线性方程与矩阵

线性方程组与矩阵

还 [illegible] 表

江苏教育出版社

线性方程组与矩阵

王 笃 正

江苏教育出版社出版

江苏省新华书店发行　　盐城市印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张 9.875 字数 216,000

1980年6月第1版　　1984年4月第2次印刷

印数 27,501—44,800 册

书号：13351·021　　定价：0.70 元

责任编辑　何震邦

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分一、消去法与矩阵；二、行列式；三、线性方程组理论；四、矩阵代数四个部分。比较系统地介绍线性方程组和矩阵的概念、性质、运算（解法）规律及其重要理论。

书后的线性变换、二次齐式作为附录，供进一步学习参考，读者可根据情况选读。

本书原由江苏人民出版社出版，这次重印改为江苏教育出版社出版。

目　　录

一、消去法与矩阵

§1 从二元与三元一次方程组谈起

在中学数学课本中，都有二元一次方程组和三元一次方程组的内容。

一次方程又可称为线性方程*，因此一次方程组又称为线性方程组.

二元和三元一次方程组是线性方程组中最简单的情况，我们就从这里说起.

1. 二元一次方程组

“元”是指未知数，这里又叫未知量。“二元”即是说两个未知量. 含有两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

这样的线性方程组，一般可通过消元法求解。消元法的基本思想是消去一个未知量，从而变成解一元一次方程. 这样就可先求出一个未知量的值，然后再求出另一个未知量的值. 具体说来，有以下三种方法：

1°.代入消元法.

* 因为解析几何中两个未知数的一次方程确定平面上的一条直线，所以有此名称。

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 5x+2y=11, & (1) \\ 3x-4y=4. & (2) \end{cases}$$

解 由(1) $y=\dfrac{11-5x}{2}$. (3)

把(3)代入(2)，得

$$3x-4\times\frac{11-5x}{2}=4,$$

即 $13x-22=4$. (4)

由(4) $x=2$, (5)

(5)代入(3) $y=\dfrac{1}{2}$.

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x=2, \\ y=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

2°.加减消元法.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 10x+15y=15, & (1) \\ 9x-15y=42. & (2) \end{cases}$$

这个方程组有一个特点，在(1)和(2)中，未知量 y 的系数互为相反数。如果利用等式的性质，把(1)和(2)加起来，就正好消去了未知量 y。

解 (1)+(2) $19x=57$,

$x=3$. (3)

(3)代入(1) $y=-1$.

$$\therefore \begin{cases} x=3, \\ y=-1. \end{cases}$$

这种解法叫加减消元法。这种方法也不仅仅限于解这种特殊类型的方程组，我们看下面的例子。

例3 解方程组

$$\begin{cases}4x+3y=9, & (1)\\ 5x+2y=-1. & (2)\end{cases}$$

解 $(1)\times 2$ $8x+6y=18,$ (3)

$(2)\times 3$ $15x+6y=-3.$ (4)

$(4)-(3)$ $7x=-21,$

$x=-3.$ (5)

(5)代入(1) $y=7.$

$$\therefore \quad \begin{cases}x=-3,\\ y=7.\end{cases}$$

3°. 行列式法.

从前面几个例子的求解过程可以看出，这些方程组的解，都是由方程组中各个未知量的系数和常数项经过四则运算得到的。因此我们希望得到一个用未知量的系数和常数项来表示方程组解的一般公式，因为如果有了这样的求解公式，今后对解方程组或对方程组进行理论研究，都会带来很大的方便。

现在我们用加减消元法对二元线性方程组的一般形式求解。即解方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1, & (1)\\ a_2x+b_2y=c_2. & (2)\end{cases}$$

解 $(1)\times b_2-(2)\times b_1$得

$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1,$

$(2)\times a_1-(1)\times a_2$得

$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$

于是，当$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$时，

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (3)$$

可以验证，所得未知量x，y的值适合原方程组，因此，(3)便是二元线性方程组的求解公式。

在$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$的情况下，公式(3)具体地反映了方程组的解对于系数及常数项的依赖关系。给定了一个具体的二元线性方程组，只要$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$，就可以通过公式(3)求出它的解。

至此，在$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$时，问题好象已得到了解决，但是由于公式本身还看不出它的明显规律，不易记忆，所以这个公式还不够理想，那末能不能找一个更好的表现形式，使得它们之间的依赖关系表示得更明显，更有规律，且便利记忆呢？

让我们来仔细研究一下公式(3)。在这个公式里，x与y的分母是相同的，都是$a_1b_2-a_2b_1$，它只含有未知量的系数。如果把未知量的系数按照它们在方程组中的位置相应地列成下表：

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

就会看到，由表中左上角及右下角两个数的乘积减去右上角及左下角的两个数的乘积刚好就是(3)的分母$a_1b_2-a_2b_1$。

我们把代数和$a_1b_2-a_2b_1$叫做一个二阶行列式，并且用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

来表示，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

在一个行列式里，通常把横排叫做**行**，竖排叫做**列**，a_1、a_2、b_1、b_2等叫做行列式的**元素**。

现在再来看(3)中的分子，用心观察一下就会发现，把分母中的a_1、a_2依次换成方程组的常数项c_1、c_2就得到x的分子，把分母的b_1、b_2依次换成常数项c_1、c_2就得到y的分子。

这样，依照上面的记号，可以把两个分子写成：

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

于是二元线性方程组的解，可以表示成两个行列式相除的简单形式：

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D}, \\ y = \dfrac{D_y}{D}. \end{cases} \tag{4}$$

其中记号D、D_x和D_y分别为

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

D由方程组中x和y的系数组成，叫做方程组的**系数行列式**，D中的x的系数a_1、a_2换成常数项c_1、c_2就得到D_x；y的系数b_1、b_2换成常数项c_1、c_2就得到行列式D_y.

引入了二阶行列式之后，公式(3)变形成为公式(4)，这虽然只是形式上的变化，但是这种变化却给我们带来了很大的好处。公式(4)明显地反映了方程组的解对于系数及常数项的依赖关系，揭示了明确的规律，给求解带来了便利，也比较容易记忆．特别是今后还会看到，这种规律可以推广到任意多个未知量的情形．

当$D\neq 0$时，可以利用公式(4)直接求出二元线性方程组的解，这时，只要计算三个二阶行列式就可以了。

例4　解方程组

$$\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=8. \end{cases}$$

解　计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3-4=-7,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}=-5-16=-21,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=24-10=14.$$

所以，得方程组的解

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-21}{-7}=3, \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{14}{-7}=-2. \end{cases}$$

例 5 解关于 x，y 的方程组

$$\begin{cases} mx+y-m-1=0, \\ x+my-2m=0. \end{cases} \quad (m \neq \pm 1)$$

解 先化成一般形式

$$\begin{cases} mx+y=m+1, \\ x+my=2m. \end{cases}$$

计算

$$D=\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=m^2-1=(m+1)(m-1),$$

$$D_x=\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2m & m \end{vmatrix}=m(m+1)-2m=m(m-1),$$

$$D_y=\begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2m \end{vmatrix}=2m^2-m-1=(2m+1)(m-1).$$

$\because$ $m \neq \pm 1$ $\therefore D \neq 0$，从而得方程组的解

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{m(m-1)}{(m+1)(m-1)}=\dfrac{m}{m+1}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{(2m+1)(m-1)}{(m+1)(m-1)}=\dfrac{2m+1}{m+1}. \end{cases}$$

2. 三元一次方程组

以上讨论了含两个未知量的线性方程组。同样可以讨论含三个未知量三个方程的线性方程组，其一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & (2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. & (3) \end{cases}$$

和二元线性方程组类似，三元线性方程组也可以用代入消元法和加减消元法来解，只不过麻烦一些罢了，故不再赘述。这里，只着重谈一下用行列式法来解三元线性方程组。

用加减消元法来解上述一般形式的方程组。方法是先消去一个未知量，例如先消去 z。由于 c_1，c_2，c_3 不全为零（否则方程组便只含两个未知量），不妨设 $c_1 \neq 0$，于是

$(1)\times c_2-(2)\times c_1$，得

$$(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y$$
$$=d_1c_2-d_2c_1 \qquad (4)$$

$(1)\times c_3-(3)\times c_1$，得

$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y$$
$$=d_1c_3-d_3c_1 \qquad (5)$$

设方程组(4)、(5)的系数行列式不等于零，由此可以解出 x 和 y：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1c_2-d_2c_1 & b_1c_2-b_2c_1 \\ d_1c_3-d_3c_1 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1c_2-a_2c_1 & b_1c_2-b_2c_1 \\ a_1c_3-a_3c_1 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1c_2-a_2c_1 & d_1c_2-d_2c_1 \\ a_1c_3-a_3c_1 & d_1c_3-d_3c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1c_2-a_2c_1 & b_1c_2-b_2c_1 \\ a_1c_3-a_3c_1 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}.$$

把 x 和 y 的值代入(1)，即能求出 z 的值，推导结果如下：

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1} \quad (6) \\ y &= \frac{a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_1d_3c_2-a_2d_1c_3-a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1} \quad (7) \\ z &= \frac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1} \quad (8) \end{aligned}\right.$$

这是三元线性方程组的解的公式，但这个解的表达式太复杂，既不便记忆，又不便计算。仿照二阶行列式，引进下列记号和规定。

在上述解的表达式中，x、y、z 的分母都是相同的，都是 $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$。我们把这个代数和叫做一个**三阶行列式**，并且用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

来表示。即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} &a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2 \\ &-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1. \end{aligned} \quad (9)$$

三阶行列式比起二阶行列式来复杂得多了，但它的组成却也是很有规律的。计算它也有一个规则，就是所谓对角线规则。

在三阶行列式里，从左上角到右下角的对角线叫做**主对角线**。从右上角到左下角的对角线叫做**副对角线**。(9)式

中有三项的符号是正的，其中的一项是位于主对角线上三个元素的乘积；其它两项中的每一项都是位于主对角线的一条平行线上的两个元素与副对角线上的一个元素的乘积．利用副对角线可以类似地得到(9)式中有负号的三项的构成规律．这样就得到了一个计算三阶行列式的方法．

这个计算规则还可以用下面两个图来表示：

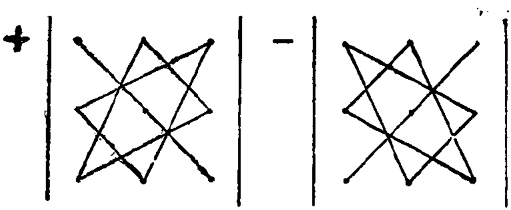

图 1

左图指出计算三阶行列式正项的规则，右图指出计算负项的规则．

例如，

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & -4 \end{vmatrix} = 1\times4\times(-4)+(-1)\times5\times2+3\times(-2)\times(-3)-2\times4\times(-3)-(-2)\times5\times1-3\times(-1)\times(-4)=14.$$

引进三阶行列式后，三元线性方程组的解的表达式中的分母就可以用一个三阶行列式来表示．再来考察(6)式的分子，不难看出，它刚好是把分母中 x 的系数 a_1、a_2、a_3 分别换成常数项 d_1、d_2、d_3，因此它也能用一个三阶行列式来表示，只要把(9)式左端的第一列换成常数项．这个行列式我们用 D_x 表示，即