高中三角

优秀教案课堂实录选评

高中三角

优秀课堂教学选评

高中三角优秀教案课堂实录评选

肖竞择等编

湖北 广西 广东 湖南 河南 人民（教育）出版社

高中三角优秀 教案/课堂实录 选评

肖竞择　等编

*

湖北教育出版社出版　　新华书店经销
天门县印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　8.5印张　插页　178，000字
1987年3月第1版　1987年3月第1次印刷
印数：1—4，600

ISBN 7—5351—0110—0/G·100

统一书号：7306·607　　定价：1.30元

出版说明

《中小学课堂教学经验荟萃丛书》是中南五省（区）人民（教育）出版社协作出版供中小学教师教学参考用的书，它是按中小学所设学科分册编辑的，已经出版的有：小学中低年级（一、二、三年级）语文、数学的优秀教案和课堂实录选评，高年级（四、五年级）语文、数学、自然常识、历史、地理以及小学体育的优秀教案和课堂实录选评；初中政治、语文、英语、数学、物理、化学、生物、历史、地理的优秀教案和课堂实录选评，共十六册。这次出版的有：高中政治、语文、英语、代数、立体几何、解析几何、三角、物理、化学、生物、历史、地理的优秀教案和课堂实录选评，共十二册。

这套丛书主要收录的是近期中小学各科的优秀教案和课堂实录。党的十一届三中全会以来，全国中小学教师解放思想，志在振兴教育，辛勤耕耘，锐意改革，在课堂教学中创造了不少新经验，取得了可喜的成绩。编辑出版《中小学课堂教学经验荟萃丛书》，把优秀教案和课堂实录选收进来，就是为了展示党的十一届三中全会以来的教学改革成果，以马克思列宁主义教育理论为指导，探索中小学各学科的教学规律，为提高教学质量服务。广大中小学教师将在这套丛书中看到：一份好的教案应当怎样写，一节好的课应当怎样

讲，怎样才能更有效地贯彻党的德智体全面发展的教育方针，怎样才能使学生打好基础、提高能力、发展智力。古语说，“他山之石，可以攻玉”。通过这样的借鉴、对比，无疑将有助于广大教师扩大视野，开拓思路，进一步深入理解课文，不断改进教学方法，从而有效地提高教学水平。

这套丛书所选的教案和课堂实录，体例不一，风格各异，形式多样，各有千秋，都具有较强的实践性、针对性和指导性。参加评点工作的同志，有些是专门家，有些是教学研究人员。评点中，既评教学内容，也评教学方法；既点明成功之处，也指出其不足；不写空话、大话，力求做到要言不烦，举一反三，给人以思索的余地。这套丛书由教案、课堂实录和经验体会等三部分组成，按我国传统的评点办法，加以旁评、尾评，编排顺序原则上按课文出现的先后，以便于查检。有些课文之所以既选教案，也选课堂实录，还选经验体会的文字，目的在于体现教学的全过程，使读者更好地了解执教者的整体设计。

湖北 广西 广东 湖南 河南 教育（人民）出版社

前　言

本书收集全国各地（遍及十二个省市）特级教师、优秀教师高中三角方面的优秀教案、优秀教学实录和教学经验，反映教学面向现代化、面向世界、面向未来的改革精神，反映他们用现代先进教育思想指导教育，在传授知识的过程中发展学生智力、培养学生能力的创造精神，以达到指导高中三角部分的教学，提前教育水平的目的。

本书按大纲和教材的顺序共分三章：三角函数、两角和与差的三角函数、反三角函数和简单的三角方程，每章开头是全章教学经验方面的论文，可作为本章教学的总体指导思想，以后是按教材的节次选各节的重点、难点、关键部分内容的课时教案或教学实录。因此，从内容上，本书已包含了高中三角部分的全部基础知识，以及对这些基础知识部分的重要概念、公式、法则的精辟阐述，汇聚了不少典型例题。另外，本书各篇作者都是中学数学教学方面的高手，他们的教法真是百花齐放，各具特色。因此，本书又是一本反映现代教育思想的高中三角教学法的书籍。

本书的读者对象主要是中学数学教师，师范院校数学系科的学生和教师，教育科学研究工作者。

由于编者水平有限，编辑工作、旁评与尾评工作的缺点错误实在难免，希望得到各方面的批评指正。最后，对湖北大学数学系余克庆老师为本书绘图，表示衷心的感谢。

编　者1985．元．

目　录

第一章　三角函数的教学

南京师大附中　马　明

三角函数的理论是相似形理论的扩张，其表现形式是角与线段比的对应关系．这种对应关系有六种，分别给以特定的符号以后，掩盖了它所代表的线段比的实质．因此，三角函数具有抽象性强的特点．六种三角函数之间的联系相当密切，而自变量的种种变化所引起的三角函数式的变化也很复杂，这种联系和变化关系形成了三角函数具有公式多、变化大的另一特点．三角函数的性质很丰富，就描述运动来说，它描述了圆周运动与直线运动的对应和转化关系，从而也描述了周期运动．因此，三角函数又具有广泛应用的特点．为了针对以上特点以及学生学习中的困难，教学时应注意的是：第一，加深对三角函数的理解；第二，充分利用三角函数的几何意义，做到“胸中有图”，“按图索解”；第三，联系物理问题学好三角．

（一）加深对概念的理解

三角函数的定义、变换、性质等内容是不断地抽象并加深的，因此，教学中不能降低概括水平，不能让学生形式地

去表达，去运算，而不深究其含义。

1．学生过去只知道0°到360°的角，现在，角的概念经过推广以后，便包括任意大小的正角、负角和零角。当角装上适当的直角坐标以后（象教材那样），又出现象限角这个概念，它与区间角是两个既有联系又有区别的概念。

如果$\theta\in(90°, 180°)$，则$\frac{\theta}{2}$是第一象限角；如果θ是第二象限角，则$\frac{\theta}{2}$有可能是第三象限角，因此如果$\theta\in(90°、180°)$，则$\cos\frac{\theta}{2}<\sin\frac{\theta}{2}$；如果$\theta$是第二象限角，则$\cos\frac{\theta}{2}$不一定小于$\sin\frac{\theta}{2}$，因为$\frac{\theta}{2}$可能是第三象限角。

教材在具体研究一系列与30°角终边相同的角以后，提出一般性结论：

所有与α角终边相同的角，连同α角在内（而且只有这样的角），可以用式子$k\cdot360°+\alpha$，$k\in Z$来表示。

这里有两点要加深理解：

（1） 在学生对纯粹性与完备性尚不十分理解以前，对这段话（特别是“而且只有这样的角”）很难理解透。可以改用不同形式的语句来表达这个结论，例如改为：

所有与α角终边相同的角，连同α角在内，都可以用式子$k\cdot360°+\alpha$，$k\in Z$来表示（完备性）；反之，可以用式子$k\cdot360°+\alpha, k\in Z$来表示的角，它的终边与角$\alpha$的终边相同（纯粹性）．学生就可以理解清楚．但同时要向学生指出，尽管书本的叙述难懂些，但很简洁，今后要学会这种表叙方法．

（2） 集合$\{\theta \mid \theta=k\cdot360°+\alpha, k\in Z\}$与集合$\{\varphi \mid \varphi$

$=(k-1)\cdot 360°+\alpha,\ k\in Z\}$ 有什么关系？与集合 $\{\varphi\,|\,\varphi=2k\cdot 360°+\alpha,\ k\in Z\}$ 呢？

如果不通过这种训练，学生对表达式$k\cdot 360°+\alpha(k\in Z)$，难免要出现形式上的理解。

2．关于任意角的三角函数定义，课本已讲得很清楚，但有几点还得向学生着重说明：

（1） 课本是用角α的终边上任意一点P的坐标 x、y及P与原点的距离r（$r>0$）这三个数的比来定义三角函数的，并指出：对于确定的角α，比值的大小和P点在角α的终边上的位置没有关系。它是以相似形理论作为基础的。这种与位置无关的现象说明比值只与角α的大小有关，这就保证三角函数定义的合理性。

课本在这里渗透了数学上的“无关”思想是很重要的。在立体几何中定义“异面直线所成的角”以及“二面角的平面角”的时候又一次渗透了“无关”思想（以空间等角定理为基础）。实际上，初等数学中的“无关”思想的应用面颇广，如：

“正三角形内部任意一点到三边距离之和为常量”说明“设P是正三角形内部的一点，P到三边距离之和为S，则S与点P的位置无关”；

$f(\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta$的值与$\theta$无关；

如果$f'(x)=0$，则$f(x)$与x无关；反之，如果$f(x)$与x无关，则$f'(x)=0$；

证明恒等式：$f(\alpha)=\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120°)+\cos^2(\alpha-120°)=\frac{3}{2}$，只要证明$f'(x)=0$且$f(0)=\frac{3}{2}$

就可以；（下略）。

（2） 引入弧度制以后，对采用弧度制来度量角，多数学生在学习上表示出一定的抵触情绪。这种不自觉的抵触情绪只有在学习导数时才有可能彻底解决，但目前也可通过三角函数的定义的研讨，稍加减轻。

课本指出：“正弦、余弦、正切、余切分别可看成从一个角的集合到一个比值的集合的映射。它们都是以角为自变量，以比值为函数值的函数，这些函数都叫做三角函数。”而在这以前，课本在用映射定义函数时，特别强调集合A、B都必须是非空的数的集合。

在三角函数的定义中，A是“角的集合”，B是数（比值）的集合，前后就产生矛盾。因此，课本紧接着又指出：“由于角的集合与实数集之间可以建立一一映射关系，三角函数可以看成是以实数为自变量的函数。例如，当采用弧度制来度量角时，对于每一个实数，对应着一个确定的角（其弧度数等于这个实数），而这个确定的角又对应着它的三角函数值（所取的实数应使相应的三角函数有意义），从而这个实数就对应着它的三角函数值，即

$$\text{实数}\to\text{角}\left(\begin{array}{c}\text{其弧度数等}\\ \text{于这个实数}\end{array}\right)\to\text{三角函数值（实数）”}$$

带领学生仔细阅读这段教材是很有必要的。但三角函数如此地抽象为两个实数集的对应关系以后，又必然地掩盖了三角函数的原始几何意义（角和线段比的对应关系），而这种几何意义与几何直观在今后的学习与解决实际问题中又将起着极大的作用。因此，如何运用三角函数的原始几何意义与几何直观，是必然要研究的课题（见本文第二部分“胸中

有图，按图索解”）.

（3） 两个函数的对应法则 f 尽管相同，而它们的定义域不同时，我们就把它们视为两个不同的函数. 而一个三角函数 $f(x)$ 进行三角变换时，往往出现改变定义域的现象，例如，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x},$$

…………

两端的定义域不同. 因此课本在“同角三角函数的基本关系式”这一节中特别申明：上面这些关系式都是恒等式，即当 α 取使关系式的两边都有意义的任意值时，关系式两边的值都相等. 以后所说的恒等式都是指这个意义下的恒等式.

（4） 由于三角函数所反映的映射不是一一映射，所以命题“$\sin\alpha=\sin\beta\Rightarrow\alpha=\beta$”不成立。对这一点，学生是很容易理解的。但理解得是否深透，运用得是否自如，各人情况就可能不一样. 下面我们看几个具体问题：

1） 如果 α 和 β 是锐角三角形的两个内角，而且 $\sin\alpha=\sin\beta$，能否推得 $\alpha=\beta$？

2） 如果 α 和 β 是钝角三角形的两个内角，而且 $\sin\alpha=\sin\beta$，能否推得 $\alpha=\beta$？

3） 在两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中，如果 $\sin A=\sin A'$，而且 $\sin B=\sin B'$，能否断定 $A=A'$ 而且 $B=B'$，为什么？

4） 在两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 中，如果 $\sin A$

$=\sin A'$，而且$\sin B=\sin B'$，则两个等式$A=A'$与$B=B'$之中是否至少要有一个成立？为什么？

5）在两个三角形ABC和$A'B'C'$中，如果$\sin A=\sin A'$，$\sin B=\sin B'$，而且$\sin C=\sin C'$，能否断定三个等式$A=A'$，$B=B'$，$C=C'$都成立？为什么？

6）在$\triangle ABC$中，如果$\sin A>\sin B$，能否断定$A>B$，为什么？

7）在$\triangle ABC$中，如果$\cos A>\cos B>\cos C$，那么三个角A、B、C之间将有什么样的大小关系？为什么？

8）在两个三角形ABC和$A'B'C'$中，如果

a）$\sin A>\sin A'$，能否断定$A>A'$？

b）$\begin{cases}\sin A>\sin A'\\ \sin B>\sin B'\end{cases}$ 能否断定 $\begin{cases}A>A'\\ B>B'\end{cases}$ ？

c）$\begin{cases}\sin A>\sin A'\\ \sin B>\sin B'\\ \sin C>\sin C'\end{cases}$ 能否断定 $\begin{cases}A>A'\\ B>B'\\ C>C'\end{cases}$ ？

为了读者阅读方便起见，以上各题的参考答案附在下面：

1）能。

2）能。

3）不能。例如$\sin 45°=\sin 45°$，$\sin 120°=\sin 60°$，但$120°\neq 60°$。

4）能。反设$A'=180°-A$，$B'=180°-B$，两式相加，得$A'+B'=360°-(A+B)$，或$(A'+B')+(A+B)=360°$，这与$(A'+B'+C')+(A+B+C)=360°$矛盾。

5） 能．由正弦定理应得这两个三角形的三边成比例，这是两个相似三角形．

6） 能．由正弦定理应得$a>b\Rightarrow A>B$．

7） $A<B<C$．这是因为角在（0，180°）内变化时，余弦函数是减函数．

8） a）不能．例如$\sin60°>\sin150°$，但$60°\not>150°$；

b）不能．例如 $\begin{cases}\sin60°>\sin150°\\ \sin70°>\sin10°,\end{cases}$

而 $\begin{cases}60°>150°\\ 70°>10°\end{cases}$ 不成立；

c）不能．例如 $\begin{cases}\sin60°>\sin150°\\ \sin70°>\sin10°\\ \sin50°>\sin20°,\end{cases}$

但$60°\not>150°$．

（二）胸中有图，按图索解

三角函数的定义有很直观的几何解释，与几何图形有密切的联系．因此，教学中引导学生"胸中有图，按图索解"可收到事半功倍之效．其中，特别以单位圆的运用最为奏效．

1．单位圆与三角函数线的运动．

在单位圆中，三角函数线是作为有向线段出现的．因此，用三角函数线的运动来把握三角函数值的变化，就使三角函数值的变化有非常直观的几何解释，从而易于把握．

相应的教具固然是必要的，但迅速地丢开教具，过渡到胸中有图，按图索解（通过空间想象）是非常重要的。例如，让学生想象，当角x在区间（$0°$，$360°$）上变化时。各个三角函数值是如何变化的?

进一步，当$x\in(0°, 360°)$且$\cos x>\sin x$时，试写出x的值?

同样，当$x\in R$，且$\sin x=0$时，试写出x的值?

还有，写出函数$y=\sqrt{1-2\sin x}$的定义域等。

2。“正六边形”与三角函数的基本关系式。

同角三角函数的三类关系（倒数关系，商数关系，平方关系）可以用一个正六边形来表示（见图1·1）。了解这一点，这对初学者来说是十分有好处的。其中商数关系也可以写为乘数关系：

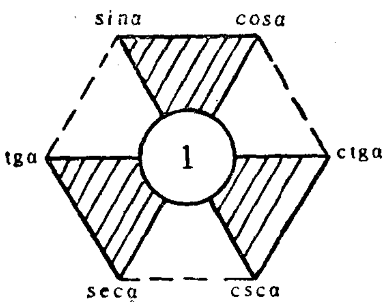

图 1·1

$\sin\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\cos\alpha$,

$\cos\alpha=\mathrm{ctg}\alpha\cdot\sin\alpha$,

$\mathrm{tg}\alpha=\sin\alpha\cdot\sec\alpha$,

$\mathrm{ctg}\alpha=\cos\alpha\cdot\csc\alpha$,

$\sec\alpha=\mathrm{tg}\alpha\cdot\csc\alpha$,

$\csc\alpha=\mathrm{ctg}\alpha\cdot\sec\alpha$.

它表明，正六边形的六个顶点所在的数，等于其两旁的两个数之积。

六年制高中《代数》第一册第107页的例子或123……

已知　$\mathrm{ctg}\alpha=m$（$m\neq0$），求$\cos\alpha$。

课本是这样解的：