$$\int_S t_i u_i \mathrm{d}s = 0$$

式中 $t_i = t_i^{(1)} - t_i^{(2)}$，$u_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)}$ 分别为两组特解面力、边界位移之差，S 是整个弹性体的边界（实际上是一条闭合曲线）。对于有界单连体，边界上不是 $t_i = 0$ 便是 $u_i = 0$，因为边界上不是面力已知，就是位移已知，因此，上式成立。

而对于无界体、半无界体，因为包围弹性体的所有边界中有一部分为假想边界，在这一部分假想边界上面力及位移均属未知，从而在该部分边界上 t_i、u_i 一般均不为零，而

$$\int_S t_i u_i \mathrm{d}s = 2\int_V W \mathrm{d}v \neq 0$$

这里 W 为应变能密度。

（2）对于多连体（实际上包括无界、半无界单连体），应力分量满足了平衡微分方程、相容方程和应力边界条件后，应力分量表达式中可能还含有待定函数或待定常数，但它们并非一定对应于位移的多值项。引例 1 就是如此。